线性代数
第八章 二次型与二次曲面

曾吉文
哈尔滨工业大学

2022年 12 月

本章介绍：

- 实二次型；
- 实二次型的标准型；
- 正定实二次型；
- 空间中的曲面与曲线；
- 二次曲面

1 实二次型

- 二次型的定义及其矩阵
- 矩阵的合同关系
- 化实二次型为标准型
- 正交化方法化二次型为标准型
- 拉格朗日配方法化二次型为标准型
- 初等变换法，化实二次型为标准型

2 正定实二次型

- 实二次型的惯性定律

8.1 实二次型

8.1.1 二次型的定义及其矩阵

定义 1.1

(书中定义 8.1，P202) 给定 n 个变量 $x_1, x_2, ..., x_n$，系数 $a_{ij} \in \mathbf{F}$，定义n 元二次齐次函数：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_{11}x_1^2 & +2a_{12}x_1x_2 & +\cdots & +2a_{1n}x_1x_n \\ & +a_{22}x_2^2 & +\cdots & +2a_{2n}x_2x_n \\ & & + & \cdots \\ & & + & a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

称为数域 $\mathbf{F}$ 上的 n 元二次型，简称二次型。如果系数是复数，就称复二次型，如果系数是实数，就称实二次型。

- 本书只讨论实二次型。

二次型的等价表示：上面定义中系数的下标，对应矩阵主对角线右上方的元素：$a_{ij}, i \leq j$, 如果令 $a_{ji} = a_{ij}, j > i$,则有二次型的等价表示：

$$
\begin{array}{lcccc}
f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_{11}x_1^2 & +a_{12}x_1x_2 & +\cdots & +a_{1n}x_1x_n \\
+a_{21}x_2x_1 & +a_{22}x_2^2 & +\cdots & +a_{2n}x_2x_n \\
 & & +\cdots & \\
+a_{n1}x_nx_1 & +a_{n2}x_nx_2 & +\cdots & +a_{nn}x_n^2 \\
= & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j & & \cdots\cdots(2)
\end{array}
$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

二次型的矩阵表示:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = X'AX \quad \cdots\cdots(3)$$

此处，矩阵 $A = A'$，是对称矩阵。

1. 一个二次型决定了一个对称矩阵 A. 反之也对。
2. 称A 为二次型 $f(x_1, x_2, ..., x_n)$的矩阵。
3. A 的秩称为二次型的秩。

例如，二次型

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_4 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 6x_2x_3 + 4x_4^2 + 3x_3x_4$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & \frac{3}{2} \\ 2 & 0 & \frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix}, f = X'AX$$

8.1.2 矩阵的合同关系

主要是解决二次型的变化问题，化为简单的标准型。

自变量

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

可以看作某个 $\mathbf{R}^n$ 基底下的坐标(无特别约定，可以是标准基底)：

$$X = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

如果

$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$$

是 $\mathbf{R}^n$ 的另外一个基底，且过渡矩阵为：

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} C$$

向量 X 的新坐标为

$$X = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = CY \quad \cdots\cdots (4)$$

由此得到等价表达方式:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = X'AX = Y'C'ACY$$

$$= \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} C'AC \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$B = C'AC$$

因此看出：

- 二次型的表达方式，跟基底的选择有一定关系。即本质上相等的二次型，由于基底的选择不同，表达方式方式完全不一样。

定义 1.2

(书中定义 8.2，P204) 对于两个 n 阶方阵 A, B ，如果存在可逆矩阵 C ，满足

$$B = C'AC$$

称矩阵 A 与矩阵 B 合同。

矩阵集合的合同关系有下列性质：

1. 自反性：任一个方阵 A 与自身合同；
2. 对称性：若矩阵 A 与矩阵 B 合同，则矩阵 B 与 矩阵A 也合同；
3. 传递性：若矩阵 A 与矩阵 B 合同，且矩阵 B 与矩阵 C 合同，则矩阵 A 与 矩阵C 也合同；

- 实对称矩阵 A，存在正交矩阵 P ，使得：$P^{-1}AP = D$，对角矩阵。注意到：$P'P = E$，所以有：$P'AP = D$，即实对称矩阵与对角矩阵合同。一般，实对称矩阵，都是通过实矩阵实现合同关系。

8.2 化实二次型为标准型

本节讨论，如何将一个实二次型化成最简形式。特别注意，实对称矩阵，或实二次型，都是通过实可逆矩阵（实线性变换），化为标准型的。

过渡矩阵反映了同一个向量在不同基底下的坐标变换关系：$X = CY$

1. $X \to Y = C^{-1}X$,称为可逆线性变换（矩阵矩阵 C 可逆）
2. 若 C 为正交矩阵，上述变换，称为正交线性变换。
3. 两个规范基下的过渡矩阵C 是正交矩阵，决定了一个正交线性变换。

Theorem 1.3

假设实线性空间 R^n 有一个规范基: $\Omega_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$, 再设有一个基$\Omega_2 = \{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n\}$。从基 Ω_1 到基 Ω_2 的过渡矩阵设为 C, 则矩阵 C 为正交矩阵, 当且仅当基 Ω_2 也是规范基。

Proof.

