线性代数
第三章 几何向量

曾吉文
哈尔滨工业大学数学科学学院

2022年 9 月

本章介绍：几何向量概念，向量运算，平面与直线方程，空间中直线与平面位置关系，距离计算等。

本章内容：6个课时。

1 向量概念和向量运算

- 向量的概念
- 向量的线性运算

2 数量积，向量积和混合积

- 向量在轴上的投影
- 几何向量的数量积
- 几何向量的向量积
- 几何向量的混合积
- 几何向量的坐标

3.1 向量概念和向量运算

3.1.1 向量的概念

- 类似于力，速度，加速度，都是有大小，有方向的数量；
- 描述有大小，有方向的数学对象，我们用向量；
- 一般描述：几何空间中，一条有向线段，称之为向量；
- 有向线段的长度，表示向量的大小；向量的方向，用起点到终点的箭头表示：

$$A \longrightarrow B$$

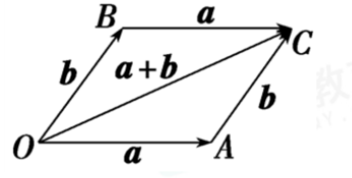
记成 $\overrightarrow{AB}$, 长度记为 $|\overrightarrow{AB}|$,是一个非负实数。

- 向量的表达方式，也可以：$\vec{a}$,或者 **a**
- 长度为 1 的向量，称为单位向量。$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 是单位向量。
- 起点和终点相同的向量，称为零向量，记为 **0**
- 自由向量：不考虑向量的起点，只考虑向量的大小和方向。一般情况下，从数学研究的意义，只需考虑自由向量，简称向量。
- 两个向量：**a**, **b**, 如果大小相等，方向一致，就说它们相等，记为：$\mathbf{a} = \mathbf{b}$
- 平行向量：两个向量，方向一致或相反，称为平行向量，记为：$\mathbf{a} // \mathbf{b}$
- 共面向量：两个以上的向量，起点放在一个点，终点都在一个平面上，称它们是共面向量。

3.1.2 向量的线性运算

向量的加法：设有向量 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$

- 平行四边形法则：$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$,对角线向量



- 方向一致的向量：$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$，方向一致，大小等于$|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OB}|$
- 方向相反的向量：$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$,方向与长的向量一致，大小等于向量长度的差；
- 三角形法则：做一个平行向量：$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$, 则有：

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$$

本法则适用于三个以上向量的加法。

向量的加法运算，满足

1. 交换律：$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$
2. 结合律：$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$
3. $\mathbf{0}+\mathbf{a}=\mathbf{a}$
4. 负向量 $-\mathbf{a}$ 是方向相反，大小等于 $|\mathbf{a}|$ 的向量。
5. $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$ 或者
$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$$
6. $\mathbf{a}-\mathbf{a}=\mathbf{0}$

向量的数乘：给定一个数 k，向量 $\mathbf{a}$，定义：

1. $k\mathbf{a}$ 的长度为 $|k||\mathbf{a}|$
2. $k>0, k\mathbf{a}$ 的方向与 $\mathbf{a}$ 一致；
3. $k<0, k\mathbf{a}$ 的方向与 $\mathbf{a}$ 相反；
4. $0\mathbf{a}=\mathbf{0}, k\mathbf{0}=\mathbf{0}$

向量的数乘，满足：

1. $1\mathbf{a}=\mathbf{a}, -1\mathbf{a}=-\mathbf{a}$
2. $(kl)\mathbf{a}=k(l\mathbf{a})$
3. $k(\mathbf{a}+\mathbf{b})=k\mathbf{a}+k\mathbf{b}$
4. $(k+l)\mathbf{a}=k\mathbf{a}+l\mathbf{a}$
5. $\mathbf{a}\neq 0, \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$是单位向量，记为：$\mathbf{a}^0, \mathbf{a}=|\mathbf{a}|\mathbf{a}^0$
6. 向量 $\mathbf{a}$ 与向量 $\mathbf{b}$ 平行，当且仅当：$\mathbf{a}=\lambda\mathbf{b}$ 或者 $\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}$

Example 1

平面上取定一条直线，在直线上取定一个向量α，则这条直线上任何向量：β, 都是这个向量的数乘：$\beta = k\alpha$

Example 2

给定平面上任意两个不共线的向量：α, β, 则平面上任意一个向量 γ，可以表达为它们的线性组合：$\gamma = a\alpha + b\beta$

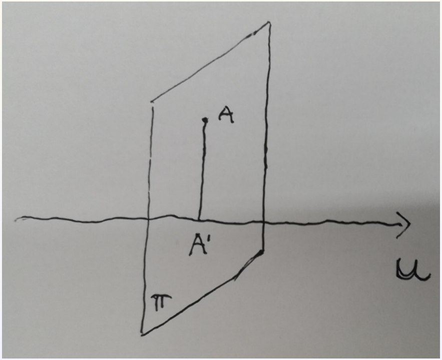
3.2 数量积，向量积和混合积

3.2.1 向量在轴上的投影

- 向量的夹角：给定向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$，令：$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$，定义它们的夹角为 $\theta = \angle AOB$,记作：

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \angle AOB, 0 \leq \theta \leq \pi$$

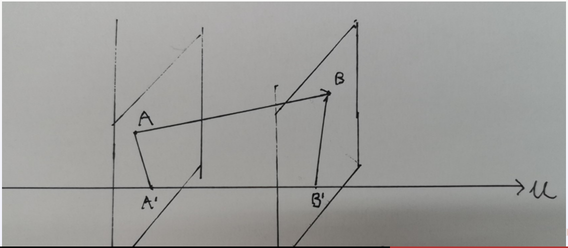
- 设有轴（有向直线）μ 和轴外一点 A，通过点 A 画轴μ 的垂直平面，交于点 A'，称为点 A 在轴 μ 上的投影。



定义 2.1

(书中定义3.1，P82) 设向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点和终点在轴 μ 上的投影分别为点 A' 和点 B'. 向量 $\overrightarrow{A'B'}$ 的值 $A'B'$ 称为 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 μ 上的投影：

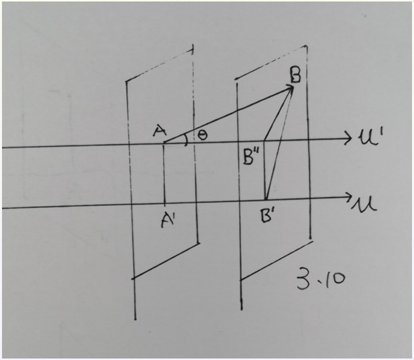
- $A'B'$ 的绝对值等于 $|\overrightarrow{A'B'}|$
- $\overrightarrow{A'B'}$ 与轴 μ 一致时，$A'B'$ 取正号，否则取负号；
- 轴 μ 称为投影轴；
- 记号：$\mathrm{Prj}_{\mu}\overrightarrow{AB} = A'B'$



Theorem 2.2

(书中定理 3.1) 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 μ 上的投影等于向量的长度乘轴与向量的夹角的余弦：

$$\text{Prj}_{\mu}\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos\theta$$



Proof.

