线性代数
第二章 矩阵

曾吉文
哈尔滨工业大学数学科学学院

2022年 9 月

本章介绍：矩阵概念，性质，计算，矩阵可逆与求解，初等变换，矩阵分块。

本章有8小节：矩阵概念，矩阵运算，可逆矩阵，矩阵的初等变换，矩阵的秩，初等矩阵，分块矩阵的概念与计算，分块矩阵的初等变换。计划12课时，3周讲完。

1. n 矩阵的概念
2. 矩阵的运算
   - 矩阵的加法
   - 数与矩阵相乘
   - 矩阵与矩阵相乘
   - 方阵的幂
   - 方阵的行列式与行列式的乘法公式
   - 矩阵的转置
3. 可逆矩阵

2.1 矩阵的概念

数域 F：一个数的集合 F，含有 0 和 1， F 中任何两个数经过加，减，乘，除（除数不为零）还在 F 中（也称 F 对加法，减法，乘法，除法封闭），称 F 是一个数域。

例如，有理数全体记为 $\mathbf{Q}$，实数全体 $\mathbf{R}$，复数全体 $\mathbf{C}$，都是数域，分别称为有理数域，实数域，复数域。

定义 1.1

(书中定义 2.1，P27) 数域 F 中 $m\times n$ 个数 $a_{ij}, i=1,2,...,m; j=1,2,...,n$，表达为下列形式：$m$ 行 n 列：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 F 上 $m\times n$ 矩阵，记为大写字母 A. 第 i 行第 j列的元素记为 a_{ij}. A可以简单表达为：$A=(a_{ij})$.

若 $F=\mathbf{Q}$ ，称 A 有理数矩阵，若 $F=\mathbf{R}$，称 A实数矩阵，若 $F=\mathbf{C}$ ，称 A复矩阵。

符号 $F^{m\times n}$ 表示 F 上全体 $m\times n$ 矩阵。

- $A=(a_{ij})=B=(b_{ij})\Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}, i=1,2,...,m; j=1,2,...,n$。注意：$A$ 与 B 都是 $m\times n$ 矩阵.
- 元素都是零的矩阵，称为零矩阵：$\mathbf{0}_{m\times n}=0$
- 行矩阵：$A=(a_{ij})_{1\times n}=(a_1,a_2,...,a_n)$
- 列矩阵：$A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
- 行矩阵有时称行向量，列矩阵有时称列向量。
- 行列相等$m=n$，称为方阵。

- 上三角矩阵（方阵）：$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$
- 下三角矩阵（方阵）：$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$
- 对角矩阵（方阵）：$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

- 标量矩阵（数乘矩阵）为如下方阵:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$$

- n 阶单位矩阵定义为如下方阵:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- 每行每列有一个元素为 1，其余元素为 0 的矩阵，称为置换矩阵。

例如：3阶置换矩阵有：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2 矩阵的运算

2.2.1 矩阵的加法

两个矩阵有相同的行数 m，相同的列数 n，可以定义加法。

定义 2.1

（书中定义2.2，P29） 对矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $B=(b_{ij})_{m\times n}$，加法定义为

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$-A=(-a_{ij})$ 称为 $A=(a_{ij})$ 的负矩阵。因此

$$A-B=A+(-B)=(a_{ij}-b_{ij})$$

2.2.1 数乘矩阵

数乘矩阵定义为：

定义 2.2

（书中定义2.3，P30）对矩阵$A = (a_{ij}), k \in F$，定义数乘矩阵：$kA = (ka_{ij})$。

矩阵的加法和数乘，都称为矩阵的线性运算。这些运算满足交换律，结合律：

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $(kl)A = k(lA)$

2.2.1 矩阵的乘法

对于矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times p}$ 与矩阵 $B=(b_{ij})_{p\times n}$ ，如果前面矩阵 A 的列数等于后面矩阵 B 的行数，可以定义矩阵乘法：AB

背景例子：考虑平面上的旋转：逆时针旋转角度θ，考虑坐标的变换：$A=(x,y)\to B=(x',y')$. 设向量 OA 与$x-$轴的夹角为ϕ,则有

$$\begin{aligned}
x' &= r\cos(\phi+\theta) = r\cos\phi\cos\theta - r\sin\phi\sin\theta\\
y' &= r\sin(\phi+\theta) = r\sin\phi\cos\theta + r\cos\phi\sin\theta, r=|OA|\\
x' &= x\cos\theta - y\sin\theta\\
y' &= y\cos\theta + x\sin\theta = x\sin\theta + y\cos\theta\\
\begin{pmatrix} x'\\ y'\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}\cdots\cdots(1)
\end{aligned}$$

注意：向量 OA 与向量 OB 的夹角为：θ

假设平面再继续逆时针旋转角度 $\psi, B \to C(x'', y'')$.注意到：向量 OC 与向量 OB 的夹角为：ψ;向量 OC 与向量 OA 的夹角为：$\psi+\theta$; 根据前面公式：

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \cdots\cdots (2)$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\psi+\theta) & -\sin(\psi+\theta) \\ \sin(\psi+\theta) & \cos(\psi+\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

把式（1）代入（2），得到：

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\psi+\theta) & -\sin(\psi+\theta) \\ \sin(\psi+\theta) & \cos(\psi+\theta) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\psi\cos\theta - \sin\psi\sin\theta & -\sin\psi\cos\theta - \cos\psi\sin\theta \\ \sin\psi\cos\theta + \cos\psi\sin\theta & \cos\psi\cos\theta - \sin\psi\sin\theta \end{pmatrix}$$

从中可以看出规律：前一个矩阵的行元素和后面矩阵的列元素，对应相乘，再取和：例如前面矩阵的第一行乘后面矩阵的第一列：

$$\begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \cos\psi\cos\theta - \sin\psi\sin\theta = \cos(\psi+\theta)$$

定义 2.3

（书中定义2.4，P31）两个矩阵的乘法定义为：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} AB &= (c_{ij})_{m\times n} \\ c_{ij} &= a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj} \\ &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \end{aligned}$$

- 第一个矩阵 A 的列数必须等于第二个矩阵 B 的行数，才能相乘；
- AB 的行数等于 A 的行数， AB 的列数等于 B 的列数；
- AB 的第 i 行第 j 列的元素 c_{ij}，等于 A 的第 i 行乘于 B 的第 j 列:

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix} = \sum_{k=1,2,\ldots,p} a_{ik} b_{kj}$$

- 即使 AB 和 BA 都有意义，未必有：$AB = BA$。一般都是 $AB \neq BA$. （参见后面 例1.）

- 特别，矩阵AB 的第 i 行，可以表达为：矩阵A 的第i 行 乘矩阵 B:

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \end{pmatrix} B$$

- AB的第 j 列，可以通过 A 乘 B 的第 j 列得到：

$$A \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix}$$

Example 1

$$A=(1,2,3), B=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$$

解.

$$AB=(10), BA=\begin{pmatrix}3&6&9\\2&4&6\\1&2&3\end{pmatrix}$$

□

矩阵乘法有下列性质：

1. $(AB)C = A(BC)$
2. $A(B+C) = AB + AC, (A+B)C = AC + BC.$
3. $k(AB) = (kA)B = A(kB).$
4. $E_m A_{m\times n} = A_{m\times n} E_n = A_{m\times n}$
5. $0_{p\times m} A = 0_{p\times n}, A 0_{n\times q} = 0_{m\times q}$

- $AB = AC$ 推不出 $B = C$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$AB = AC = 0, B \neq C$$

- 即使$A \neq 0, B \neq 0$，也可能 $AB = 0,$见上一条。

矩阵乘法的重要应用：线性方程组的表达式。

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_1 \\
\cdots\cdots\cdots & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

上面 n 元 m 个线性方程组，可以用矩阵表达：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$AX = B \cdots\cdots (2)$$

或者

$$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

特别的向量矩阵：设

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ldots,e_i=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ldots,e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

设 $A=(a_{ij})_{n\times p}$,

$$e_1'A=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1p}\end{pmatrix}$$
$$e_2'A=\begin{pmatrix}0&1&\cdots&0\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2p}\end{pmatrix}$$
$$\cdots$$
$$e_i'A=\begin{pmatrix}0&\cdots&1&\cdots&0\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{ip}\end{pmatrix}$$
$$\cdots$$

思考题：特殊方阵：

$$
\begin{array}{cc}
E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ i \\ i+1 \\ \vdots \\ n \end{array} \\
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \cdots & j & \cdots & n \end{array} \leftarrow \text{列序数} &
\end{array}
$$

$$E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} E_{il}, k = j \\ 0, k \neq j \end{cases}$$