从 Ω_1 到 Ω_2 的过渡矩阵设为:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

□

$$
\begin{aligned}
(\beta_i, \beta_j) &= (\sum_{k=1}^{n} \alpha_k c_{ki}, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k c_{kj}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} c_{ki} (\alpha_k, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k c_{kj})
\end{aligned}
$$

注意有：

$$
(\alpha_k, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k c_{kj}) = c_{kj}(\alpha_k, \alpha_k) = c_{kj}
$$

因此有

$$
(\beta_i, \beta_j) = \sum_{k=1}^{n} c_{ki} c_{kj}
$$

$$= \begin{pmatrix} c_{1i} & c_{2i} & \cdots & c_{ni} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix}$$

令：

$$C = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_n \end{pmatrix}$$

则有：

$$(\gamma_i, \gamma_j) = (\beta_i, \beta_j)$$

即过渡矩阵 C 为正交矩阵，当且仅当 $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ 为规范基。

如果

$$f = X'AX$$

希望找到可逆矩阵 $C, X = CY$

$$f = X'AX = Y'C'ACY = Y' \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} Y$$

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

- 只含平方项的二次型，称为标准型

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

- 规范二次型，形如

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_p y_p^2 - \lambda_{p+1} y_{p+1}^2 - \cdots - \lambda_n y_n^2$$

$0 \leq \lambda_1, ..., \lambda_p, \lambda_{p+1}, ..., \lambda_n$

8.2.1 正交化方法化二次型为标准型

根据第六章定理 6.6，对于实对称矩阵 A，存在正交矩阵 P，使得：$P^{-1}AP = P'AP = D$ 为对角矩阵，所以有：

Theorem 1.4

*(书中定理 8.1，P206）*对 n 元实二次型 $f = X'AX$，存在正交线性变换：

$$X = PY, f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

Proof.

$$P'AP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

□

$$f = X'AX = Y'P'APY = Y' \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} Y$$
$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

Example 1

设二次型

$$f = -2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4$$

用正交变换，化为标准型。

Proof.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{求特征值：} |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1+\lambda & 1+\lambda & \lambda^2-1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & \lambda+1 \\ & 0 & \lambda+1 & \lambda+1 \\ -1 & 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

□

Proof.

$$= (\lambda+1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda-1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda-1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^3(\lambda-3)$$

有两个特征值：$\lambda_1 = -1, m_1 = 3; \lambda_2 = 3, m_2 = 1$

求特征向量：$\lambda_1 = -1, (-E - A)X = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

$\square$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 + x_3 - x_4$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

正交化；$\eta_1 = \xi_1, \eta_2 = \xi_2 - \dfrac{(\eta_1, \xi_2)}{(\eta_1, \eta_1)}\eta_1$

$$\eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\eta_3 = \xi_3 - \frac{(\eta_2, \xi_3)}{(\eta_2, \eta_2)}\eta_2 - \frac{(\eta_1, \xi_3)}{(\eta_1, \eta_1)}\eta_1$$

$$\eta_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}$$

单位化：$P_1=\dfrac{\eta_1}{|\eta_1|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $P_2=\dfrac{\eta_2}{|\eta_2|}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}$

$$P_3=\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3, (3E - A)X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = x_4, x_2 = -x_4, x_3 = -x_4$$

$$\xi_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, P_4 = \frac{\xi_4}{|\xi_4|} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Let $X = PY, f(X) = f(Y) = -y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 + 3y_4^2$

8.2.2 拉格朗日配方法化二次型为标准型

本方法基本来自于中学所学的配方法

Example 2

设

$$
\begin{aligned}
f = 4x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_1x_4 \\
+4x_2x_3 - 4x_2x_4 - 8x_3x_4
\end{aligned}
$$

试用配方法，找一个可逆变换，化二次型为标准型。

解.

$$
\begin{aligned}
f = 4x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_1x_4 \\
+4x_2x_3 - 4x_2x_4 - 8x_3x_4 \\
= (2x_1)^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1x_3 + x_3^2 - 4x_1x_4 + x_4^2 \\
+2x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4 + x_2^2 - 3x_4^2 + 2x_2x_3 - 2x_2x_4 - 6x_3x_4
\end{aligned}
$$

$\square$

$$
\begin{aligned}
f &= (2x_1 + x_2 + x_3 - x_4)^2 + x_2^2 - 3x_4^2 + 2x_2x_3 - 2x_2x_4 - 6x_3x_4 \\
f &= (2x_1 + x_2 + x_3 - x_4)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - 2x_2x_4 + x_4^2 \\
&\quad -2x_3x_4 - x_3^2 - 4x_4^2 - 4x_3x_4 \\
f &= (2x_1 + x_2 + x_3 - x_4)^2 + (x_2 + x_3 - x_4)^2 \\
&\quad -x_3^2 - 4x_4^2 - 4x_3x_4 \\
f &= (2x_1 + x_2 + x_3 - x_4)^2 + (x_2 + x_3 - x_4)^2 - (x_3 + 2x_4)^2
\end{aligned}
$$

令

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \\ y_2 &= x_2 + x_3 - x_4 \\ y_3 &= x_3 + 2x_4 \\ y_4 &= x_4 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = C^{-1}X$$

$$X = CY, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{可逆矩阵}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, \text{可逆线性变换}$$

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2, f\text{的秩为}3$$

Example 3

化二次型为标准型，求可逆线性变换矩阵：

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

解.