向量$\overrightarrow{AB}$ 的起点和终点分别决定了两个平行的μ-轴垂直面， 交点即为投影线 $A'B'$. 通过向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A, 做一条轴 μ' ，与轴 μ 平行且方向相同。向量 $\overrightarrow{AB}$ 与轴μ 的夹角 θ 等于向量 $\overrightarrow{AB}$ 与轴μ' 的夹角. 点 B 所在μ轴垂直面与轴 μ' 交于点 B''. 因此有：

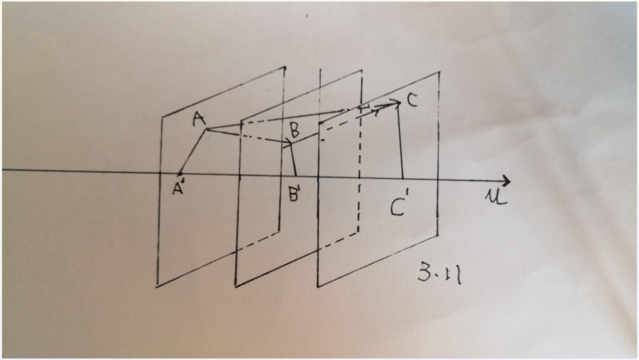
$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB} = A'B' = AB'' = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta$$

□

Theorem 2.3

(书中定理3.2) 两个向量的和在某轴上的投影，等于两个向量在该轴上的投影的和,即：

$$\operatorname{Prj}_\mu(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\operatorname{Prj}_\mu\overrightarrow{AB}+\operatorname{Prj}_\mu\overrightarrow{BC}$$



Proof.

如图示。

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

再计算各个向量的投影：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AB} = A'B', \mathrm{Prj}_u \overrightarrow{BC} &= B'C' \\
\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AC} = A'C' = A'B' + B'C' & \\
= \mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AB} + \mathrm{Prj}_u \overrightarrow{BC} &
\end{aligned}$$

□

3.2.2 几何向量的数量积

数量积的背景之一，力向量作用于某个物体，使之产生位移。

定义 2.4

(书中定义3.2，P83) 设有两个几何向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$，夹角为 θ，则向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的数量积定义为：

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta$$

数量积也称为内积，又表达为：$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$

特别注意：$(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 表示内积，$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$表示夹角。

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} \bullet \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2, |\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$$

- $(\mathbf{a},\mathbf{b})$为零，当且仅当 $\mathbf{a}=0$ 或者 $\mathbf{b}=0$，或者 $\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle=\frac{\pi}{2}$
- 规定零向量垂直于任何向量。因此，$(\mathbf{a},\mathbf{b})$为零，当且仅当 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$垂直；
- 根据投影计算公式，我们还有：

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})=|\mathbf{a}|\mathrm{Prj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}=|\mathbf{b}|\mathrm{Prj}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$$

- 根据定义，有：

$$\cos\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle=\frac{\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$$

数量积有下列性质：

1. $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \mathbf{b} \bullet \mathbf{a} \Leftrightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$
2. $(k\mathbf{a}) \bullet \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}) \Leftrightarrow (k\mathbf{a}, \mathbf{b}) = k(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

$$(k\mathbf{a}) \bullet \mathbf{b} = |k\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(k\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |k||\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(k\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} k|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}), k > 0 \\ -k|\mathbf{a}||\mathbf{b}|(-\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})), k \leq 0 \end{array} \right\} = k|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

$$k(\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}) = k|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

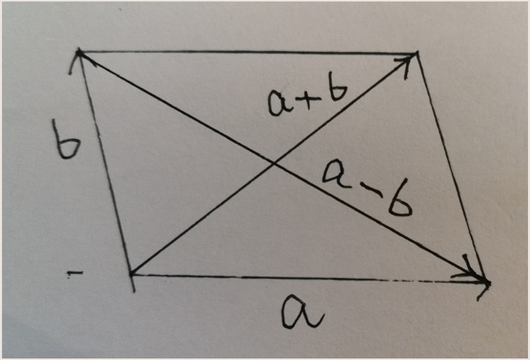
3. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \bullet \mathbf{c} = \mathbf{a} \bullet \mathbf{c} + \mathbf{b} \bullet \mathbf{c}$

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \bullet \mathbf{c} &= |\mathbf{c}| \mathrm{Prj}_{\mathbf{c}}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\ &= |\mathbf{c}| \mathrm{Prj}_{\mathbf{c}}\mathbf{a} + |\mathbf{c}| \mathrm{Prj}_{\mathbf{c}}\mathbf{b} \\ &= \mathbf{a} \bullet \mathbf{c} + \mathbf{b} \bullet \mathbf{c} \end{aligned}$$

4. $\mathbf{a} \bullet \mathbf{a} \geq 0, \mathbf{a} \bullet \mathbf{a} = 0$ 当且仅当 $\mathbf{a} = 0$

Example 3

平行四边形公式：平行四边形的四条边由向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 组成。



证明平行四边形公式：

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = 2(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2)$$

根据内积性质，直接计算。

$$|a+b|^2=(a+b,a+b)=(a,a)+2(a,b)+(b,b)$$
$$|a-b|^2=(a-b,a-b)=(a,a)-2(a,b)+(b,b)$$
$$|a+b|^2+|a-b|^2=$$
$$(a,a)+2(a,b)+(b,b)+(a,a)-2(a,b)+(b,b)$$
$$=2(a,a)+2(b,b)=2(|a|^2+|b|^2)$$

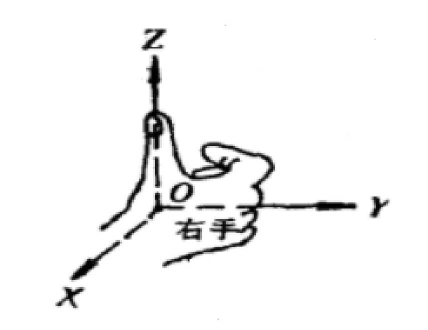
3.2.3 几何向量的向量积

向量的数量积是一个数，但是向量的向量积是一个向量，以下是定义。

定义 2.5

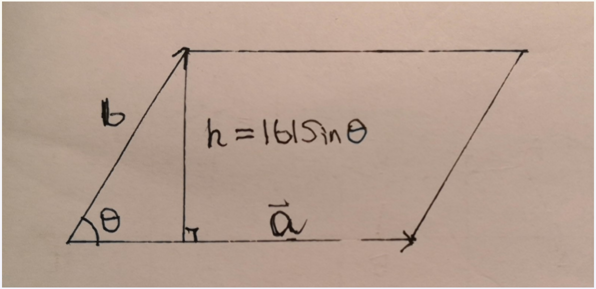
(书中定义3.3，P85) 给定两个向量：$\mathbf{x}, \mathbf{y}$，定义$\mathbf{x}, \mathbf{y}$的向量积为：$\mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$，

1. $|\mathbf{x} \times \mathbf{y}| = |\mathbf{x}||\mathbf{y}| \sin\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$
2. $\mathbf{x} \times \mathbf{y} \perp \mathbf{x}, \mathbf{x} \times \mathbf{y} \perp \mathbf{y}$
3. $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{z}$ 构成右手系



注意：

- $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$是 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 为边的平行四边形面积。
- 三个向量 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 构成右手系，右手四指弯曲由 $\mathbf{a}$ 到 $\mathbf{b}$，拇指为 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 的方向。
- $\mathbf{a},\mathbf{b}$平行，则 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=0$



向量积有下列性质：

- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
- $(k\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (k\mathbf{b})$
- $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
- $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$

证明第三条性质：利用后面混合积的性质：$\forall\gamma$

$$
\begin{aligned}
((\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c})\bullet\gamma &= (\mathbf{c}\times\gamma)\bullet(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \\
&= (\mathbf{c}\times\gamma)\bullet\mathbf{a}+(\mathbf{c}\times\gamma)\bullet\mathbf{b} \\
&= (\gamma\times\mathbf{a})\bullet\mathbf{c}+(\gamma\times\mathbf{b})\bullet\mathbf{c} \\
&= (\mathbf{a}\times\mathbf{c})\bullet\gamma+(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\bullet\gamma \\
&= (\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c})\bullet\gamma \\
\Rightarrow (\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c} &= \mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}
\end{aligned}
$$