一般有：注意到 E_{ij} 的第$1,2,..,i-1,i+1,...,n$ 行都是 零向量，第i 行为e'_j,因此

$$
\begin{array}{c}
E_{ij}A = \left(\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
 & & \cdots & & \cdots & \cdots & & \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
 & & \cdots & & \cdots & \cdots & & \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ i \\ i+1 \\ \vdots \\ n \end{array} \\
\quad 1\uparrow \quad 2\uparrow \quad \cdots \quad i\uparrow \quad \cdots \quad j\uparrow \quad \cdots \quad n \leftarrow \text{列序数}
\end{array}
$$

方阵的幂

对于一个方阵 A，可以定义 A 的任意正整数次幂:

$$A^0 = E, A^2 = AA, \cdots, A^{n+1} = A^n A, \cdots$$

- $A^kA^l = A^{k+l}$
- $(A^k)^l = A^{kl}$
- $(AB)^k \neq A^kB^k$

Example 2

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos\theta n & -\sin\theta n \\ \sin\theta n & \cos\theta n \end{pmatrix}$$

归纳法，参见书中证明P33，或本节 ppt 开头介绍。

对于方阵 A 和多项式 $f(x)$，可以定义矩阵多项式：

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\
f(A) &= a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E
\end{aligned}
$$

Example 3

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad f(x) = x^2 - 1
$$

$$
f(A) = A^2 - E = 0
$$

满足 $f(A)=0$ 的多项式 $f(x)$，称为 A 的零化多项式，可以证明这样的多项式一定存在。此外，对于多项式 $f(x), g(x)$，总有

$$f(A)g(A)=g(A)f(A)$$

2.2.5 方阵的行列式与行列式的乘法公式

对于方阵 A，可以定义相应的同价行列式：

定义 2.4

（书中定义 2.5，P31）由 n 阶方阵 A 的元素，按照原来位置构成的行列式，叫做 A 的行列式，记为 $|A|$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

思考题：给定一个 n 阶方阵 A，计算多项式：

$$f(x) = |xE - A|$$

判定多项式 $f(x)$ 的次数，首项系数，常数项。说明这是方阵 A 的零化多项式。

Theorem 2.5

（书中定理2.1，P34） 给定两个同阶方阵A, B, k 是一个数

- $|kA| = k^n|A|$
- $|AB| = |A||B|$

第一条性质，比较简单。第二条性质，后面证明。

注意：虽然有 $AB \neq BA$ ，但是 $|AB| = |BA|$

对于两个同阶方阵，$|AB| = |A||B|$，称为行列式乘法公式。

Example 4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

求 $|2(AB)^5|$

解.

$$|2(AB)^5| = 2^3|(AB)^5| = 8|AB|^5 = 8|A|^5|B|^5$$
$$|A| = -2, |B| = 5, |2(AB)^5| = 8 \times (-2)^5 \times 5^5 = -8 \times 10^5$$

□

Example 5

设 $A=k_1E_n, B=k_2E_n$. 求 $|A|+|B|, |A+B|$

解.

$$|A|+|B|=|k_1E_n|+|k_2E_n|=k_1^n|E_n|+k_2^n|E_n|=k_1^n+k_2^n$$
$$|A+B|=|k_1E_n+k_2E_n|=|(k_1+k_2)E_n|=(k_1+k_2)^n$$

□

- $|A|+|B|\neq|A+B|$
- 即使 AB, BA都有意义，也可能$AB\neq BA$ 但是 $|AB|=|BA|, A, B$是同阶方阵。

矩阵的转置

定义 2.6

（书中定义2.6，P36）设 $m\times n$ 矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

把上述矩阵的行变成列，列变为行，称 $n\times m$ 矩阵

$$A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为 A 的转置矩阵，或记为 A^T.

从元素的角度看：A 的第 i 行第 j 列的元素 $A(i,j)$，成为 A' 的第 j 行第 i 列的元素 $A'(j,i)=A(i,j)$

矩阵转置有下列性质：

- $(A')'=A$
- $(A+B)'=A'+B'$
- $(kA)'=kA'$
- $(AB)'=B'A'$
- $|A'|=|A|$

证明第4条性质：设 A 为 $m\times n$ 矩阵， B 为 $n\times p$ 矩阵。$(AB)'$ 的第 i 行第 j 列的元素记为$(AB)'(i,j)$,等于 AB 的第 j 行第 i 列的元素,记为 $(AB)(j,i)$, 等于A 的第 j 行乘B 的第 i 列：

$$a_{j1}b_{1i}+a_{j2}b_{2i}+\cdots+a_{jn}b_{ni}=(AB)(j,i)$$

再看看 $B'A'$ 的第 i 行第 j 列元素，记为 $(B'A')(i,j)$, 按定义为 B' 的第 i 行乘 A' 的第 j 列，等于 B 的第 i 列乘 A 的第j 行：

$$(B'A')(i,j)=b_{1i}a_{j1}+b_{2i}a_{j2}+\cdots+b_{ni}a_{jn}=$$
$$a_{j1}b_{1i}+a_{j2}b_{2i}+\cdots+a_{jn}b_{ni}=(AB)(j,i)=(AB)'(i,j)$$

所以，$(AB)'=B'A'$

若方阵 A 满足 $A = A'(A = -A')$，称 A 为对称(反对称)矩阵。等价于:$a_{ij} = a_{ji}(a_{ij} = -a_{ji})$. 单位矩阵，对角矩阵都是对称矩阵。对于复数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} & \cdots & \overline{a_{1n}} \\ \overline{a_{21}} & \overline{a_{22}} & \cdots & \overline{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{m1}} & \overline{a_{m2}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{pmatrix}$$

定义 2.7

（书中定义2.7，P37）称 $\overline{A}$ 为 A 的共轭矩阵。令 $A^H = \overline{A}'$，称为 A 的共轭转置矩阵。

1. $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$
2. $\overline{kA} = \overline{k}\ \overline{A}$
3. $\overline{AB} = \overline{A}\ \overline{B}$
4. $|\overline{A}| = \overline{|A|}$

2.3 可逆矩阵

2.3.1 逆矩阵的定义

可逆矩阵

定义 3.1

（书中定义 2.8，P38） 对于 n 阶方阵 A，若存在 n 阶方阵 B，使得 $AB=BA=E$，称 A 是可逆矩阵，称 B 是 A 的逆矩阵。

注意：逆矩阵若存在，则是唯一的。

$$\begin{aligned} BA &= AB=E \\ CA &= AC=E \\ B=BE &= BAC=EC=C \end{aligned}$$

若 A 可逆，则它唯一的逆矩阵记为 A^{-1}

下列性质是明显的

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. A可逆，则 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}, k \neq 0.$
3. 若 A, B 都是同阶可逆矩阵，则 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4. $(A')^{-1} = (A^{-1})'$

验证上面性质4:

$$\begin{aligned}(A^{-1})'A' =&(AA^{-1})' \\ =& E' = E\end{aligned}$$

同理验证：$A'(A^{-1})' = E$,所以：$(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

2.3.2 可逆矩阵判定与求解，伴随矩阵

对于 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$，考虑 a_{ij} 在 $|A|$ 的代数余子式 A_{ij}，由此构造一个新矩阵。

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{1i} & A_{2i} & \cdots & A_{ni} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

特别注意:

1. A^* 的第一列是 $|A|$ 的第一行的代数余子式, A^* 第二列是 $|A|$ 的第二行的代数余子式, 其余类推。
2. A^* 的第一行是 $|A|$ 的第一列的代数余子式, A^* 第二行是 $|A|$ 的第二列的代数余子式, 其余类推。
3. **我们称 A^* 是 A 的伴随矩阵。**

引理 3.2

（书中引理 2.1，P39）对 n 阶方阵 A，有

$$A^*A = AA^* = |A|E$$

Proof.

$$AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{1i} & A_{2i} & \cdots & A_{ni} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

□

Proof.

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix}$$

$$= |A|E$$

□

Theorem 3.3

（书中定理2.2，P40） 对于 n 阶方阵A, A 可逆当且仅当 $|A| \neq 0$。当 $|A| \neq 0, A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$

Proof.

若矩阵 A 可逆，则存在矩阵 B ，满足：

$$AB = E \;\Rightarrow\; |AB| = |A||B| = 1, |A| \neq 0$$

$$\text{反之，若} |A| \neq 0 \;\Rightarrow\; A\frac{1}{|A|}A^* = \frac{1}{|A|}A^*A = E$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$$

□

对于 n 阶方阵 A

1. $|A|=0$ 称 A为奇异矩阵；
2. $|A|\neq 0$，称 A为非奇异矩阵。

Example 6

对 n 阶方阵 A, B, 若 $AB=E$, 则$B=A^{-1}$。

Proof.

$$AB=E \Rightarrow |AB|=1 \Rightarrow |A||B|=1, |A|\neq 0, A\text{可逆}$$

所以

$$AB=E \Rightarrow A^{-1}(AB)=A^{-1}E \Rightarrow B=A^{-1}$$

□

Example 7

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\
|A| &\neq 0 \\
A^{-1} &= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Proof.