第一步，令

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + y_2 \\ x_2 &= y_1 - y_2 \\ x_3 &= y_3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

□

解.

$$f=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

□

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
f &= 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3 \\
&= 2(y_1^2 - 2y_1y_3 + y_3^2) - 2y_3^2 - 2y_2^2 + 8y_2y_3 \\
&= 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2^2 - 4y_2y_3 + 4y_3^2) + 6y_3^2 \\
&= 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2 - 2y_3)^2 + 6y_3^2
\end{aligned}
$$

$$z_1 = y_1 - y_3, z_2 = y_2 - 2y_3, z_3 = y_3$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$f = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2$$

若令：$w_1 = \sqrt{2}z_1, w_2 = \sqrt{6}z_3, w_3 = \sqrt{2}z_2$, 则还有规范型：

$$f = w_1^2 + w_2^2 - w_3^2$$

配方法：

1. 如果有平方项 $x_i, i = 1, 2, ..., n$,则依次把含有 $x_1 x_i$ 的项配方，$x_2 x_i, i \geq 2$ 的项配方，...;
2. 如果不含平方项，则做可逆变换，得到平方项，重复第一个步骤；

8.2.3 初等变换法，化实二次型为标准型

考虑矩阵合同变换的原理

$$A \to C'AC, C \text{ 可逆,表示为初等矩阵乘积}$$
$$C = P_1P_2\cdots P_l, C' = P_l'P_{l-1}'\cdots P_1'$$
$$A \xrightarrow[\text{行列对称初等变换}]{\text{初等变换}} P_l'P_{l-1}'\cdots P_1'AP_1P_2\cdots P_l$$

构造一个 $2n\times n$ 矩阵：施行行列变换如下：

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} C' & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} C$$
$$= \begin{pmatrix} C'AC \\ C \end{pmatrix}$$

解释以上初等变换的含义：

1. 第一步。构造一个$2n \times n$ 阶矩阵：$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$
2. 对上述矩阵施行一个列变换 ：P, 同时对该矩阵的前 n 行施行一个行变换：P'
3. 直到矩阵$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$ 的前 n 行变成对角矩阵，则下半部分为坐标变换矩阵 C
4. 注意 P' 的行就是 P 的列，所以，对 A 施行的列变换和对A 施行的行变换是完全相同的，因此要两边同时进行。

Example 4

用初等变换法，化二次型为标准型：

$$f(X) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

解.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 + r_2]{c_1 + c_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

$$\xrightarrow[r_3+r_1]{c_3+c_1}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2-\frac{1}{2}r_1]{c_2-\frac{1}{2}c_1}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2+r_3]{c_2+c_3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[2r_2]{2c_2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = CY = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} Y$$

$$f = 2y_1^2 + 6y_2^2 - 2y_3^2$$

Example 5

初等变换化二次型为标准型，求可逆线性变换矩阵：

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1+r_2]{c_1+c_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+r_1]{c_3+c_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2-\frac{1}{2}r_1]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-r_3]{c_2-c_3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[2r_2]{2c_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} Y$$

$$f=2y_1^2+6y_2^2-2y_3^2$$

8.3 正定实二次型

8.3.1 实二次型的惯性定律

实二次型的标准型的在实可逆线性变换下，表现形式不唯一，但是非零系数个数，正负系数的个数是唯一的。

实可逆线性变换 $X = CY, C$ 为可逆实数矩阵。

Theorem 2.1

*(书中定理8.2, P213)*假设实二次型 $f = X'AX$ 经过实可逆线性变换 $X = C_1Y$ 和$X = C_2Z$ 分别化为如下标准型：

$$f = k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \cdots + k_ny_n^2$$
$$f = l_1z_1^2 + l_2z_2^2 + \cdots + l_nz_n^2$$

则有：

1. $k_1, k_2, ..., k_n$ 中正数的个数等于$l_1, l_2, ..., l_n$ 中正数的个数,正惯性指数
2. $k_1, k_2, ..., k_n$ 中负数的个数等于$l_1, l_2, ..., l_n$ 中负数的个数，负惯性指数
3. $k_1, k_2, ..., k_n$ 中非零数的个数等于$l_1, l_2, ..., l_n$ 中负零数的个数，即矩阵 A 的秩：$R(A)$.

只需证明 1 和 3. 但是 3 的证明是显然的。以下证明 1.

Proof.

Suppose that

$$\begin{aligned} f &= k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + k_py_p^2 - k_{p+1}y_{p+1}^2 - \cdots - k_ny_n^2 \\ f &= l_1z_1^2 + l_2z_2^2 + l_qz_q^2 - l_{q+1}z_{q+1}^2 - \cdots - l_nz_n^2 \end{aligned}$$

$k_i, l_i, \geq 0, i \geq 1$

设有向量 α,设 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ 是α 在第一个基下的向量坐标:

$$\alpha = y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 + \cdots + y_p\alpha_p + y_{p+1}\alpha_{p+1} + \cdots + y_n\alpha_n$$

□

同理设 $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ 是α 在第二个基下的向量坐标：

$$\alpha = z_1\gamma_1 + z_2\gamma_2 + \cdots + z_q\gamma_q + z_{q+1}\gamma_{q+1} + \cdots + z_n\gamma_n$$

考虑向量空间的交集：

$$\mathbf{V} = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p) \cap L(\gamma_{q+1}, \gamma_{q+2}, \cdots, \gamma_n)$$