3.2.4 几何向量的混合积

结合前面两种向量运算，有混合积的概念。

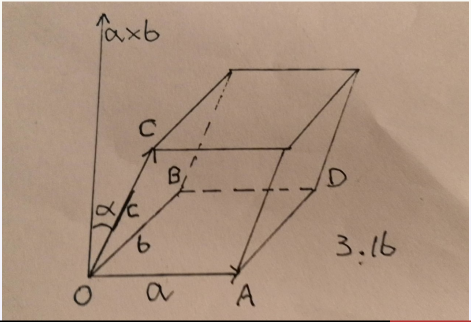
给定三个向量：$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$

定义 2.6

(书中定义3.4，P86) 已知三个向量：$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. 先做向量积：$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, 再做数量积：

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \bullet \mathbf{c}$$

这个数称为三个向量的混合积。记为：$[\mathbf{abc}]$



1. 混合积是一个数，绝对值等于一个以 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为边的平行六面体的体积.

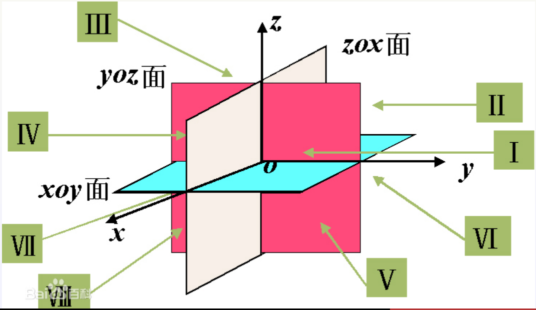
$$[\mathbf{abc}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \bullet \mathbf{c} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}||\mathbf{c}| \cos\alpha$$

平行六面体的高度 $h = \pm|\mathbf{c}| \cos\alpha$

2. 如果三个向量：$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 符合右手系:向量 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 的方向与向量 $\mathbf{c}$ 在平面 π （由向量$\mathbf{a}, \mathbf{b}$决定的）同一侧，混合积取正号，符合左手系，取负号；
3. 几何图形及解释，参见书中图3.16，P86.
4. $[\mathbf{abc}] = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面；
5. $[\mathbf{abc}] = [\mathbf{bca}] = [\mathbf{cab}]$符合右手系。
6. $[\mathbf{abc}] = -[\mathbf{bac}] = -[\mathbf{cba}] = -[\mathbf{acb}]$

3.2.5 几何向量的坐标

空间坐标系：一个原点 O, 三条相互垂直坐标轴：$x-$轴，$y-$轴，$z-$
分别称为水平横轴，水平纵轴，垂直竖轴。三个轴方向分别记为：Ox, Oy, Oz, 符合右手系。称 $Oxyz$ 为空间直角坐标系。空间坐标系把空间分为八个分空间，称为八个卦限，xOy 水平线上四个，xOy 水平线下四个。



空间中点M与三元数组 (x,y,z): 给定空间中一个点 M, 在 Ox, Oy, Oz 三根轴上分别有投影点，对应坐标：x,y,z，记为有序三元数组：(x,y,z). 称为点 M 的三个坐标：横坐标，纵坐标和竖坐标。一般有一一对应关系：空间中点与三元有序数组，

$$M \leftrightarrow (x,y,z)$$

基本单位向量：沿三根轴的正方向，分别取三个单位向量，记为：$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, 称为基本单位向量。有下列基本性质：

$$\mathbf{i} \bullet \mathbf{i} = \mathbf{j} \bullet \mathbf{j} = \mathbf{k} \bullet \mathbf{k} = 1$$

$$\mathbf{i} \bullet \mathbf{j} = \mathbf{i} \bullet \mathbf{k} = \mathbf{j} \bullet \mathbf{k} = 0$$

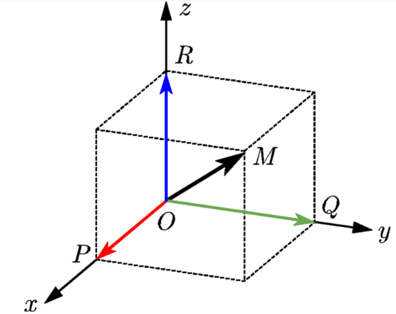
$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

向量与坐标：给定点 $M(x,y,z)$，得到一个向量 $\overrightarrow{OM}=\mathbf{a}$，则有：

$$\mathbf{a}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}=(\mathrm{Prj}_{\mathbf{x}}\mathbf{a})\mathbf{i}+(\mathrm{Prj}_{\mathbf{y}}\mathbf{a})\mathbf{j}+(\mathrm{Prj}_{\mathbf{z}}\mathbf{a})\mathbf{k}$$



设点 M 在平面 OXY 的投影点为 M',则有：

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} \\
&= \mathrm{Prj}_{\mathbf{x}}\overrightarrow{OM}\mathbf{i} + \mathrm{Prj}_{\mathbf{y}}\overrightarrow{OM}\mathbf{j} + \mathrm{Prj}_{\mathbf{z}}\overrightarrow{OM}\mathbf{k} \\
&= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

定义 2.7

(书中定义3.5，P89) 给定向量 $\mathbf{a}=\overrightarrow{OM}$，如果有：

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}_x\mathbf{i}+\mathbf{a}_y\mathbf{j}+\mathbf{a}_z\mathbf{k}$$

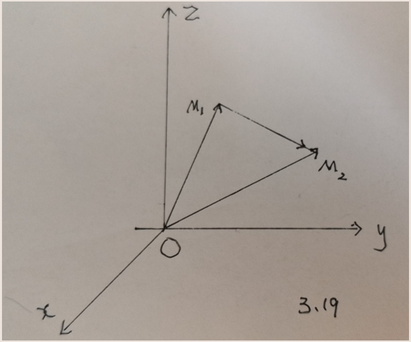
称 $(\mathbf{a}_x,\mathbf{a}_y,\mathbf{a}_z)$ 为向量 $\mathbf{a}$ 关于基本单位向量 $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ 的坐标。

Example 4

设有 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ，求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标。

解.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$
$$= (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$$



3.2.6 向量的坐标运算

有了向量的坐标表达式，则向量的运算可以转化为向量的坐标运算. 设有向量:

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} = (a_x, a_y, a_z)$$
$$\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k} = (b_x, b_y, b_z)$$
$$\mathbf{c} = c_x\mathbf{i} + c_y\mathbf{j} + c_z\mathbf{k} = (c_x, c_y, c_z)$$

有下列计算公式：

1. $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z)$
2. $\mathbf{a}-\mathbf{b}=(a_x-b_x, a_y-b_y, a_z-b_z)$
3. $k\mathbf{a}=(ka_x, ka_y, ka_z)$
4. $\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$
5. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\mathbf{k}$
6. $[\mathbf{abc}]=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$

Proof.

