线性代数
特征多项式的计算

曾吉文
哈尔滨工业大学数学科学学院

2022年 12 月

主要内容：对于一个 n 阶矩阵 A, 计算特征多项式 $f(\lambda)=|\lambda E-A|$.

1 特征多项式的计算

1 特征多项式

给定一个数域 F ，对于方阵 $A=(a_{ij})\in F^n$,

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为矩阵 A 的特征多项式，记为 $f(\lambda)=|\lambda E-A|$ 我们依据行列式的性质计算λ^{n-r}的系数。设

$$
\begin{vmatrix}
\lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\
-a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-a_{n1} & -a_{n_2} & \cdots & \lambda - a_{nn}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
\lambda - a_{11} & 0 - a_{12} & \cdots & 0 - a_{1n} \\
0 - a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & 0 - a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 - a_{n1} & 0 - a_{n_2} & \cdots & \lambda - a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

根据行列式性质，这个行列式是2^n个行列式的和。如果选择第$j_1, j_2, ..., j_{n-r}$列中，和式里的第一项，其它列：$k_1, k_2, ..., k_r = \{1, 2, ..., n\} - \{j_1, j_2, ..., j_{n-r}\}$,选和式里的第二项

$$\begin{vmatrix} -a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & & 0 & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{j_1 1} & \cdots & \lambda & \cdots & & 0 & \cdots & -a_{j_1 n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & \ddots & & & \\ -a_{j_{n-r} 1} & \cdots & 0 & \cdots & & \lambda & \cdots & -a_{j_{n-r} n} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & & 0 & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix}$$

按第$j_1, j_2, \ldots, j_{n-r}$ 列展开（广义行列式展开定理），得到这个行列式的值为：

$$\lambda^{n-r}(-1)^r A\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_r \end{pmatrix}$$

这里的 $A\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_r \end{pmatrix}$代表 A 的一个子式，选取A 的第$k_1, k_2, ..., k_r = \{1, 2, ..., n\} - \{j_1, j_2, ..., j_{n-r}\}$ 行和第 $k_1, k_2, ..., k_r = \{1, 2, ..., n\} - \{j_1, j_2, ..., j_{n-r}\}$ 列，构成的行列式。在多项式 $f(\lambda) = |\lambda E - A|$中，合并所有 λ^{n-r} 的同类项，

$$\lambda^{n-r}(-1)^r \sum_{1\le k_1,k_2,\ldots,k_r\le n} A\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_r \end{pmatrix}$$

- $r=0, |\lambda E-A|$的首项 λ^n 的系数为 1;
- $r=n, |\lambda E-A|$的常数项为 $(-1)^n|A|$;
- $r=1, |\lambda E-A|$的 λ^{n-1} 的系数为

$$(-1)(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})=-\mathrm{Tr}(A)$$

总结上述讨论，得到下面定理：

Theorem 1.1

对于 n 阶方阵 A，令 $f(\lambda)=|\lambda E-A|$，称为矩阵 A 的特征多项式。则有

$$
\begin{aligned}
f(\lambda) &= |\lambda E-A| \\
&= \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \lambda^n-\sum_{k=1}^{n} a_{kk}\lambda^{n-1}+\cdots+ \\
\lambda^{n-r}(-1)^r & \sum_{1\le k_1,k_2,\ldots,k_r\le n} A\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_r \end{pmatrix} \\
&+\cdots+(-1)^n|A|
\end{aligned}
$$

例如 3 阶方阵:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix}$$

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=$$
$$\lambda^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2$$
$$+\lambda(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix})$$
$$-|A|$$

谢 谢！