□

Example 8

求满足矩阵方程 $AX=B$ 的矩阵 X, 此处:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}8&3\\-5&9\\2&15\end{pmatrix}$$

解.

$|A|\neq 0, A^{-1}$存在。所以,

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{|A|}A^{*}B$$

$\square$

对可逆矩阵A，规定： $A^{-k}=(A^{-1})^{k}$。

2.4 矩阵的初等变换

2.4.1 矩阵初等变换的概念

用加减消元法，解线性方程：

$$\begin{aligned} -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 2 \quad \cdots\cdots(1) \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1 \quad \cdots\cdots(2) \\ 2x_1 + 2x_2 - 8x_3 &= -2 \quad \cdots\cdots(3) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rl} (1) \leftrightarrow (2) & x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \quad \cdots\cdots(1) \\ \longrightarrow & -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2 \quad \cdots\cdots(2) \\ \frac{1}{2} \times (3) & x_1 + x_2 - 4x_3 = -1 \quad \cdots\cdots(3) \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr} (2)+2\times(1) & x_1+2x_2-x_3=-1 & \cdots\cdots(1) \\ \longrightarrow & x_2+2x_3=0 & \cdots\cdots(2) \\ (3)-(1) & -x_2-3x_3=0 & \cdots\cdots(3) \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr} (1)-2\times(2) & x_1-5x_3=-1 & \cdots\cdots(1) \\ \longrightarrow & x_2+2x_3=0 & \cdots\cdots(2) \\ (3)+(2) & -x_3=0 & \cdots\cdots(3) \end{array}$$

得到方程组的解为：

$$x_1=-1, x_2=0, x_3=0$$

上述解方程组的办法，实施了三种变换：

1. 互换两个方程的位置；
2. 用一个非零数乘某一个方程；
3. 把一个方程的倍数加到另一个方程上去；

线性方程组的这三个变换，不改变方程组的解。

以矩阵方式表达上述线性方程：

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}(3)]{(1)\leftrightarrow(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3)-(1)]{(2)+2\times(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3)+(2)]{(1)-2\times(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

定义 4.1

（定义2.9，P43）矩阵的三种初等行变换

1. 对调两行，例如 第 i, j 行对调，记为：$r_i \leftrightarrow r_j$
2. 非零数 k 乘矩阵的某行，例如，非零数 k 乘第 i 行，记为：$k \times r_i$
3. 数乘某一行加到另外一行去，例如，数 k 乘第 j 行加到第 i 行，记为：$r_i + kr_j$

- 相应的行换成列，得到相应的初等列变换，记号中的 r_i 改为 c_i ；
- 初等行或列变换，都称为矩阵的初等变换；
- 矩阵的初等变换是可逆的，例如：$r_i + kr_j$ 的逆变换为：$r_i - kr_j$

注意：

- 由线性方程组对应的矩阵，矩阵的初等行变换，不改变线性方程组的解；
- **如果矩阵 A 经过有限次初等变换，变成矩阵 B ，则称矩阵 A 与矩阵 B 等价。**

矩阵等价有三条性质：自反性，对称性，传递性。

1. 自反性：矩阵与其自身等价；
2. 对称性：若A 与 B 等价，则 B 与 A 等价;
3. 传递性：若A 与 B 等价，若B 与 C 等价, 则 A 与 C 等价.

2.4.2 利用初等变换化简矩阵

形如下列矩阵，称为行阶梯型矩阵：

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

特色：

1. 零元素的行，都在非零元素行的下方；
2. 每行开始都是不间断的零元，个数从上到下严格递增。
3. 零矩阵也可以称为行阶梯形矩阵。
4. 任何矩阵都可以经过初等行变换，化为行阶梯形矩阵。

Example 9

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 6 & 10 \\ 6 & 4 & 6 & 8 & 12 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 - 2r_1]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 - r_3]{(-1)r_2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

一般，对于 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$，总可以通过下列步骤，化为行阶梯形矩阵：

1. 考察第一列元素 $a_{11}, a_{21}, ..., a_{m1}$，看看是否全为零，如果全是零，再考察第二列；
2. 假设第一列不全为零，比如 $a_{i1} \neq 0$, 交换第 i 列和第 1 列；
3. 不妨设 $a_{11} \neq 0$ ，做行变换：$r_i + (-\frac{a_{i1}}{a_{11}})r_1, i = 2, 3, ..., n$, 化为矩阵 B:

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = B$$

对矩阵 B 的右下方矩阵，重复上述过程，就可以逐步得到行阶梯型矩阵。

行最简形矩阵 A:

1. A 是行阶梯型矩阵；
2. A 的非零行，左起第一个非零元素都是 1，且这个 1 所在的列，其它元素都是零。

容易看出来，行阶梯型矩阵，经过第二，三种初等行变换，就可以化为行最简形矩阵。例如，前面例子：

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}r_3]{r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-4r_3]{r_1+3r_3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}r_1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{10}{3} \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

等价标准形矩阵：任何一个矩阵，经过行和列的初等变换，化为等价标准形：

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

注意，左上角是一个单位矩阵 E_r，可以简单表示为：

$$D = \begin{pmatrix} E_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}$$

$$A \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{pmatrix} E_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}$$

1. 任意矩阵都可以通过初等行变换，化为行阶梯型矩阵；
2. 任意矩阵都可以通过初等行变换，化为行最简形矩阵；
3. 任意矩阵都可以通过初等变换，化为标准形矩阵；

- 初等变换具有可逆性， 即 矩阵 A 经过初等变换化为 B，B 也可以通过初等矩阵化为 A。
- 第一种初等变换（交换两行或列），可以用第二，三种初等变换替代；例如交换矩阵的第一行和第二行，$r_1 \leftrightarrow r_2$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & \cdots & a_{1n}+a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-r_1} \begin{pmatrix} a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & \cdots & a_{1n}+a_{2n} \\ -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-1r_2} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

2.5 矩阵的秩

2.5.1 矩阵的秩的概念

任何矩阵都可以经过初等变换，化为标准形：

$$A \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{pmatrix} E_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}$$

问题：这个数 r 是不是唯一确定的？即由矩阵 A 决定，不依赖于初等变换。本节要回答这个问题。

给定矩阵 A，我们定义以下概念：

1. 子矩阵，划掉矩阵的若干行，若干列，剩下元素按照原有次序构成的矩阵；
2. 子方阵，子矩阵当中的方阵，即行数等于列数的子矩阵；
3. 子式：子方阵的行列式。

思考题：矩阵 A 经过初等变换，化为矩阵 B，问 B 的子式与 A 的子式有什么关系？

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

A 的子矩阵,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 9 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

最后一个是子方阵,对应一个3-阶子式: $\begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 9 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix}$

接下来,讨论一下,矩阵初等变换后,子式的变化情况:

根据矩阵行的三种初等变换，以一个5×4 矩阵为例，分情况讨论：

1. 交换两行：$A\to B$, 不妨设交换第1，第2行，

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{pmatrix} \frac{r_1 \leftrightarrow r_2}{A\to B} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{pmatrix}$$

(1).B 的子式，如果不含第 1,2 行，就等于 A 的同阶子式；

$$\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \cdots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix}, 2 < i_1 < i_2 < \cdots < i_k$$

(2). B 的子式，如果含第 1,2 行中的某行，比如第二行（等于A 的第一行），就等于 A 的同阶子式；

$$\begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \cdots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix}, 2 = i_1 < i_2 < \cdots < i_k$$

(3) B 的子式，如果同时含第 $1,2$ 行，就等于 A 的同阶子式交换第一和第二行；

$$\begin{vmatrix} a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_k} \\ a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \cdots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix}, 1 = i_1 < 2 = i_2 < \cdots < i_k$$

2. 矩阵 A 的某一行乘非零数 k, $A \xrightarrow{ar_i} B$,不妨设 $i=2$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{pmatrix} \xrightarrow{kr_2} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & ka_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{pmatrix}$$

1. B 的子式，如果不含第 2 行，就等于 A 的同阶子式;
2. B 的子式，如果含第 2行，就等于 A 的同阶子式乘 k;

3. 第 j 行乘数 a 加到第 i 行(不妨设$i=2, j=5$): $A \to B$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{pmatrix}$$

$$\frac{r_2 + ar_5}{B =} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21}+aa_{51} & a_{22}+aa_{52} & a_{23}+aa_{53} & a_{24}+aa_{54} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{pmatrix}$$

1. B 的子式，如果不含第 2 行，就等于 A 的同阶子式；

$$\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \cdots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix}, 2 \notin i_1 < i_2 < \cdots < i_k$$

1. B 的子式，如果同时含第 2,5行，就等于 A 的某个同阶子式经过行变换得到，还是等于A 的同阶子式；例如后4行4列

$$\begin{vmatrix} a_{21}+aa_{51} & a_{22}+aa_{52} & a_{23}+aa_{53} & a_{24}+aa_{54} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{vmatrix}$$

1. B 的子式，如果不含第 5行，但是含第 2行，就等于 A 的某个同阶子式加上另一个A 的同阶子式的a倍（差一个正负号）；例如前4 行4 列，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21}+aa_{51} & a_{22}+aa_{52} & a_{23}+aa_{53} & a_{24}+aa_{54} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

结论：矩阵 A 经过行（列）初等变换，化为矩阵 B 后，则 B 的子式是 A的同阶子式的线性表示：即B的子式是A 的同阶子式经过数乘和加法得到的。 由于初等变换是可逆的，所以，A 的子式也是 B的同阶子式的线性表示.