(5)

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= (a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k})(b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k})\\
&= a_xb_x\mathbf{i}\times\mathbf{i}+a_xb_y\mathbf{i}\times\mathbf{j}+a_xb_z\mathbf{i}\times\mathbf{k}\\
&\quad +a_yb_x\mathbf{j}\times\mathbf{i}+a_yb_y\mathbf{j}\times\mathbf{j}+a_yb_z\mathbf{j}\times\mathbf{k}\\
&\quad +a_zb_x\mathbf{k}\times\mathbf{i}+a_zb_y\mathbf{k}\times\mathbf{j}+a_zb_z\mathbf{k}\times\mathbf{k}\\
&= a_xb_y\mathbf{i}\times\mathbf{j}+a_yb_x\mathbf{j}\times\mathbf{i}+a_xb_z\mathbf{i}\times\mathbf{k}\\
&\quad +a_zb_x\mathbf{k}\times\mathbf{i}+a_yb_z\mathbf{j}\times\mathbf{k}+a_zb_y\mathbf{k}\times\mathbf{j}\\
&= (a_xb_y-a_yb_x)\mathbf{k}-(a_xb_z-a_zb_x)\mathbf{j}+(a_yb_z-a_zb_y)\mathbf{i}\\
&\quad \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

□

(6)

Proof.

在 （5）的证明中，将 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 用 c_x, c_y, c_z 替换即可。 □

- 向量的模长：$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \bullet \mathbf{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$
- 向量与轴的夹角：向量与Ox, Oy, Oz 轴的夹角记为：α, β, γ. 则有：

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\mathbf{a}|}, \cos\beta = \frac{a_y}{|\mathbf{a}|}, \cos\gamma = \frac{a_z}{|\mathbf{a}|}$$

- α, β, γ, 称为向量 $\mathbf{a}$ 的方向角。有性质：

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \mathbf{a}^0$ 是单位向量。

Example 5

已知三个点：$M(1,1,1), A(2,2,1), B(2,1,2)$. 求角：$\angle AMB$ 和三角形 $\triangle AMB$ 的面积。

解.

$$\overrightarrow{MA} = (1,1,0), \overrightarrow{MB} = (1,0,1), \overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = 1$$

$$|\overrightarrow{MA}| = \sqrt{2}, |\overrightarrow{MB}| = \sqrt{2}, \cos\angle AMB = \frac{1}{2}, \angle AMB = \frac{\pi}{3}$$

$$\overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{MB} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$S_{\triangle AMB} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{MB}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

□

Example 6

已知空间中四个点：$A(1,1,1), B(4,4,4), C(3,5,5), D(2,4,7)$. 求四面体 $ABCD$ 的体积。

解.

考察向量：$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$. 以这三条向量为棱的平行六面体的体积等于混合积：

$$[\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}]$$

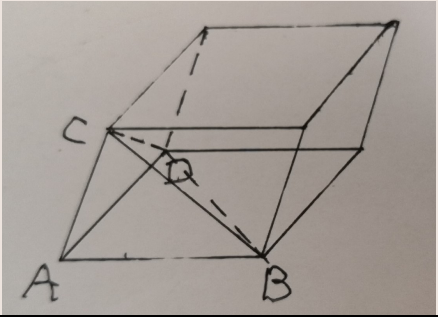
的绝对值。四面体 $ABCD$ 的体积等于下列数的绝对值：$\frac{1}{6}[\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}]$ □

解.

$$\overrightarrow{AB} = (3,3,3), \overrightarrow{AC} = (2,4,4), \overrightarrow{AD} = (1,3,6)$$

$$[\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 24 + 6 = 18$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \times 18 = 3$$



Example 7

设

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}=0$$

说明向量：$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 共面。

解.

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}=0$$
$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a})\bullet\mathbf{c}=0\bullet\mathbf{c}=0$$
$$[\mathbf{abc}]+[\mathbf{bcc}]+[\mathbf{cac}]=0$$
$$\Rightarrow[\mathbf{abc}]=0$$

$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 共面。 $\square$

Example 8

已知 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为单位向量，满足

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$$

计算：

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} + \mathbf{b} \bullet \mathbf{c} + \mathbf{c} \bullet \mathbf{a}$$

解.

$$\mathbf{a} \bullet (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \bullet 0 = 0$$

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{a} + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} + \mathbf{a} \bullet \mathbf{c} = 0$$

$$1 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} + \mathbf{a} \bullet \mathbf{c} = 0 \cdots\cdots (1)$$

$\square$

解.

类似可得：

$$\mathbf{b} \bullet \mathbf{a} + 1 + \mathbf{b} \bullet \mathbf{c} = 0 \cdots\cdots (2)$$

$$\mathbf{c} \bullet \mathbf{a} + \mathbf{c} \bullet \mathbf{b} + 1 = 0 \cdots\cdots (3)$$

$$(1) + (2) + (3) \Rightarrow$$

$$3 + 2(\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} + \mathbf{b} \bullet \mathbf{c} + \mathbf{c} \bullet \mathbf{a}) = 0$$

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} + \mathbf{b} \bullet \mathbf{c} + \mathbf{c} \bullet \mathbf{a} = -\frac{3}{2}$$

□

Example 9

已知向量

$$\mathbf{a} = \mathbf{i}, \mathbf{b} = \mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \mathbf{c} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

求单位向量 $\mathbf{d}$,满足

$$\mathbf{d} : \mathbf{d} \perp \mathbf{c}, \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}\}$$

共面。

解.

Let

$$\mathbf{d} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{d} \perp \mathbf{c} \Rightarrow 2x - 2y + z = 0$$

$$[\mathbf{abd}] = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

解.

$$2y + z = 0$$

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

得到一个解向量：$\mathbf{s} = (2, 1, -2)$，单位化：

$$\mathbf{d} = \pm\frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3})$$

□

Example 10

已知向量

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}, |\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$$

和

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle,$$

求向量 $\mathbf{c}$.

解.

Let

$$\begin{aligned} \mathbf{c} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, |\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| &= \sqrt{2} \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 2 \\ \cos\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

解.

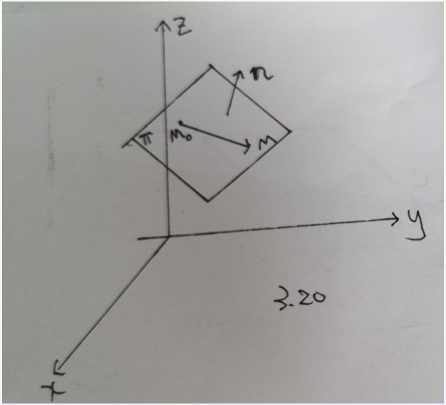
$$\cos\langle \mathbf{a}, \mathbf{c}\rangle = \frac{\mathbf{a}\bullet\mathbf{c}}{|\mathbf{a}||\mathbf{c}|} = \frac{x+y}{\sqrt{2(x^2+y^2+z^2)}} = \frac{1}{2}$$
$$\cos\langle \mathbf{b}, \mathbf{c}\rangle = \frac{\mathbf{b}\bullet\mathbf{c}}{|\mathbf{b}||\mathbf{c}|} = \frac{y+z}{\sqrt{2(x^2+y^2+z^2)}} = \frac{1}{2}$$

$$x+y=1$$
$$y+z=1$$
$$x^2+y^2+z^2=2$$

$$x=z$$
$$y=1-z$$
$$z^2+(1-z)^2+z^2=2$$
$$3z^2-2z-1=0, (3z+1)(z-1)=0$$
$$z_1=1, z_2=-\frac{1}{3}$$
$$\mathbf{c_1}=(1,0,1), \mathbf{c_2}=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})$$

3.3 空间中的平面与直线

3.3.1 空间中平面的方程



已知平面 π 上一个点：$M_0(x_0, y_0, z_0)$，和一条垂直平面的非零向量：$\mathbf{n} = (A, B, C)$，称为平面 π 的 **法向量**。我们求平面 π 的方程。