若有向量$\alpha \in \mathbf{V}$, 则有：

$$\begin{aligned} \alpha = & \ y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 + \cdots + y_p\alpha_p \\ = & \ z_{q+1}\gamma_{q+1} + \cdots + z_n\gamma_n \end{aligned}$$

分别代入二次型 f 的两个表达式计算，得到：

$$
\begin{aligned}
f &= k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + k_py_p^2 \\
&= -l_{q+1}z_{q+1}^2 - \cdots - l_nz_n^2 \\
\Rightarrow & \ k_iy_i^2 = 0, l_{q+j}z_{q+j}^2 = 0, i = 1, ..., p, j = 1, ..., n-q
\end{aligned}
$$

由此可知，若 $k_i \neq 0$ 则 $y_i = 0$，若 $l_{p+j} \neq 0$ 则 $z_{p+j} = 0$;若 $k_i = 0$, 则取 $y_i = 0$，若 $l_{p+j} = 0$ 则 取$z_{p+j} = 0$; 不影响 $\alpha \in \mathbf{V}$. 总之，得到结论： $\forall \alpha \in \mathbf{V}, \alpha = 0$.

其次，我们证明下列向量组是线性无关组：

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p, \gamma_{q+1}, \gamma_{q+2}, \cdots, \gamma_n$$

若有 $p+n-q$ 个数，使得下式成立：

$$a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_p\alpha_p+a_{q+1}\gamma_{q+1}+a_{q+2}\gamma_{q+2}+\cdots+a_n\gamma_n=0$$

$$a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_p\alpha_p=-a_{q+1}\gamma_{q+1}-a_{q+2}\gamma_{q+2}-\cdots-a_n\gamma_n$$

$$a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_p\alpha_p=$$

$$=-a_{q+1}\gamma_{q+1}-a_{q+2}\gamma_{q+2}-\cdots-a_n\gamma_n=\alpha\in\mathbf{V}$$

$$\alpha=0,a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_p\alpha_p=0$$

$$-a_{q+1}\gamma_{q+1}-a_{q+2}\gamma_{q+2}-\cdots-a_n\gamma_n=0$$

$$a_1,a_2,\ldots,a_p,a_{q+1},\ldots,a_n=0$$

n 维向量空间线性无关的向量个数不超过 n，所以有：

$$p+n-q\leq n\Rightarrow p\leq q.$$

同理可证： $q\leq p$. 最后有： $p=q$.

一个标准型的二次型，可以经过实可逆线性变换，进一步化为规范性：

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+q}^2$$

p, q 分别为正负惯性指数

如果不计自变量的排列顺序，规范型是唯一的。

8.3.2 正定二次型

定义 2.2

（书中定义8.3，P214）一个 n 元实二次型：$f = X'AX$,如果对任意非零向量：$X \neq 0$, 都有：

$$f(X) = X'AX > 0$$

称这个二次型为正定二次型，矩阵 A 称为正定矩阵。

什么样的实对称矩阵是正定的？我们来解决这个问题。

Theorem 2.3

(书中定理8.3，P214) 一个 n 元实二次型 $f = X'AX$ 为正定的充分必要条件是：正惯性指数等于 n.

Proof.

充分性：设

$$
\begin{aligned}
X = CY, f(X) = X'AX &= Y'C'ACY \\
&= k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \cdots + k_ny_n^2 \\
& k_1, k_2, ..., k_n > 0 \\
X \neq 0 \Rightarrow Y &= C^{-1}X \neq 0 \\
\Rightarrow f(X) = f(Y) = k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \cdots + k_ny_n^2 &> 0 \\
& f \text{ 是正定二次型}
\end{aligned}
$$

□

必要性：设 n 元二次型 $f(X)=X'AX$ 是正定的，我们证明惯性指数为 n. 反证法：如果惯性指数小于 n, 不妨设:

$$X=CY, f(X)=f(Y)=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2$$
$$k_n\le 0$$

$$Y_0=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\ne 0, X_0=CY_0\ne 0$$

$$f(X_0)=f(Y_0)=k_n\le 0$$

这是一个矛盾。

推论 2.4

(书中推论8.1，P215)实二次型$f = X'AX$ 为正定二次型的充分必要条件是：f 的矩阵 A 的特征值全大于零。

Proof.

设矩阵 A 的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, 则有正交矩阵 P, 满足

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

所以

$$X = PY, f(X) = X'AX = Y'P'APY = \\ Y'P^{-1}APY = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

根据前面定理8.3

$$\text{all } \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_d > 0$$

当且仅当 A 是正定矩阵。

推论 2.5

(书中推论8.2, P215)实二次型$f = X'AX$ 为正定二次型的充分必要条件是:存在实可逆矩阵 $Q, A = Q'Q$

Proof.