一个矩阵 A，最重要的是 A 的最大阶的子式。

定义 5.1

(书中定义 2.10，P47) 矩阵 A 的非零子式中，阶数最大的阶，叫做矩阵 A 的秩，记为：$R(A)$

零矩阵的秩记为 0。例如，考察以下矩阵的秩：

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&2&2&2\\3&3&3&3\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&5\\2&2&2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}$$

$$R(A)=1, R(B)=2, R(C)=2$$

对 $m \times n$ 矩阵 A 以下性质是明显的:

1. $A = (a_{ij})_{m \times n}, R(A) \leq \min\{m, n\}$
2. $R(A) = R(A')$
3. $R(A_1) \leq R(A), A_1$ 是 A 的子矩阵

（书中定理2.3）

Theorem 5.2

（书中定理 *2.3*，*P48*） 初等变换不改变矩阵的秩。

Proof.

第一种初等变换可以由第二，三种完成。所以，只需对第二，三种初等变换证明。
第二种初等变换容易证明，因为变换前后的子式，相差一个非零乘数。以下考虑第三种初等变换。
证明的关键，就是说明：矩阵 A 与矩阵 B 的同阶子式可以互相线性表示，前面以第一，二行的变换为例，我们已经证明了这个性质。现在我们就一般情况来证明。以下假定矩阵 A 是 $m\times n$ 矩阵。

□

假设：$i \le j$

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{r_i + kr_j}$$

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & a_{i2} + ka_{j2} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = B$$

假设矩阵 A 的秩为 r，即 $R(A)=r$，我们要证明：

$$R(B) \leq r = R(A).$$

根据矩阵的秩的定义，只需要证明 B 的所有 $s \geq r+1$ 阶子式皆为零。比较矩阵 A 与 B，差别仅在第 i 行，所以我们分情况讨论：

- B 的 s 阶子式 D_s，不含第 i 行，则这个子式也是 A 的 s 阶子式，因此 D_s 为零；

$$\begin{vmatrix} a_{\mu_1\nu_1} & a_{\mu_1\nu_2} & \cdots & a_{\mu_1\nu_s} \\ a_{\mu_2\nu_1} & a_{\mu_2\nu_2} & \cdots & a_{\mu_2\nu_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mu_s\nu_1} & a_{\mu_s\nu_2} & \cdots & a_{\mu_s\nu_s} \end{vmatrix}$$

$$\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_s \in \{1, 2, ..., m\} - \{i\}$$

- B 的 s 阶子式 D_s，含第 i 行，不含第 j 行，则 D_s 可以分解为 A 的一个 s 阶子式和另外一个 s 子式（经过行交换可以变为A的子式,例如， $a_{j\nu_1}, \dots, a_{j\nu_s}$要按照矩阵 A的行顺序移动， 或者本身已经是 A 的子式）的 k 倍之和，因此 D_s 为零；

$$\begin{vmatrix} a_{\mu_1\nu_1} & a_{\mu_1\nu_2} & \cdots & a_{\mu_1\nu_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i\nu_1}+ka_{j\nu_1} & a_{i\nu_2}+ka_{j\nu_2} & \cdots & a_{i\nu_s}+ka_{j\nu_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mu_s\nu_1} & a_{\mu_s\nu_2} & \cdots & a_{\mu_s\nu_s} \end{vmatrix}$$

$$\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_s \in \{1, 2, \dots, m\} - \{j\}, i \in \{\mu_1, \dots, \mu_s\}$$

- B 的 s 阶子式 D_s，含第 i 行，同时含第 j 行，则 D_s 可以分解为 A 的一个 s 阶子式和另外一个 s 子式（有两行相同）的 k 倍之和，因此 D_s 为零。

$$\begin{vmatrix} a_{\mu_1\nu_1} & a_{\mu_1\nu_2} & \cdots & a_{\mu_1\nu_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i\nu_1}+ka_{j\nu_1} & a_{i\nu_2}+ka_{j\nu_2} & \cdots & a_{i\nu_s}+ka_{j\nu_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j\nu_1} & a_{j\nu_2} & \cdots & a_{j\nu_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mu_s\nu_1} & a_{\mu_s\nu_2} & \cdots & a_{\mu_s\nu_s} \end{vmatrix}$$

$\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_s$

总结以上推理，矩阵 B 的任何 s 阶子式必定是矩阵 A 的 s 阶子式的线性组合。既然 A 的所有 $s \geq r+1$ 阶子式为零，所以 B 的所有 $s \geq r+1$ 阶子式为零. 因此 $R(B) \leq r = R(A)$. 又因为矩阵 B 也可以经过初等变换，化为 A。同样道理，有：$R(A) \leq R(B)$.

注意到等价标准形矩阵：

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其秩为 r。所以有结论：$m \times n$矩阵 A 的秩为 r，当且仅当矩阵 A 可以经过初等变换化为标准形：

$$\begin{pmatrix} E_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}$$

2.5.2 求矩阵秩的方法

根据前面的知识，我们可以归纳一下求矩阵的秩：

1. 通过初等初等行变换化为行阶梯型矩阵；
2. 非零行的个数等于矩阵的秩。

只进行初等行变换

Example 10

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -6 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵 A 的秩为 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -6 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - 3r_1]{r_2 - 2r_1, r_3 + r_1,} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2, r_4 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2^{-1}r_3, -1r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

既然矩阵的秩不大于矩阵的行数或列数，所以有：

1. 列满秩矩阵：矩阵的秩等于矩阵的列数；
2. 行满秩矩阵：矩阵的秩等于矩阵的行数；
3. 满秩矩阵：一个 n 阶方阵 A，矩阵的秩等于 n。
4. 特别，方阵 A 是满秩矩阵，按定义，当且仅当 $|A| \neq 0.$
5. 方阵 A 是满秩矩阵 $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ 可逆。

如果进行初等变换，化为等价标准形：$A=(a_{ij})_{m\times n}$

- 列满秩矩阵：$A\rightarrow\begin{pmatrix}E_n\\0_{(m-n)\times n}\end{pmatrix}$
- 行满秩矩阵：$A\rightarrow\begin{pmatrix}E_m & 0_{m\times(n-m)}\end{pmatrix}$
- 满秩矩阵：$A\rightarrow E_n$

2.6 初等矩阵

2.6.1 初等矩阵的概念

初等矩阵来源于初等变换，我们要建立初等变换与初等矩阵的对应关系。

（书中定义 2.11，P50）

定义 6.1

单位矩阵经过一次初等变换得到的方阵，称为初等矩阵。

依据初等变换，初等矩阵分三种：

- 单位矩阵交换两行（列），第 i 行（列）和第 j 行（列）交换：

$$E(i,j)=\begin{pmatrix}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 0 && \cdots && 1 &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& 1 && \cdots && 0 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{pmatrix}$$

- 单位矩阵第 i 行（列）乘于非零数 k：

$$E(i(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

- 单位矩阵第 j 行乘于数 k, 加到第 i 行:

$$E(i,j(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

注意：等于第 i 列乘数 k ，加到第 j 列。

2.6.2 初等矩阵的性质

（1）初等矩阵都是可逆矩阵，而且逆矩阵还是初等矩阵：

$$\begin{aligned} E(i,j)^{-1} &= E(i,j) \\ E(i(k))^{-1} &= E(i(\frac{1}{k})), k \neq 0 \\ E(i,j(k))^{-1} &= E(i,j(-k)) \end{aligned}$$

直接验证。

（2）初等矩阵的转置还是初等矩阵：

$$
\begin{aligned}
E(i,j)' &= E(i,j) \\
E(i(k))' &= E(i(k)), k \neq 0 \\
E(i,j(k))' &= E(j,i(k))
\end{aligned}
$$