假定平面上任意一个点为：$M(x, y, z)$，$\overrightarrow{M_0M}$ 垂直于平面 π 的法向量$\mathbf{n} = (A, B, C)$。于是有：

$$\mathbf{n} \bullet \overrightarrow{M_0M} = 0$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

反之，空间中某个点 $M(x, y, z)$ 满足上述方程（1），必然在平面 π 上。所以上述方程刻画了平面 π 上点的运动轨迹，称为平面 π 的**点法式方程**。

在上述点法式方程里，令：$D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$. 我们有：

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

这个称为**平面的一般方程**。如果给定一个平面π 的方程（2），我们可以证明向量：$\mathbf{n}=(A,B,C)$ 就是平面 π 的法向量。任取平面上两个点： $M_1(x_1,y_1,z_1), M_2(x_2,y_2,z_2)$. 将它们分别带入方程（2）：

$$\begin{aligned} Ax_1+By_1+Cz_1+D&=0\\ Ax_2+By_2+Cz_2+D&=0\\ A(x_1-x_2)+B(y_1-y_2)+C(z_1-z_2)&=0\\ \Rightarrow \mathbf{n}\bullet\overrightarrow{M_2M_1}&=0 \end{aligned}$$

Example 11

已知平面 π 经过点 $M_0(2,1,0)$，与向量 $\mathbf{a}=(1,0,1),\mathbf{b}=(0,1,0)$ 平行。试求平面 π 的方程.

根据已知条件，平面 π 与向量 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 垂直。

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

$$=-\mathbf{i}+\mathbf{k}=(-1,0,1)$$

根据点法式平面方程，有：

$$-1(x-2)+0(y-1)+1(z-0)=0$$

$$-x+2+z=0$$

下面例子，说明平面上的三个点，可以决定平面方程。

Example 12

已知平面 π 经过三个点：$M_1(x_1,y_1,z_1), M_2(x_2,y_2,z_2), M_3(x_3,y_3,z_3)$，平面$\pi$ 的方程。

解.

平面π上三个点，决定π上两个向量：

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1),\overrightarrow{M_1M_3}=(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1)$$

对于空间中任意一个点 $M(x,y,z)$,在平面π上，当且仅当向量 $\overrightarrow{M_1M}$ 与向量 $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$共面，等价于混合积：

$$[\overrightarrow{M_1M}\,\overrightarrow{M_1M_2}\,\overrightarrow{M_1M_3}]=0$$

□

由此得到平面方程：

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \cdots\cdots \quad (5)$$

称为平面的三点式方程。

Example 13

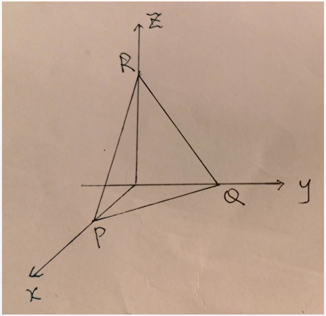
已知平面 π 与三条主轴线（Ox, Oy, Oz）的交点分别为：$(a,0,0),(0,b,0),(0,0,c), abc \neq 0$.求平面方程。

解.

应用三点式平面方程，有下式：称为平面截距式方程，可以直接作为公式使用。 □

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ 0-a & b & 0 \\ 0-a & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-a)bc + yac + zab = 0$$

$$xbc + yac + zab = abc \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$



Example 14

设平面 π 经过 Oz 轴和点 $M(2,3,4)$，求平面方程。

解.

解法1： 设平面方程为：

$$Ax+By+Cz+D=0$$

Oz 轴上选取两个点：$(0,0,0),(0,0,1)$ 和点 $M(2,3,4)$，带入平面方程，得到：

$$\begin{aligned} D=0,\quad C=0,\quad 2A+3B=0 \\ \Rightarrow \quad A=3k,\quad B=-2k, k\neq 0 \end{aligned}$$

$$3x-2y=0$$

□

解法2：用点法式方程：平面上有向量：$\overrightarrow{OM}=(2,3,4),\overrightarrow{OA}=(0,0,1)$，则法向量为：

$$\overrightarrow{OM}\times\overrightarrow{OA}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\2&3&4\\0&0&1\end{vmatrix}=3\mathbf{i}-2\mathbf{j},A=3,B=-2,C=D=0.$$

$\overrightarrow{n}=3\mathbf{i}-2\mathbf{j}$. 平面经过原点$O(0,0,0)$,因此：平面上任取一点$M=(x,y,z)$,$\overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{n}$

$$\overrightarrow{OM}\bullet\overrightarrow{n}=0\Rightarrow 3x-2y=0.$$

解法3：三点式，平面经过三个点：

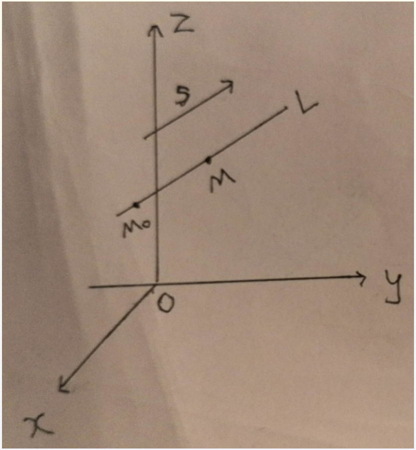
$$O(0,0,0), A(0,0,1), M(2,3,4),$$

所以有：

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$-3x + 2y = 0 \Rightarrow 3x - 2y = 0$$

3.3.2 空间中直线的方程



- 方向向量：与直线 L 平行的向量 $\mathbf{s}$ ，称为直线 L 的 **方向向量**。
- 已知直线 L 通过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和直线的方向向量 $\mathbf{s}$ ，求直线 L 的方程。
- 任取空间中一点 $M(x, y, z)$，这个点 $M(x, y, z)$ 在直线 L 上，当且仅当向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 与方向向量$\mathbf{s} = (m, n, p)$ 平行。 因此有：$\overrightarrow{M_0M} = k\mathbf{s} = (km, kn, kp)$

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad \cdots\cdots \; (7)$$

称为直线 L 的 **标准方程**，或称 **点向式方程**（点，方向向量）。

对于标准方程中的方向向量，需要注意：

1. 若 $m = 0$, 方向向量与 Ox 轴垂直。则直线方程为(直线为以下两个平面的交线)：

$$\begin{aligned} x &= x_0 \\ \frac{y - y_0}{n} &= \frac{z-z_0}{p} \end{aligned}$$

2. 若 $m = 0, n = 0, p \neq 0$, 方向向量垂直于平面 xOy, 直线方程为：经过点 (x_0, y_0) 与平面 xOy 垂直的直线：

$$x = x_0$$

$$y = y_0$$

3. 对于 $n = 0$ 或者 $p = 0$, 类似讨论。

直线的标准方程里，令：

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

则有：

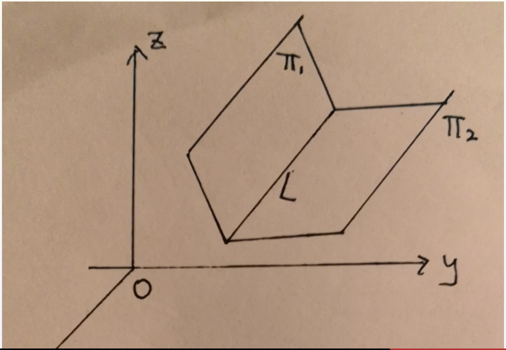
$$(8)\quad \cdots\cdots\ \begin{aligned} x&=mt+x_0\\ y&=nt+y_0\\ z&=pt+z_0\end{aligned}$$

（8）称为直线的 **参数方程**。

两个平面的交线是一条直线，所以用两个平面方程来决定直线 L:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \qquad \cdots\cdots \quad (9) \end{aligned}$$

这个方程称为 **直线的一般方程**。



- 通过直线的平面有很多，选择比较简洁的两个平面来表达方程很重要。
- 根据平面的标准方程，可以得到平面的一般方程为：

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$$
$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{z-z_0}{p}$$

- 或者等价于：

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$$
$$\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

Example 15

已知直线 L 经过两个点：$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$，求直线方程。

解.