充分性：令 $Y = QX$, 则有$X \neq 0, Y \neq 0$

$$f(X) = X'AX = X'Q'QX == Y'Y = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 > 0$$

□

必要性：存在正交矩阵 P, 使得

$$P'AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \lambda_i > 0, i = 1, 2, ..., n$$

$$A = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P'$$

$$Q = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P', A = Q'Q$$

推论 2.5（书中推论8.2）实际说明了一个结论：实对称矩阵 A 是正定的，当且仅当矩阵 A 与单位矩阵合同：即存在实可逆矩阵：

$$P, P'AP = E.$$

Example 6

设矩阵 A 是正定矩阵，证明伴随矩阵 A^* 也是正定矩阵。

根据上面的结论，有可逆矩阵Q

$$A = Q'Q \Rightarrow A^{-1} = Q^{-1}(Q^{-1})'$$

$$\Rightarrow A^{-1} \text{ 是对称矩阵}$$

$$A^* = |A|A^{-1} \text{ 是对称矩阵}$$

$$P'AP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \lambda_i > 0, i = 1, ..., n$$

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i > 0, P^{-1}A^{-1}P = \mathrm{Diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \cdots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$$

$$P^{-1}|A|A^{-1}P = \mathrm{Diag}(\frac{|A|}{\lambda_1}, \frac{|A|}{\lambda_2}, \cdots, \frac{|A|}{\lambda_n})$$

$$P'A^*P = P^{-1}|A|A^{-1}P = \begin{pmatrix} \frac{|A|}{\lambda_1} & & & \\ & \frac{|A|}{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{|A|}{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

$$\frac{|A|}{\lambda_i} > 0, i = 1, 2, ..., n$$

A^*为正定矩阵。

Example 7

设 A, B 都是正定矩阵，证明$A+B$ 也是正定矩阵

解.

$$\begin{aligned} X \neq 0, X'AX > 0, X'BX > 0 \\ \Rightarrow X'(A+B)X = X'AX + X'BX > 0 \\ (A+B)' = A' + B' = A + B \\ \Rightarrow A + B \text{ 是正定矩阵} \end{aligned}$$

□

给定 n 阶方阵 A

$$a_{11}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \cdots$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

分别称为矩阵 A 的 $1, 2, ..., n$ 阶顺序主子式。

Theorem 2.6

*(书中定理8.4, P216)*实对称矩阵 A 为正定的充分必要条件是：A 的各阶顺序主子式都大于零，即

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \cdots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

Proof.

必要性：有正交矩阵P

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{all } \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n > 0$$

□

$$\Rightarrow |A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i > 0$$

$$X_{n-1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}, f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0) = X'_{n-1} A X_{n-1}$$

$$= \begin{pmatrix} X'_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1,n-1} & * \\ * & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= X'_1 A_{n-1,n-1} X_1 = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_{n-1} \end{pmatrix} A_{n-1,n-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$$

也是正定的，所以：$|A_{n-1,n-1}| > 0.$

一般有：

$$
\begin{aligned}
g(x_1, x_2, ..., x_i) &= f(x_1, x_2, ..., x_i, 0..., 0) \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_i \end{pmatrix} A_{ii} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

是正定的，所以有：$|A_{ii}| > 0.$

充分性：$n = 1, f(x) = a_{11}x^2$ 显然是正定的。对 $n = 2$

$$
\begin{aligned}
f &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\
&= a_{11}(x_{11} + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2)^2 + (a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}})x_2^2 \\
& a_{11} > 0, a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, \text{正定的}
\end{aligned}
$$

解.

假定对$n-1$，本命题成立，考虑一般 n 阶实对称矩阵 A. 由于前 $n-1$ 行和前 $n-1$ 列构成的矩阵，记为 A_{n-1} 满足条件，根据归纳法，A_{n-1} 是正定的矩阵，所以存在实可逆矩阵 P,

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha' & a_{nn} \end{pmatrix}, P'A_{n-1}P = E_{n-1}$$

$$\begin{pmatrix} P' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha' & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P'A_{n-1} & P'\alpha \\ \alpha' & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P'A_{n-1}P & P'\alpha \\ \alpha'P & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E_{n-1} & P'\alpha \\ \alpha'P & a_{nn} \end{pmatrix}$$

□

考虑一下合同变换

$$\begin{pmatrix} E_{n-1} & P'\alpha \\ \alpha'P & a_{nn} \\ E_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2-\alpha'Pr_1]{c_2-c_1P'\alpha} \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & a_{nn}-\alpha'PP'\alpha \\ E_{n-1} & -P'\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ -\alpha'P & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n-1} & P'\alpha \\ \alpha'P & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n-1} & -P'\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & a_{nn}-\alpha'PP'\alpha \end{pmatrix}$$

再考虑一下：$a_{nn}-\alpha'PP'\alpha$ 是什么数？我们证明这是一个正数。

根据前面的合同关系，我们有：

$$a_{nn} - \alpha' P P' \alpha = \begin{vmatrix} E_{n-1} & P'\alpha \\ \alpha' P & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= |P'||P||A| = |P|^2|A| > 0$$

$$\text{Let: } a = \sqrt{a_{nn} - \alpha' P P' \alpha}$$

$$\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & a_{nn} - \alpha' P P' \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

根据前面进行的三个合同变换，我们有：

$$Q = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n-1} & -P'\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$$

$$Q'AQ = E$$

矩阵 A 与单位矩阵合同，所以 A 是正定矩阵

Example 8

判定二次型的正定性：

$$f(x,y,z)=5x^2+y^2+2z^2+4xy+4xz+2yz$$

解.