直接验证。

(3) 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，对矩阵 A 施行行变换，等价于左乘相应的初等矩阵；对矩阵 A 施行列变换，等价于右乘相应的初等矩阵。

$$E(i,j)A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

注意到：$E(i,j)$ 的第 i 行是：

$$\begin{array}{c} e_j' = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ \quad\quad 1 \quad \cdots \quad i \quad \cdots \quad j\text{列} \quad \cdots \quad n \end{array}$$

分别乘 A 的第 $1,2,...,n$列就得到$E(i,j)A$的第 i 行：

$$\begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \end{pmatrix} = e_j' A$$

注意到：$E(i,j)$ 的第 j 行是：

$$\begin{array}{rl} e_i' = & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ & \;\;\, 1 \quad \cdots \quad i\text{列} \quad \cdots \quad j \quad \cdots \quad n \end{array}$$

分别乘 A 的第 $1,2,...,n$列就得到$E(i,j)A$的第 j 行：

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} = e_i'A$$

此外，$E(i,j)$的其它行：第 $k \neq, i, j$ 行就是 e_k'，乘 矩阵 A 第 $1,2,...,n$ 列，得到$E(i,j)A$ 的第 k 行还是 A的第 k 行。

$$E(i(k))A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$E(i,j(k))A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

注意 $E(i,j(k))$ 的第 i 行是

$$e_i' + ke_j'$$

所以 $E(i,j(k))A$的第 i 行由下式决定：

$$
\begin{aligned}
&(e_i'+ke_j')A=e_i'A+ke_j'A \\
&=\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \end{pmatrix} \\
&=\begin{pmatrix} a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$E(i,j(k))$ 的其它行，第$t\neq i$ 都是 e_t'，所以 $E(i,j(k))A$的第t 行是

$$e_t'A=\begin{pmatrix} a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \end{pmatrix}$$

总结一下初等变换与初等矩阵的关系：

(1) 第一类初等变换

$$A \to E(i,j)A \Leftrightarrow A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} \to B = E(i,j)A$$

$$A \to AE(i,j) \Leftrightarrow A \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} \to B = AE(i,j)$$

(2) 第二类初等变换

$$A \to E(i(k))A \Leftrightarrow A \xrightarrow{kr_i} \to B = E(i(k))A$$

$$A \to AE(i(k)) \Leftrightarrow A \xrightarrow{kc_i} \to B = AE(i(k))$$

(3) 第三类初等变换

$$A \to E(i,j(k))A \Leftrightarrow A \xrightarrow{r_i + kr_j} B = E(i,j(k))A$$

$$A \to AE(i,j(k)) \Leftrightarrow A \xrightarrow{c_j + kc_i} B = AE(i,j(k))$$

特别注意：

1. 左乘初等矩阵，对应初等行变换；右乘初等矩阵，对应初等列变换。
2. 左乘 $E(i,j(k))$，是把第 j 行的 k倍，加到第 i行；右乘 $E(i,j(k))$，是把第 i 列的 k 倍，加到第 j 列；

2.6.3 矩阵等价的充要条件

Theorem 6.2

（书中定理2.4，P52） n 阶矩阵 A 可逆，当且仅当存在有限个初等矩阵 $P_1, P_2, ..., P_k$，使得

$$A = P_1P_2 \cdots P_k.$$

Proof.

充分性显然。必要性：矩阵 A 可逆，则矩阵 A 的秩为 n. 经过初等行和列变换，矩阵 A 可以变为单位矩阵 E。 因为初等变换是可逆的，也等价于单位矩阵经过初等行和列变换，化为矩阵 A。根据初等变换与初等矩阵的对应关系，存在初等矩阵：$P_1, ..., P_l, P_{l+1}, ..., P_k$，使得

$$P_1 \cdots P_l E P_{l+1} \cdots P_k = A$$

因此有：

$$A = P_1 \cdots P_l P_{l+1} \cdots P_k$$

推论 6.3

（书中推论 2.1,P53） 两个 $m \times n$ 矩阵 A 与 B 等价的充分必要条件是：存在 m 阶可逆矩阵P 和n 阶可逆矩阵 Q，使得：$PAQ = B$. 特别，存在可逆矩阵 P, Q, 使得：$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 这里$r = R(A)$.

Proof.

充分性：即存在 m 阶可逆矩阵P 和n 阶可逆矩阵 Q，使得：$PAQ = B$. 根据前面定理，可逆矩阵 P 和 Q 分别表示成初等矩阵的乘积：

$$P = P_1 \cdots P_s, Q = Q_1 \cdots Q_t$$

所以有：

$$P_1 \cdots P_s A Q_1 \cdots Q_t = B$$

因此，矩阵 A 与 B 等价。 必要性显然。 □

如果只考虑初等行变换，或者只考虑初等列变换，就有：

1. 矩阵 A 经过初等行变换化为 B，当且仅当：存在可逆矩阵 P，使得 $PA = B$.
2. 矩阵 A 经过初等列变换化为 B，当且仅当：存在可逆矩阵 Q，使得 $AQ = B$.

推论 6.4

（书中推论 2.2,P53） 对于 $m \times n$ 阶矩阵 A，m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q，有：

$$R(A) = R(PA) = R(AQ) = R(PAQ)$$

Proof.

这是因为可逆矩阵是初等矩阵的乘积，而初等矩阵对应的初等变换，不改变矩阵的秩。 □

推论 6.5

（书中推论 2.3, P53） 对于可逆矩阵 A，经过初等行变换，可以化为单位矩阵。

Proof.

由定理6.2，矩阵 A 可以表达为初等矩阵的乘积：

$$A = P_1 P_2 \cdots P_k = P_1 P_2 \cdots P_k E$$

因此有，

$$P_k^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1} A = E$$

□

2.6.4 初等变换求可逆矩阵的逆矩阵

对于可逆矩阵 A，假设经过初等行变换：

$$P_1, P_2, \ldots, P_s$$

$$P_1P_2\cdots P_sA = E \cdots\cdots (5)$$

$$\Rightarrow P_1P_2\cdots P_sE = A^{-1} \cdots\cdots (6)$$

等式（5）和（6）说明，相同的初等变换$P_1, P_2, \ldots, P_s$，同时把矩阵 A 化为单位矩阵 E 和把单位矩阵 E 化为 A^{-1}。

$$\begin{aligned} (A, E)_{n\times 2n} &\xrightarrow[P_1,P_2,\ldots,P_s]{\text{初等行变换}} \\ P_1P_2\cdots P_s(A, E) &= (P_1P_2\cdots P_sA, P_1P_2\cdots P_sE) \\ &= (E, A^{-1}) \end{aligned}$$

求以下矩阵的逆矩阵

Example 11

$$D=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&1&0&0\\2&3&1&0&1&0\\3&1&2&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&1&0&0\\0&-1&-5&-2&1&0\\0&-5&-7&-3&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-7&-3&2&0\\0&-1&-5&-2&1&0\\0&0&18&7&-5&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{5}{18}&\frac{1}{18}&\frac{7}{18}\\0&1&0&\frac{1}{18}&\frac{7}{18}&-\frac{5}{18}\\0&0&1&\frac{7}{18}&-\frac{5}{18}&\frac{1}{18}\end{pmatrix}$$

Example 12

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

对可逆矩阵A 和矩阵 B，上面的矩阵 (A,E) 换成 (A,B)，有

$$\begin{aligned}(A,B) &\xrightarrow[P_1,P_2,\ldots,P_s]{\text{初等行变换}} \\ P_1P_2\cdots P_s(A,B) &= (P_1P_2\cdots P_sA, P_1P_2\cdots P_sB) \\ &= (E, A^{-1}B)\end{aligned}$$

如果考虑初等列变换，上面的求可逆矩阵A的逆矩阵变为：

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}_{2n\times n} P_1\cdots P_s \\
&= \begin{pmatrix} AP_1\cdots P_s \\ EP_1\cdots P_s \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Example 13

利用列变换，求逆矩阵

$$D=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&-5\\3&-5&-7\\1&-2&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\-7&-5&18\\-3&-2&7\\2&1&-5\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \\ -\frac{5}{18} & \frac{1}{18} & 7 \\ \frac{1}{18} & -\frac{7}{18} & -5 \\ \frac{7}{18} & -\frac{5}{18} & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{5}{18} & \frac{1}{18} & \frac{7}{18} \\ \frac{1}{18} & \frac{7}{18} & -\frac{5}{18} \\ \frac{7}{18} & -\frac{5}{18} & \frac{1}{18} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E \\ D^{-1} \end{pmatrix}$$

Example 14

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{c_2-c_1,\,c_3-c_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\\1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3 - c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