方向向量为：$\mathbf{s} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$，根据标准式直线方程，得到：

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad \cdots\cdots \quad (10)$$

称为直线的 **两点式方程**。 □

Example 16

设直线 L 的一般方程为：

$$\begin{aligned} x+3y+2z &= 0 \\ x+4y+2z &= 0 \end{aligned}$$

求直线 L 的标准方程和参数方程。

解.

第一个平面的法向量为：$\mathbf{n_1} = (1,3,2)$. 第二个平面的法向量为：$\mathbf{n_2} = (1,4,2)$. 直线 L 的方向向量垂直于这两个法向量，因而 其方向向量为：

$$\mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} + \mathbf{k} = (-2,0,1)$$

□

又平面经过点：$(0,0,0)$，故标准方程和参数方程分别为：

$$\frac{x}{-2}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}$$

$$x=-2t, y=0, z=t$$

3.3.3 位置关系

- 平面与平面的位置关系。重合，平行不重合，相交。
- 直线与直线的位置关系。重合，平行不重合，相交，异面。
- 直线与平面的位置关系。在平面上，平行不在平面上，交于一点。

- 首先讨论平面与平面的位置关系。设有平面 π_1 和 π_2:

$$\begin{aligned} \pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ \pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$A_i, B_i, C_i, \text{不全为零}(i = 1, 2)$$

(1) 两平面重合，等价于两个平面方程的解（点）是相同的：

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

(2) 平行但不重合，法向量一致：两个平面方程没有公共解：

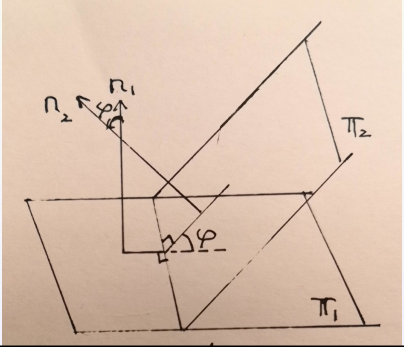
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$$

(3) 两个平面相交于一条直线：两个平面的法向量不平行。规定：两个平面的夹角为它们的法向量的夹角φ：

$$\mathbf{n_1}=(A_1,B_1,C_1),\mathbf{n_1}=(A_2,B_2,C_2)$$

$$\cos\varphi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

$$0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$$



Example 17

求下面两个平面的夹角φ:

$$\begin{aligned} x + 2y - z + 8 &= 0 \\ 2x + y + z - 7 &= 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{n_1} = (1, 2, -1), \mathbf{n_2} = (2, 1, 1), \mathbf{n_1} \bullet \mathbf{n_2} = 3$$

$$|\mathbf{n_1}| = \sqrt{6}, |\mathbf{n_2}| = \sqrt{6}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

- 直线与直线的位置关系：设有两条直线：

$$L_1: \quad \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$$
$$L_2: \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

m_i, n_i, p_i 不全为零$(i = 1, 2.)$

- 直线：L_1 经过点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，方向向量为：$\mathbf{s_1}(m_1, n_1, p_1)$.
- 直线：L_2 经过点 $M_2(x_2, y_2, z_2)$，方向向量为：$\mathbf{s_2}(m_2, n_2, p_2)$.

(1) 两条直线重合：充要条件是方向一致，且有共同点：

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{x_2-x_1}{m_2}=\frac{y_2-y_1}{n_2}=\frac{z_2-z_1}{p_2}$$

(2) 平行不重合：充要条件是平行无共同点：

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{x_2-x_1}{m_2}=\frac{y_2-y_1}{n_2}=\frac{z_2-z_1}{p_2}\qquad \text{不成立}$$

(3) 两条直线交于一点,等价于以下三个向量共面:

$$\mathbf{s_1} = (m_1, n_1, p_1), \qquad \mathbf{s_2} = (m_2, n_2, p_2), \qquad \overrightarrow{M_1M_2}$$

$$\left[\mathbf{s_1}\mathbf{s_2}\overrightarrow{M_1M_2}\right] = (\mathbf{s_1} \times \mathbf{s_2}) \bullet \overrightarrow{M_1M_2} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$$

而且$\mathbf{s_1}, \mathbf{s_2}$ 不平行。

(4) 两条直线是异面直线，等价于以下混合积不为零。

$$\left[\mathbf{s_1}\mathbf{s_2}\overrightarrow{M_1M_2}\right] \neq 0$$

(5) 两直线夹角公式为：方向向量之间的夹角φ为两条直线的夹角：$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

$$\cos\varphi = \frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

L_1 垂直于L_2 当且仅当 $m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$

- 直线与平面的位置关系，设有直线 L 和平面 π 分别为：

$$\begin{aligned} L: &\quad \frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p} \\ \pi: &\quad Ax+By+Cz+D=0 \end{aligned}$$

(1) L 在平面 π 上，等价于直线 L 垂直于平面 π 的法向量，且点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 在平面π上：

$$\begin{aligned} mA+nB+pC &= 0 \\ Ax_1+By_1+Cz_1+D &= 0 \end{aligned}$$

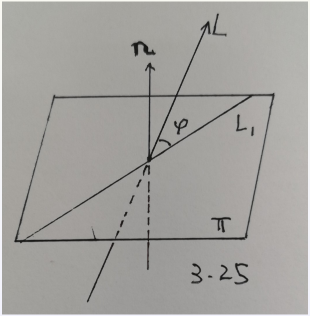
(2) L 不在平面 π 上，但是平行于平面π，等价于：L 垂直于平面的法向量，但是点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 不在平面上：

$$\begin{aligned} mA+nB+pC &= 0 \\ Ax_1+By_1+Cz_1+D &\neq 0 \end{aligned}$$

(3) L 与平面 π 交于一点，等价于 L 不垂直于平面的法向量：

$$mA + nB + pC \neq 0, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

L 在平面 π 有一个投影直线 L_1 (两个平面π, π_1的交线，其中平面 π_1与平面π垂直并经过 L 的平面), 它们之间的夹角 φ 称为直线 L 与平面 π 的夹角



注意到直线 L 与平面法向量 $\mathbf{n}$的夹角为：

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi) = \frac{|\mathbf{n}\bullet\mathbf{s}|}{|\mathbf{n}||\mathbf{s}|}$$

$$\sin\varphi = \frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

直线 L 与平面 π 垂直，当且仅当

$$\mathbf{n}//\mathbf{s}$$

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$$

Example 18

已知平面和直线为：

$$\begin{aligned} \pi: &\quad x+4y-z+2=0 \\ L: &\quad \frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{2} \end{aligned}$$

求交点和夹角。

解.