$$A=\begin{pmatrix}5&2&2\\2&1&1\\2&1&2\end{pmatrix}$$

A 有三个顺序主子式：

$$|A_1|=5, |A_2|=\begin{vmatrix}5&2\\2&1\end{vmatrix}=1, |A|=\begin{vmatrix}5&2&2\\2&1&1\\2&1&2\end{vmatrix}=1$$

A 是正定矩阵。

定义 2.7

（书中定义8.4，P217） 对n 元实二次型 $f = X'AX$，如果对任意 n 维非零实向量 X，有$f = X'AX < 0$,称 这个二次型是负定的，矩阵 A 称为负定矩阵。

$f = X'AX$ 是负定，当且仅当 $-f = X'(-A)X$ 是正定的，所以有：

定义 2.8

（书中推论8.3，P217） n 元实二次型 $f = X'AX$是负定的，或者矩阵 A 是负定矩阵，当且仅当：A的偶数阶顺序主子式是正数，奇数阶顺序主子式是负数。

8.4 空间中的曲面与曲线

空间中的曲面用S 代表，空间中的方程用 $F(x,y,z)=0$表示。如果S 中任何一点 $M(x,y,z)$ 满足方程：$F(x,y,z)=0$，满足这个方程的点也在曲面 S 上，我们称这个方程是曲面 S 的方程，曲面 S 也称为这个方程的图形。

本节的任务：

1. 已知一个曲面，建立曲面方程；
2. 已知一个方程，决定这个方程代表的曲面。

8.4.1 球面

已知球心：(x_0, y_0, z_0) 和 球的半径 r，则球面上任意一点$M(x, y, z)$满足：

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=r$$

球面的标准方程为：

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$

展开后，形如：

$$x^2+y^2+z^2-ax-by-cz+c=0$$

特点：

1. x^2, y^2, z^2 的系数相同
2. 没有 xy, xz, yz 的项
3. 三元二次方程。
4. 满足以上条件，就可以配方，化成标准形式。

8.4.2 柱面

1. 一条固定的定直线；
2. 一条固定的定曲线–准线；
3. 一条移动的动直线—母线，沿着准线移动，方向与定直线平行，产生的轨迹，称为柱面。

Example 9

讨论空间方程 $x^2+y^2=r^2$ 图形。

1. $M(x,y,z)$ 在曲面上，当且仅当：$x^2+y^2=r^2$
2. 准线方程为平面 XOY 上的圆：$\left\{\begin{array}{c} x^2+y^2=r^2 \\ z=0 \end{array}\right\}$
3. 动直线沿着准线移动，与 $Z-$ 轴平行，得到一个柱面。

一般情况下，柱面方程的标准形式为，某个平面上的曲线方程作为准线，动直线垂直于该平面，沿准线移动形成柱面：

1. 准线方程：$\left\{ \begin{array}{c} F(x,y)=0 \\ z=0 \end{array} \right\}$
2. 柱面方程：$F(x,y)=0$

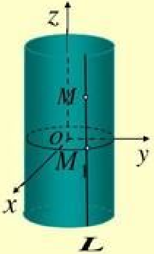
1. 平行于 $Z-$ 轴的椭圆柱面方程：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
2. 平行于 $Z-$ 轴的双曲柱面方程：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
3. 平行于 $Z-$ 轴的抛物柱面方程：$x^2=2py, p>0$

柱面举例

圆柱面:

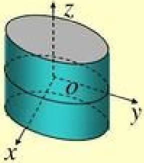
$x^2+y^2=R^2$ 母线//z 轴

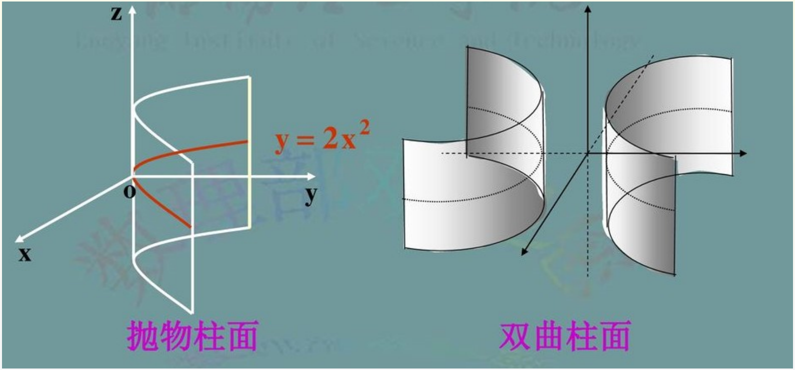
$x^2+z^2=R^2$ 母线//y 轴



椭圆柱面

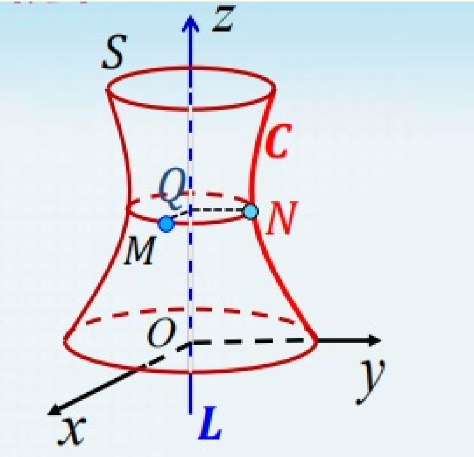
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ 母线 // z轴




z
$y = 2x^2$
o
y
x
抛物柱面
双曲柱面

8.4.3 旋转曲面

- 某个平面上一条曲线 C：称为母线；
- 同一个平面上一条定直线：L, 称为旋转轴
- 母线C 绕着同一个平面上的旋转轴 L，旋转一周，形成一个曲面，叫旋转曲面。