矩阵求逆的推广

我们将矩阵求逆的快速方法推广到下面三种情况，解矩阵方程：设 A为 n阶可逆矩阵, B 为m 阶可逆矩阵,

1. $AX = C$
2. $XB = C$
3. $AXB = C$

1. $AX=C, X=A^{-1}C$

$$\begin{pmatrix} A & C \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} E & A^{-1}C \end{pmatrix}$$

原理:

$$P(A,C)=(PA,PC)=(E,A^{-1}C), P=A^{-1}$$

2. $XB=C, X=CB^{-1}$

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ CB^{-1} \end{pmatrix}$$

原理:

$$\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} Q=\begin{pmatrix} BQ \\ CQ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E \\ CB^{-1} \end{pmatrix}, Q=B^{-1}$$

3 $AXB = C, X = A^{-1}CB^{-1}$

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{初等行变换}]{\text{前}n\text{行}} \begin{pmatrix} E & A^{-1}C \\ 0 & B \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{初等列变换}]{\text{后m列}} \begin{pmatrix} E & A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

原理：

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} PA & PAQ \\ 0 & BQ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

2.7 分块矩阵的概念与计算

2.7.1 分块矩阵的概念

一个矩阵，通过一些横线，竖线，分成若干小块，每一个小块看作一个阶数更小的矩阵，叫做矩阵的分块：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc:ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

- 一般，$m \times n$ 矩阵 A，行分成：$m_1 + m_2 + \cdots + m_s = m$，列分成：$n_1 + n_2 + \cdots + n_t = n$.
- $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}$

分块上三角矩阵和分块下三角矩阵：

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{ss} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{ss} \end{pmatrix}$$

分块对角矩阵：

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{ss} \end{pmatrix}$$

准对角矩阵，其中每一个分块矩阵是方阵：

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{ss} \end{pmatrix}$$

2.7.2 分块矩阵的计算

引入几个常用符号：对于 $m \times n$ 矩阵 A，有常用分块：

1. n 个列向量排列：$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \end{pmatrix}$
2. m 个行向量排列：$\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{m1} \end{pmatrix}$

- 加法与数乘：两个矩阵的行数相等，列数相等，分块方式相同，则可以相加和数乘，方法为对应的分块矩阵相加和数乘。

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{t1} & A_{t2} & \cdots & A_{ts} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & B_{t2} & \cdots & B_{ts} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1s}+B_{1s} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2s}+B_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{t1}+B_{t1} & A_{t2}+B_{t2} & \cdots & A_{ts}+B_{ts} \end{pmatrix}$$

数乘类似。

- 分块矩阵的乘法：假设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times p$ 矩阵。A 的列的分块法与矩阵 B 的行的分块法相同：

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{t2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & B_{t2} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & C_{s2} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}, C_{ij}=\sum_{k=1,\ldots,t} A_{ik}B_{kj}$$

矩阵乘法中，常见的几种重要分块法：$A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{n\times p}$,请特别注意 第1，2，5，6 这四种表达方法。

（1） 矩阵 A 自身看作一块(1×1)，矩阵 B为p个列向量的排列$(1\times p)$：

$$\begin{aligned} AB &= A\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1p} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} AB_{11} & AB_{12} & \cdots & AB_{1p} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB_{11} & AB_{12} \end{pmatrix}$$

（2） A 看作 m个行向量的排列$(m\times 1)$，矩阵 B 自身为一块(1×1):

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{m1} \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} A_{11}B \\ A_{21}B \\ \vdots \\ A_{m1}B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} A_{11}B \\ A_{21}B \end{pmatrix}$$

（3） A 看作 m个行向量的排列$(m\times 1)$，矩阵 B 为列向量排列$(1\times p)$：

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{m1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1p} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} & \cdots & A_{11}B_{1p} \\ A_{21}B_{11} & A_{21}B_{12} & \cdots & A_{21}B_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1}B_{11} & A_{m1}B_{12} & \cdots & A_{m1}B_{1p} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & A_{1} \\ A_{21}B_{11} & A_{2} \end{pmatrix}$$

（4） 第一个矩阵 A 表达为列向量排列$(1 \times n)$，第二个矩阵 B 表达为行向量排列$(n \times 1)$：

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ \vdots \\ B_{n1} \end{pmatrix} \\
&= A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + \cdots + A_{1n}B_{n1} \\
&= (a_{i1}b_{1j}) + (a_{i2}b_{2j}) + \cdots + (a_{in}b_{nj})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ B_{31} \end{pmatrix} \\
&= A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31}
\end{aligned}
$$

（5）第一个矩阵 A 表达为列向量排列$(1\times n)$，第二个矩阵 B 不分块$(n\times p)$：

$$AB=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

$$=(A_{11}b_{11}+A_{12}b_{21}+\cdots+A_{1n}b_{n1},A_{11}b_{12}+A_{12}b_{22}+\cdots+A_{1n}b_{n2},\\ \cdots,A_{11}b_{1p}+A_{12}b_{2p}+\cdots+A_{1n}b_{np})$$

这个分块法，本质上和第一种一样：

$$A_{11}b_{11} + A_{12}b_{21} + \cdots + A_{1n}b_{n1} =$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = AB_{11}$$

$$A_{11}b_{12} + A_{12}b_{22} + \cdots + A_{1n}b_{n2} =$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{pmatrix} = AB_{12}$$

$$\cdots\cdots$$

$$A_{11}b_{1p} + A_{12}b_{2p} + \cdots + A_{1n}b_{np} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1p} \\ b_{2p} \\ \vdots \\ b_{np} \end{pmatrix} = AB_{1p}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} A_{11} + 2A_{12} + 3A_{13} & 2A_{11} + 3A_{12} + A_{13} \end{pmatrix}$$

由此可见，矩阵 AB 的列是 A 的列的线性组合，组合系数来自于 B 的列向量。

(6) 第一个矩阵 A 不分块$(m \times n)$, 第二个矩阵 B 分块为行向量排列$(n \times 1)$:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ \vdots \\ B_{n1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}B_{11} + a_{12}B_{21} + \cdots + a_{1n}B_{n1} \\ a_{21}B_{11} + a_{22}B_{21} + \cdots + a_{2n}B_{n1} \\ \vdots \\ a_{m1}B_{11} + a_{m2}B_{21} + \cdots + a_{mn}B_{n1} \end{pmatrix}$$

这个分块法，本质上和第二种分法相同：

$$a_{11}B_{11}+a_{12}B_{21}+\cdots+a_{1n}B_{n1}=$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ \vdots \\ B_{n1} \end{pmatrix}=A_{11}B$$

$$a_{21}B_{11}+a_{22}B_{21}+\cdots+a_{2n}B_{n1}=$$

$$\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ \vdots \\ B_{n1} \end{pmatrix}=A_{21}B$$

$$\cdots\cdots$$

由此可以看出，矩阵 AB 的行是 B 的行的线性组合，组合系数来自于前面矩阵 A 的行元素。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ B_{31} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B_{11} + 2B_{21} + 3B_{31} \\ 2B_{11} + 3B_{21} + B_{31} \end{pmatrix}$$

由此可见，矩阵 AB 的行是 B 的行的线性组合,组合系数来自于 A 的行向量。

$n \times n$ 单位矩阵 E 可以依照列分块为：

$$E = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Ae_j = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \end{pmatrix} e_j = A_{1j}$$

$$e_i'A = e_i' \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{n1} \end{pmatrix} = A_{i1}$$

$$e_i'Ae_j = a_{ij}$$

线性方程组的表达：

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

$$A = (a_{ij})_{m\times n}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$AX = B$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$x_1 A_{11} + x_2 A_{12} + \cdots + x_n A_{1n} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

- 分块矩阵的幂

对于 n 阶方阵 A，行与列的分法相同，则可以依照分块矩阵计算矩阵的幂：

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{ss} \end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{s} A_{1k}A_{k1} & \sum_{k=1}^{s} A_{1k}A_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{s} A_{1k}A_{ks} \\ \sum_{k=1}^{s} A_{2k}A_{k1} & \sum_{k=1}^{s} A_{2k}A_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{s} A_{2k}A_{ks} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^{s} A_{sk}A_{k1} & \sum_{k=1}^{s} A_{sk}A_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{s} A_{sk}A_{ks} \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\2&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}&E_2\\0&E_2\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}A_{11}&E_2\\0&E_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11}&E_2\\0&E_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}A_{11}^2&A_{11}+E_2\\0&E_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&4&2&2\\4&5&2&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

分块原则：尽量把零矩阵，分成一块。

- 分块矩阵的转置

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{ss} \end{pmatrix}$$

$$A'=\begin{pmatrix} A'_{11} & A'_{21} & \cdots & A'_{s1} \\ A'_{12} & A'_{22} & \cdots & A'_{s2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A'_{1s} & A'_{2s} & \cdots & A'_{ss} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & E_2 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} A'_{11} & 0 \\ E'_2 & E'_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ E_2 & E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