直线的参数方程为：

$$x=-1+t, y=-1-2t, z=2t$$

带入平面方程得到：□

$$-1+t+4(-1-2t)-2t+2=0$$
$$-9t-3=0, t=-\frac{1}{3}$$
$$x=-\frac{4}{3}, y=-\frac{1}{3}, z=-\frac{2}{3}$$

得到交点为：$M_0(-\frac{4}{3}, y=-\frac{1}{3}, z=-\frac{2}{3})$.计算夹角：

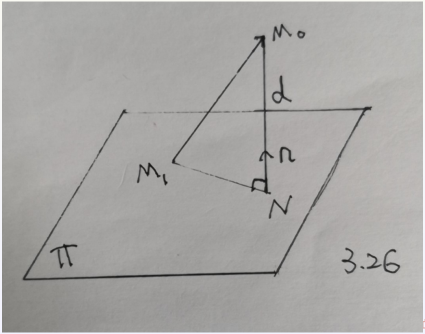
$$\mathbf{n}=(1,4,-1), \mathbf{s}=(1,-2,2)$$
$$\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)=\frac{|1-8-2|}{\sqrt{18}\sqrt{9}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\varphi=\frac{\pi}{4}$$

3.3.4 距离

- 点 M_1 到点 M_2 的距离。
- 点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离。
- 两个平行平面的距离：转化为点到平面的距离
- 直线到与其平行平面的距离，类似计算。
- 点到直线的距离。
- 两个平行直线间的距离，可以转化为点到直线的距离。
- 两条异面直线间的距离。

- 点 M_1 到点 M_2 的距离，由向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模长 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$ 决定。

- 点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离：平面上取一个点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，得到向量：$\overrightarrow{M_1M_0}$. 考虑向量 $\overrightarrow{M_1M_0}$ 在平面法向量 $\mathbf{N} = (A, B, C)$ 的投影：$\mathrm{Prj}_{\mathbf{N}}\overrightarrow{M_1M_0}$,



则点 M_0 到平面 π 的距离为：

$$d = |\mathrm{Prj}_{\mathbf{N}}\overrightarrow{M_1M_0}|$$

设 $\mathbf{N^0}$ 是与 $\mathbf{N}$ 一致的单位向量，则有：

$$\begin{aligned}\mathrm{Prj}_{\mathbf{N}}\overrightarrow{M_1M_0} &= |\overrightarrow{M_1M_0}|\cos\theta \\ &= |\mathbf{N^0}||\overrightarrow{M_1M_0}|\cos\theta \\ &= \mathbf{N^0}\bullet\overrightarrow{M_1M_0}\end{aligned}$$

注意到：

$$\begin{aligned}\mathbf{N^0} &= \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right) \\ \overrightarrow{M_1M_0} &= (x_0-x_1, y_0-y_1, z_0-z_1)\end{aligned}$$

而且点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 在平面 π 上，因此有：

$$\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D &= 0 \\ \mathbf{N}^0 \bullet \overrightarrow{M_1M_0} &= \frac{A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ d &= \left|\frac{A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right| \\ &= \left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right| \\ &= \left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right| \end{aligned}$$

所以平面外一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离,计算公式为：

$$d=\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$$

Example 19

求点 $M(1,1,1)$ 到平面 $2x+2y-z+10=0$ 的距离。 根据距离公式,

$$\begin{aligned} d &= \left|\frac{2+2-1+10}{\sqrt{4+4+1}}\right| \\ &= \frac{13}{\sqrt{9}} \\ &= \frac{13}{3} \end{aligned}$$

- 两个平行平面的距离：转化为点到平面的距离，即在其中一个平面上取一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ，计算这个点到另外一个平面的距离。

Example 20

计算以下两个平面的距离：

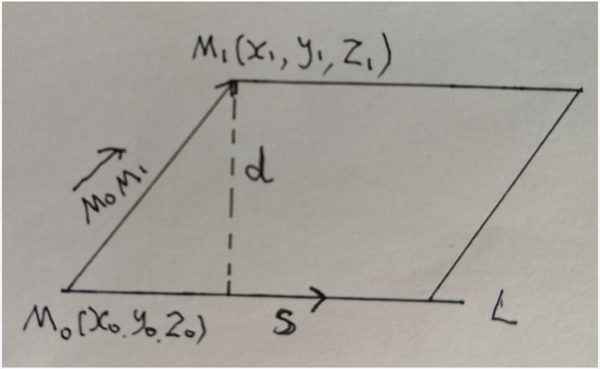
$$\begin{aligned}\pi_1: &\quad 3x+4y+5z+10=0\\ \pi_2: &\quad 3x+4y+5z+20=0\end{aligned}$$

在平面 π_1 上取一个点：$M_0(0,0,-2)$,则有

$$\begin{aligned}d= &\quad \left|\tfrac{-10+20}{\sqrt{9+16+25}}\right|\\ = &\quad \tfrac{10}{5\sqrt{2}}=\sqrt{2}\end{aligned}$$

- 直线到与其平行平面的距离，类似计算。
- 点到直线的距离：

$$M_1(x_1,y_1,z_1), L: \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$



考虑上述平行四边形的面积：以向量 $\overrightarrow{M_0M_1}$ 和直线的方向向量 $\mathbf{s}=(m,n,p)$ 为边，d为高度，即点 M_1 到直线的距离。

$$\begin{aligned} S_{\Box} &= \left|\mathbf{s}\times\overrightarrow{M_0M_1}\right| \\ &= d\times|\mathbf{s}| \\ d &= \frac{\left|\mathbf{s}\times\overrightarrow{M_0M_1}\right|}{|\mathbf{s}|} \end{aligned}$$

Example 21

求点 $M_1(1,0,2)$ 到直线 $L: \frac{x+1}{2}=\frac{x+1}{1}=\frac{z}{1}$ 的距离。

$$\mathbf{s}=(2,1,1),\quad \overrightarrow{M_0M_1}=(2,1,2)$$

$$\mathbf{s}\times\overrightarrow{M_0M_1}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=(1,-2,0)$$

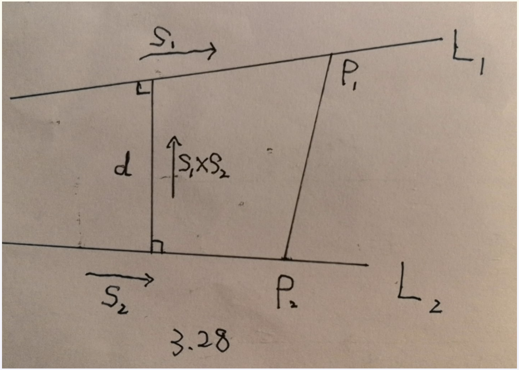
$$\left|\mathbf{s} \times \overrightarrow{M_0M_1}\right| = \sqrt{5}$$

$$|\mathbf{s}| = \sqrt{6}, \quad d = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$$

- 两个平行直线间的距离，可以转化为点到直线的距离。

- 两条异面直线间的距离：设有异面直线：

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$
$$L_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$



$$P_1(x_1,y_1,z_1),\quad \mathbf{s_1}=(m_1,n_1,p_1)$$
$$P_2(x_2,y_2,z_2),\quad \mathbf{s_2}=(m_2,n_2,p_2)$$
$$\mathbf{s_1}\times\mathbf{s_2}$$

是两个平面的公垂向量。向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 在向量 $\mathbf{s_1}\times\mathbf{s_2}$ 的投影为：

$$\mathrm{Prj}_{\mathbf{s_1}\times\mathbf{s_2}}\overrightarrow{P_1P_2}$$

距离公式：
$$\begin{aligned} d= & \left|\mathrm{Prj}_{\mathbf{s_1}\times\mathbf{s_2}}\overrightarrow{P_1P_2}\right| \\ = & \left|\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|\cos\theta\right| \\ = & \left|\overrightarrow{P_1P_2}\bullet\frac{\mathbf{s_1}\times\mathbf{s_2}}{|\mathbf{s_1}\times\mathbf{s_2}|}\right| \end{aligned}$$