曲线方程：C 在平面 YOZ 上， $C:\left\{\begin{array}{c} f(y,z)=0 \\ x=o \end{array}\right\}$

情形1， 曲线 C 绕 Z 轴旋转一周：

假设 $M(x, y.z)$ 是曲面 S 上任意一个点，曲线 C 上有一个点 $N(0, y_1, z_1)$ 与 M 在同一个圆周上，所以有：

$$z = z_1, x^2 + y^2 = y_1^2 \Rightarrow y_1 = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$

带入曲线方程：

$$f(y_1, z_1) = f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$$

这个是 YOZ 上曲线 C 绕 Z 轴旋转的曲面方程。

情形2， 曲线 C 绕 y 轴旋转一周：同理可得

$$f(y_1, z_1) = f(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0$$

这个是 YOZ 上曲线 C 绕 y 轴旋转的曲面方程。

对于平面 XOZ 或者 XOY 上的曲线形成的旋转曲面，类似讨论，得到旋转曲面方程。

总结一下规律：曲线 C 在某一个平面上，绕该平面的一根轴旋转一周：对曲线方程做如下变量替代：

1. 旋转轴所在的变量x_1保持不变；
2. 另外一个轴变量x_2 换成$\pm\sqrt{x_2^2+x_3^2}$
3. x_3 是平面外的第三个坐标轴变量。

由此可得曲面旋转方程。

Example 10

求直线$\left\{\begin{array}{c} z=ky \\ x=0 \end{array}\right\}$绕 z 轴形成的旋转曲面。

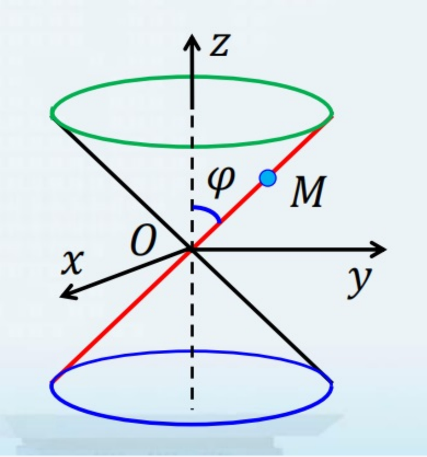
解.

曲线在 YOZ 平面上，绕其中的 Z 轴旋转，所以有：

$$z=\pm k\sqrt{y^2+x^2}\Rightarrow z^2=k^2(x^2+y^2)$$

这个旋转曲面，叫圆锥面。 □

实际上，是两条相交直线，其中一条绕另外一条旋转一周，形成的曲面，叫圆锥面。


z
φ
M
O
x
y

Example 11

求双曲线$\left\{\begin{array}{c}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1\\ y=0\end{array}\right\}$分别绕 x 轴和 Z 轴的旋转曲面方程。

解.

1. 绕 Z 轴旋转：

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$$

称为旋转单叶双曲面。平面$z=h$ 与曲面的截面是圆。平面$y=h$ 与曲面的截面是双曲线:

$$\begin{array}{c}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1-\frac{y^2}{a^2}\\ y=h\end{array}$$

平面 $y=a$ 与曲面的截面是两条直线。 □

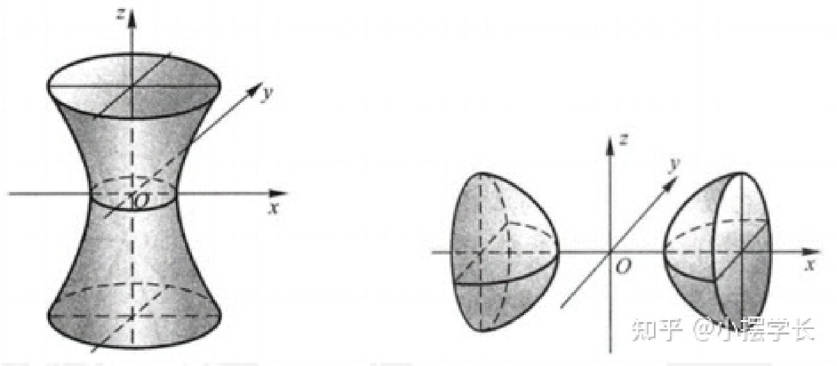
解.

2.绕 x 轴旋转:

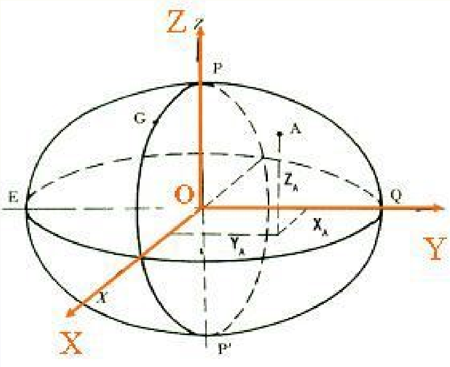
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2+y^2}{b^2}=1$$