特别，常用的转置：行变列，列变行：

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} A'_{11} \\ A'_{12} \\ \vdots \\ A'_{1n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{m1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} A'_{11} & A'_{21} & \cdots & A'_{m1} \end{pmatrix}$$

- 分块矩阵的行列式：A 是方阵，主对角线的分块矩阵都是方阵，
  上三角型：

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{ss} \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{ss} \end{vmatrix} = |A_{11}||A_{22}|\cdots|A_{ss}|$$

下三角型：

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{ss} \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{ss} \end{vmatrix}=|A_{11}||A_{22}|\cdots|A_{ss}|$$

对角型：

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{ss} \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{ss} \end{vmatrix}=|A_{11}||A_{22}|\cdots|A_{ss}|$$

- 分块矩阵的逆矩阵

设 $A_1, A_2, \ldots, A_s$ 都是可逆矩阵，则有

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s^{-1} \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & & & A_1 \\ 0 & & A_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_s & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & & A_s^{-1} \\ 0 & A_{s-1}^{-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^{-1} & & 0 \end{pmatrix}$$

Example 15

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$|A| = |A_{11}||A_{22}| = -9$$

等价标准型矩阵的应用：

Example 16

设 $m \times n$矩阵 A 的秩为 r ，则矩阵 A 可以表达为一个列满秩矩阵和行满秩矩阵的乘积.

解.

根据已知条件，存在可逆矩阵 P, Q ，满足下式：

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r \\ 0_{(m-r)\times r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r & 0_{r\times(n-r)} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = P^{-1} \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} = B_1 B_2$$

$$B_1 = P^{-1} \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} E_r & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

□

注意到：B_1 是 $m\times r$ 矩阵，其秩 $R(B_1)=r$，列满秩矩阵；B_2 是 $r\times n$ 矩阵，其秩 $R(B_2)=r$，行满秩矩阵。结论证毕。

Example 17

证明 $R(AB)\leq\min\{R(A),R(B)\}$

解.

设$R(A)=r$,存在可逆矩阵 P,Q,满足：

$$PAQ=\begin{pmatrix} E_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0 \end{pmatrix}$$

$$PAB=PAQQ^{-1}B=\begin{pmatrix} E_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}B$$

□

Let $Q^{-1}B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$,then

$$PAB = \begin{pmatrix} E_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}B$$

$$= \begin{pmatrix} E_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R(AB) = R(PAB) = R\begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} = R(B_1) \leq r$$

再设矩阵 B 是 $n \times p$ 矩阵，其秩为 $R(B) = r$.

存在可逆矩阵 P, Q ，满足：

$$PBQ = \begin{pmatrix} E_r & 0_{r\times(p-r)} \\ 0_{(n-r)}\times r & 0 \end{pmatrix}$$

$$ABQ = AP^{-1}PBQ = AP^{-1}\begin{pmatrix} E_r & 0_{r\times(p-r)} \\ 0_{(n-r)}\times r & 0 \end{pmatrix}$$

$$AP^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix},$$

$$ABQ = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & 0_{r\times(p-r)} \\ 0_{(n-r)}\times r & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R(AB) = R(ABQ) = R\begin{pmatrix} A_1 & 0 \end{pmatrix} = R(A_1) \leq r$$

2.8 分块矩阵的初等变换

2.8.1 分块矩阵初等变换的概念

分块矩阵的三种初等变换:

1. 交换分块矩阵的某两行（列）；
2. 用可逆矩阵 P 左乘（右乘）分块矩阵的某行（列）
3. 用矩阵 K 左乘（右乘）分块矩阵的某行（某列），加到另外一行（列）去;

必须注意，以上运算应当是可行的，即符合矩阵的运算规则。

1. 单位矩阵行列分法相同，分块后得到的矩阵，叫做分块单位矩阵：对角线上都是方阵（单位矩阵）：

$$E = \begin{pmatrix} E_1 & & & \\ & E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_s \end{pmatrix}$$

分块单位矩阵，经过三种初等变换（行或者列），得到三种初等分块矩阵：

(1)第一种分块初等矩阵：交换两块行：

$$\begin{pmatrix} E_1 & & & \\ & & E_j & \\ & E_i & & \\ & & & E_s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_1 & & & \\ & & E_i & \\ & E_j & & \\ & & & E_s \end{pmatrix}$$

(2)第二种分块初等矩阵：某块行乘可逆矩阵

$$\begin{pmatrix} E_1 & & \\ & P & \\ & & E_s \end{pmatrix}, P\text{可逆矩阵}$$

(3)第三种分块初等矩阵：某块行（或列）乘矩阵，加到另外一块行（列）

$$\begin{pmatrix} E_m & 0_{m\times n} \\ 0_{n\times m} & E_n \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行变换}]{r_2+K_{n\times m}r_1} \begin{pmatrix} E_m & 0_{m\times n} \\ K_{n\times m} & E_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_m & 0_{m\times n} \\ 0_{n\times m} & E_n \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{列变换}]{c_1+c_2K_{n\times m}} \begin{pmatrix} E_m & 0_{m\times n} \\ K_{n\times m} & E_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_m & 0_{m\times n} \\ 0_{n\times m} & E_n \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行变换}]{r_1 + K_{m\times n} r_2} \begin{pmatrix} E_m & K_{m\times n} \\ 0_{n\times m} & E_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_m & 0_{m\times n} \\ 0_{n\times m} & E_n \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{列变换}]{c_2 + c_1 K_{m\times n}} \begin{pmatrix} E_m & K_{m\times n} \\ 0_{n\times m} & E_n \end{pmatrix}$$

左乘分块初等矩阵，对应相应的初等行变换；右乘分块初等矩阵，对应相应的初等列变换

（1）交换行或列

$$\begin{pmatrix} 0 & E_m \\ E_n & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{n\times n} & C_{n\times m} \\ D_{m\times n} & B_{m\times m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & B \\ A & C \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_{n\times n} & C_{n\times m} \\ D_{m\times n} & B_{m\times m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_m & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & A \\ B & D \end{pmatrix}$$

(2) 某一行乘可逆矩阵，或某一列乘可逆矩阵。

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PA & PC \\ D & B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AP & C \\ DP & B \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2\vdots & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1\vdots & 0 & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0\vdots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1\vdots & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0\vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PA & PB \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$A=\left(\begin{array}{cc:ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AP & B \\ CP & D \end{pmatrix}$$

(3) 某一行乘矩阵 K 加到另一行，或某一列矩阵 K，加到另一列：

$$\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ K & E_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{n\times n} & B \\ C & D_{m\times m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C+KA & D+KB \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_{n\times n} & B \\ C & D_{m\times m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ K & E_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+BK & B \\ C+DK & D \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

分别考虑矩阵 A 可逆，或 D 可逆，得到下面两个等式：

$$\begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ -CA^{-1} & E_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ -D^{-1}C & E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

思考题：上面两个等式，两边取矩阵的行列式，可以得到什么计算公式？

对分块矩阵进行以上初等变换，有下列性质：

- 对 $s \times n$ 矩阵 A， $s \times m$ 矩阵 B，满足：$n + m = s$，有：

$$|A \vdots B| = (-1)^{mn} |B \vdots A|$$

- 对分块矩阵进行分块初等变换，不改变分块矩阵的秩；
- 对分块方阵进行第三类分块初等变换，不改变这个分块方阵的行列式的值。假设 A, D 分别可逆，

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ 0 & D \end{vmatrix}$$

所以有：

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} &= |A||D - CA^{-1}B| \\ &= |A - BD^{-1}C||D|\end{aligned}$$

结论: 假设有可逆方阵 A 和 D, 则有：

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D - CA^{-1}B| = |A - BD^{-1}C||D|$$

(4)如果 A, D 为方阵，且

$$\begin{pmatrix} A & B & E_m & 0 \\ C & D & 0 & E_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} E_m & 0 & A_1 & B_1 \\ 0 & E_n & C_1 & D_1 \end{pmatrix}$$

则有

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A & E \\ E & D \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E & -A \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & E & E & 0 \\ E & D & 0 & E \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & E-AD & E & -A \\ E & D & 0 & E \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} E & D & 0 & E \\ 0 & E-AD & E & -A \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(E-AD)^{-1}r_2}\begin{pmatrix} E & D & 0 & E \\ 0 & E & (E-AD)^{-1} & -(E-AD)^{-1}A \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-Dr_2}\begin{pmatrix} E & 0 & -D(E-AD)^{-1} & E+D(E-AD)^{-1}A \\ 0 & E & (E-AD)^{-1} & -(E-AD)^{-1}A \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} -D(E-AD)^{-1} & E+D(E-AD)^{-1}A \\ (E-AD)^{-1} & -(E-AD)^{-1}A \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B=C=E, D=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E-AD=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(E-AD)^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}-2&3\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$-D(E-AD)^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$$

$$E+D(E-AD)^{-1}A=E+\begin{pmatrix}-1&1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1\\-3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&1\end{pmatrix}$$

$$-(E-AD)^{-1}A=-\begin{pmatrix}2&-3\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix}-4&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Example 18

证明行列式乘法公式：A, B都是 n 阶方阵

$$|AB| = |A||B|$$

Proof.

$$|AB| = \begin{vmatrix} AB & 0 \\ B & E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -A \\ B & E \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n^2} \begin{vmatrix} B & E \\ 0 & -A \end{vmatrix} = (-1)^{n^2+n} \begin{vmatrix} B & E \\ 0 & A \end{vmatrix}$$

$$= |B||A| = |A||B|$$

$\square$

Example 19

（书中例16） A 是 n 阶可逆方阵，D 是 m 阶方阵，证明：

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D - CA^{-1}B|$$

Proof.