Example 22

设有两条异面直线，求它们的距离：

$$
\begin{aligned}
L_1: &\quad \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \\
L_2: &\quad x - 2 = y = z - 3
\end{aligned}
$$

解.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{s_1} \times \mathbf{s_2} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 2, -1) \\
\overrightarrow{P_1P_2} &= (-2, 0, -3) \\
|\mathbf{s_1} \times \mathbf{s_2}| &= \sqrt{6} \\
d &= \left| \overrightarrow{P_1P_2} \bullet \frac{\mathbf{s_1} \times \mathbf{s_2}}{\sqrt{6}} \right| = \frac{5}{\sqrt{6}}
\end{aligned}
$$

$\square$

3.3.5 平面束

平面束：经过直线 L 的所有平面的集合，称为一个平面束。

给定直线 L 的一般方程设为：

$$L: \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad \cdots\cdots(11)$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \qquad \cdots\cdots(12)$$

注意，此处两个法向量：$\mathbf{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$ 与 $\mathbf{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$ 是不平行的，故没有比例关系：

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \lambda$$

即上述比例关系不成立。

经过直线 L 的平面 π，是否有一个统一的表达式呢？我们证明：给定由平面 π_1 和 π_2 决定的直线:

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

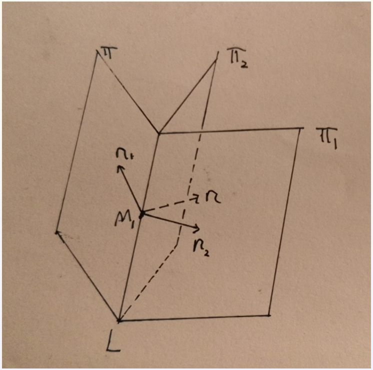
$$\pi : \quad \lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad \cdots\cdots(13)$$

为经过直线 L 的平面一般方程。

容易看出，直线 L 上的点都同时满足（11）和（12），因而一定满足（13），说明直线 L 在平面 π 上。

反之，如果有平面 π 经过直线 L ，在直线 L 上取定一个点：$M_1(x_1, y_1, z_1)$. 过点$M_1(x_1, y_1, z_1)$，做一个与直线 L 垂直的平面 ω，则所有经过L 的平面的法向量，可以视为 ω上由点 M_1 出发的向量。注意：$\mathbf{n_1}$ 是平面 π_1 的法向量， $\mathbf{n_2}$ 是平面 π_2 的法向量，设 π 的法向量为 $\mathbf{n} = (A, B, C)$, 则法向量：$\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}, \mathbf{n}$ 都在平面ω 上，因此有：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{n} &= \lambda_1 \mathbf{n_1} + \lambda_2 \mathbf{n_2} \\
A &= \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \\
B &= \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 \\
C &= \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2
\end{aligned}
$$



根据点法式平面方程:

$$(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)(x - x_1) + (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)(y - y_1)$$
$$+(\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2)(z - z_1) = 0$$
$$\lambda_1(A_1 x + B_1 y + C_1 z) - \lambda_1(A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1 z_1)$$
$$+\lambda_2(A_2 x + B_2 y + C_2 z) - \lambda_2(A_2 x_1 + B_2 y_1 + C_2 z_1) = 0$$
$$\lambda_1(A_1 x + B_1 y + C_1 z) + \lambda_1 D_1$$
$$+\lambda_2(A_2 x + B_2 y + C_2 z) + \lambda_2 D_2 = 0$$
$$\text{得到方程}\pi : \lambda_1(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1)$$
$$+\lambda_2(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0$$

结论：经过直线 L 的任何平面 π，具有如下平面方程：

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)$$
$$+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

注意： $\lambda_1=0,\pi=\pi_2;\lambda_2=0,\pi=\pi_1;$ 这个方程，称为由直线 L 决定的平面束方程。λ_1,λ_2 称为参数。由于 λ_1,λ_2 不同时为零，例如：$\lambda_1\neq 0$，则方程可以表达为：

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1$$
$$+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \quad \cdots\cdots(14)$$

Example 23

求直线：

$$L:\quad \begin{aligned} 2x-y+z-1&=0\\ x+y-z+1&=0 \end{aligned}$$

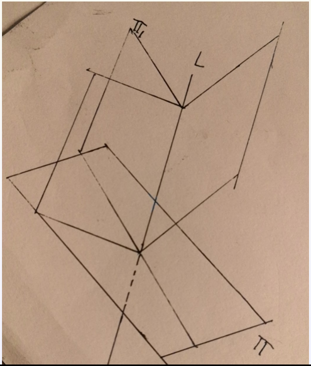
在平面 $\pi: x+2y-z=0$ 的投影方程。

解.

由直线 L 决定的平面束里，有一个平面π_1 与平面 π 垂直，它们的交线就是直线 L 的投影直线。设：

$$\pi_1 : \lambda_1(2x - y + z - 1) + \lambda_2(x + y - z + 1) = 0$$

π_1的法线为：$(2\lambda_1 + \lambda_2, -\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2)$. □



两个平面的法向量互相垂直，故有：

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \bullet \mathbf{n_1} &= 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2(-\lambda_1 + \lambda_2) - (\lambda_1 - \lambda_2) &= 0 \\ -\lambda_1 + 4\lambda_2 &= 0 \\ \lambda_2 = 1, \lambda_1 &= 4 \\ \pi_1 : 9x - 3y + 3z - 3 &= 0 \\ \pi_1 : 3x - y + z - 1 &= 0 \end{aligned}$$

得到投影方程为：

$$\begin{aligned} L_1 :& 3x - y + z - 1 = 0 \\ & x + 2y - z = 0 \end{aligned}$$

Example 24

求直线：

$$L_1: \quad \begin{array}{r} x+y-z-1=0 \\ 2x+y-z-2=0 \end{array}$$

与直线：

$$L_2: \frac{x}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{0}$$

间的距离。

解.

分析：在 L_1 决定的平面束中，找一个平面 π 与直线 L_2 平行，则问题转化为求平面 π 与直线 L_2 的距离。 □

先说明这两条直线是异面的，因为

$$\mathbf{s_1} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0,-1,-1)$$

$$\mathbf{s_2} = (-2,1,0)$$

$$L_1 : M_1(1,0,0), \quad L_2 : M_2(0,0,-2), \quad \overrightarrow{M_1M_2} = (-1,0,-2)$$

$$\left[\mathbf{s_1}\mathbf{s_2}\overrightarrow{M_1M_2}\right] = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3$$

其次，寻找 L_1平面束中与直线 L_2 平行的平面 π,注意：其法向量与 L_2 垂直，设为

$$\lambda_1(x+y-z-1)+\lambda_2(2x+y-z-2)=0$$

$$(\lambda_1+2\lambda_2)x+(\lambda_1+\lambda_2)y-(\lambda_1+\lambda_2)z-\lambda_1-2\lambda_2=0$$

$$\mathbf{s_2}\bullet(\lambda_1+2\lambda_2,\lambda_1+\lambda_2,-\lambda_1-\lambda_2)=0$$

$$-2\lambda_1-4\lambda_2+\lambda_1+\lambda_2=0$$

$$\lambda_1+3\lambda_2=0$$

$$\lambda_1=-3,\lambda_2=1$$

得到平面 π 的方程为：

$$-x-2y+2z+1=0$$

计算 L_2 上点 $M_2(0,0,-2)$ 到 平面 π 的距离：

$$d = \frac{|2(-2)+1|}{\sqrt{9}} = \frac{3}{3} = 1$$

所以直线 L_1 到直线 L_2 的距离等于 1.

谢 谢！