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{vmatrix} \\ &= |A||D - CA^{-1}B| \end{aligned}$$

□

特别，当 $n=m, AC=CA$, 则有：

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D-CA^{-1}B| = |AD-CB|$$

Example 20

（书中例17） 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，$m>n,\lambda$ 是任意数，证明：

$$|\lambda E_m - AB| = \lambda^{m-n}|\lambda E_n - BA| \cdots\cdots (7)$$

Proof.

In two cases, we prove the formula:

1. $\lambda \neq 0:$

$$|\lambda E_m - AB| = \begin{vmatrix} \lambda E_m - AB & 0 \\ B & E_n \end{vmatrix}$$

$$\underline{r_1 + Ar_2} = \begin{vmatrix} \lambda E_m & A \\ B & E_n \end{vmatrix} \underline{r_2 - \lambda^{-1}Br_1} = \begin{vmatrix} \overbrace{\lambda E_m} & A \\ 0 & \{E_n - \frac{1}{\lambda}BA \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^{m-n} \begin{vmatrix} E_m & A \\ & \lambda E_n - BA \end{vmatrix} = \lambda^{m-n}|\lambda E_n - BA|$$

(2) $\lambda = 0$, by $R(AB) \leq R(A) \leq n < m$ (see 2.8.2 性质 5), we have $|AB| = 0$. Hence

$$|\lambda E_m - AB| = 0 = \lambda^{m-n}|\lambda E_n - BA|$$

$\square$

(3) 特别，当 $n=1$,

$$|\lambda E_m - AB| = \lambda^{m-1}(\lambda - BA)$$

例如:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left|\lambda E_3 - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right| = \lambda^2(\lambda - 14)$$

(4) $\lambda = 1$,有

$$|E_m - AB| = |E_n - BA|$$

(5) $m=n$,有

$$|\lambda E_m - AB| = |\lambda E_n - BA|$$

验证：$\lambda > 0$时，参见前面的证明。$\lambda = 0$, 有：

$$\begin{aligned} &|-AB| = (-1)^n|AB| = (-1)^n|A||B| \\ &= (-1)^n|B||A| = (-1)^n|BA| = |-BA| \end{aligned}$$

第二种证明方法：设 $m \geq n$

1. $\lambda \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} \lambda E_m & A \\ B & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ -B & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda E_m - AB & A \\ 0 & E_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda E_m & A \\ B & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & -\frac{1}{\lambda}A \\ 0 & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda E_m & 0 \\ B & E_n - \frac{1}{\lambda}BA \end{pmatrix}$$

$$|\lambda E_m - AB| = \lambda^m |E_n - \frac{1}{\lambda}BA| = \lambda^{m-n}|\lambda E_n - BA|$$

2. $\lambda = 0$, 分别考虑 $m > n, m = n$

Example 21

(书中例 18)求下述矩阵的逆矩阵：其中，A 为 m 阶可逆矩阵，B 为 n 阶可逆矩阵，C 是 $m\times n$ 矩阵，D 是 $n\times m$ 矩阵，

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & 0 \\ D & B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$$

解.

(1).

$$\begin{pmatrix} 0 & A & E_m & 0 \\ B & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A & E_m & 0 \\ B & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & E_n \\ 0 & A & E_m & 0 \end{pmatrix} \frac{B^{-1}r_1}{A^{-1}r_2} \begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 & B^{-1} \\ 0 & E_m & A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

□

(2).

$$\begin{pmatrix} A & C & E_m & 0 \\ 0 & B & 0 & E_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E_m & -CB^{-1} \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C & E_m & 0 \\ 0 & B & 0 & E_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A & 0 & E_m & -CB^{-1} \\ 0 & B & 0 & E_n \end{pmatrix} \frac{A^{-1}r_1}{B^{-1}r_2} \begin{pmatrix} E_m & 0 & A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & E_n & 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$$

(3).

$$\begin{pmatrix} A & 0 & E_m & 0 \\ D & B & 0 & E_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ -DA^{-1} & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 & E_m & 0 \\ D & B & 0 & E_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A & 0 & E_m & \\ 0 & B & -DA^{-1} & E_n \end{pmatrix} \frac{A^{-1}r_1}{B^{-1}r_2} \begin{pmatrix} E_m & 0 & A^{-1} & 0 \\ 0 & E_n & -B^{-1}DA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$$

(4).

$$\begin{pmatrix} C & A & E_m & 0 \\ B & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - CB^{-1}r_2} \begin{pmatrix} 0 & A & E_m & -CB^{-1} \\ B & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & E_n \\ 0 & A & E_m & -CB^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[A^{-1}r_2]{B^{-1}r_1} \begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 & B^{-1} \\ 0 & E_m & A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \end{pmatrix}$$

2.8.2 利用分块初等变换求分块矩阵的秩

本节证明矩阵秩的几条性质。

(1)

$$R\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = R(A) + R(B)$$

Suppose that $R(A) = r, R(B) = s$, 存在可逆矩阵：P_1, P_2, Q_1, Q_2

$$P_1AQ_1 = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2BQ_2 = \begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

then

$$\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因而有上述结论。

(2)

$$R\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \geq R(A) + R(B)$$

Suppose that $R(A) = r, R(B) = s$, 存在可逆矩阵：P_1, P_2, Q_1, Q_2

$$P_1AQ_1 = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2BQ_2 = \begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

then

$$\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & 0 & C_{11} & C_{12} \\ 0 & 0 & C_{21} & C_{22} \\ 0 & 0 & E_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

这里：$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = P_1CQ_2$

$$\xrightarrow{\text{初等行列变换}} \begin{pmatrix} E_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) $R(A\vdots B) \leq R(A) + R(B)$

$$P_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Then

$$P_1 \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 A Q_1 & P_1 B \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E_r & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} E_r & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Hence we get

$$\begin{aligned} R\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} &= R(A) + R(B_2) \\ &\leq R(A) + R(B) \end{aligned}$$

(4) $R(A+B) \leq R(A) + R(B), A, B : m \times n$

$$\begin{pmatrix} E_m & E_m \\ 0 & E_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & E_n \\ 0 & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A+B \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

$$\therefore R(A) + R(B) = R\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

$$= R\begin{pmatrix} A & A+B \\ 0 & B \end{pmatrix} \geq R(A+B)$$

(5) $R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}, A: m \times n, B: n \times p$

$$\begin{pmatrix} A & 0_{m\times p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & B \\ 0 & E_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AB \end{pmatrix}$$

$$R(A) = R\begin{pmatrix} A & 0 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} A & AB \end{pmatrix} \geq R(AB)$$

$$\begin{pmatrix} E_n & 0_{n\times m} \\ A & E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ 0_{m\times p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ AB \end{pmatrix}$$

$$R(B) = R\begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} B \\ AB \end{pmatrix} \geq R(AB)$$

(6) $R(AB) \geq R(A)+R(B)-n, A: m\times n, B: n\times p$

$$\begin{pmatrix} E_m & -A \\ 0 & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ E_n & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -AB \\ E_n & B \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 - c_1 B} \begin{pmatrix} 0 & -AB \\ E_n & 0 \end{pmatrix}$$

$$R(AB)+n = R\begin{pmatrix} 0 & -AB \\ E_n & 0 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} A & 0 \\ E_n & B \end{pmatrix} \geq R(A)+R(B)$$

特别，如果 $AB=0$, 则有：

$$R(A)+R(B) \leq n$$

特别提醒：

- 求矩阵行列式的值，只可以对矩阵进行第三类（块）初等变换；
- 求矩阵的秩$R(A)$,可以进行任意初等（块）变换。

谢 谢！