称为旋转双叶双曲面。平面 $z=h$ 与曲面的截面: $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{z^2}{b^2}\\ z=h\end{cases}$ 是双曲线。平面 $x\geq a$ 与平面的截面是圆 $\begin{cases}\frac{z^2+y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1\\ x=h\geq a\end{cases}$. □

旋转单叶双曲面和旋转双叶双曲面参考下图

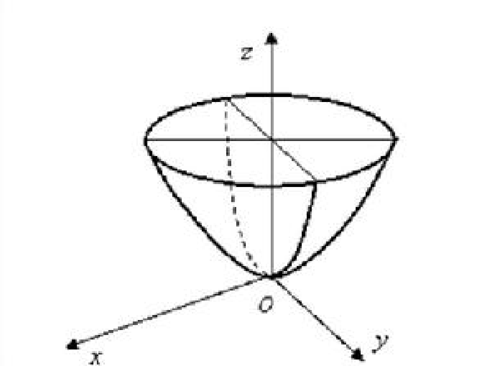


椭圆曲线： $\begin{matrix} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{matrix}$ 绕 y 轴旋转: $\frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



称为旋转椭球面

抛物曲线：$\begin{cases} y^2 = 2pz \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转:$x^2 + y^2 = 2pz$



称为旋转抛物面

8.4.4 空间曲线

8.4.4 空间曲线

空间曲线： 空间中两个曲面的交线，视为空间曲线

空间曲面方程 $S_1 : F(x, y, z) = 0$

空间曲面方程 $S_2 : G(x, y, z) = 0$

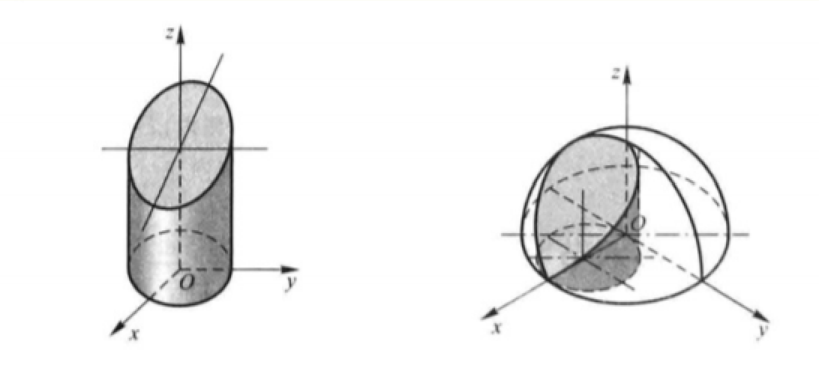
曲线方程为

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= 0 \\ G(x, y, z) &= 0 \end{aligned}$$

称为空间曲线的一般方程

Example 12

求柱面：$x^2+y^2=1$ 与平面：$2x+3z=6$ 的交线。柱面由XOY 面上的圆为准线，母线平行于Z 轴移动产生。平面是XOZ 面上的直线为准线，母线平行于Y 轴产生。见下图左。

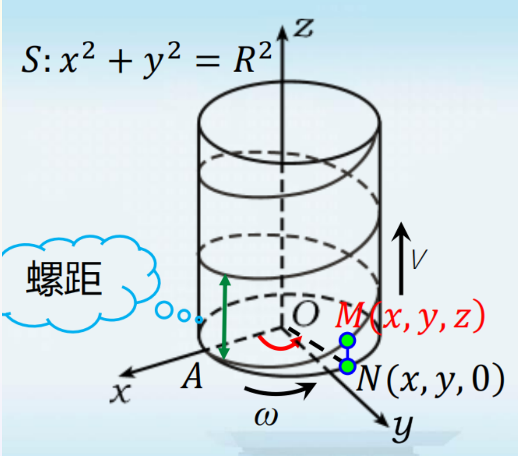


Example 13

判断曲线方程：$\left\{\begin{array}{c} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ (x-\frac{a}{2})^2+y^2=(\frac{a}{2})^2 \end{array}\right\}$. 第一个方程代表球面的上半部分，这个球面以坐标原点为圆心，半径为a. 第二个为柱面方程，准线是XOY 面上的圆，圆心是$(\frac{a}{2},0,0)$, 半径为$\frac{a}{2}$, 母线平行于Z 轴产生。见上图右。

Example 14

在半径为 R 的圆柱面上，动点 M 以角速度 ω 绕旋转轴转动，同时又以匀速 v 沿母线上升。求点 M 的运动轨迹。



解.

设 Z 轴为旋转轴，以时间 t 为参数。$t=0$, 动点在$A(R,0,0)$处。经过时间 t 后，动点M到达点 $M_t(x,y,z)$. M_t 在平面有一个投影点 $N_t(x,y,0)$. 角 $\angle AON=\omega t$. 所以：

$$
\begin{aligned}
x &= R\cos\omega t \\
y &= R\sin\omega t
\end{aligned}
$$

此外，动点 M 以平均 v 的速度上升，所以 $z=vt$, 这样得到动点 $M(x,y,z)$ 的参数方程：

$$
\left\{
\begin{aligned}
x &= R\cos\omega t \\
y &= R\sin\omega t \\
z &= vt
\end{aligned}
\right\}
$$

这条曲线，称为螺旋线。

投影曲线 空间中曲线C，向平面π的投影，在该平面产生的曲线，叫投影曲线。

投影曲线的产生： 一条垂直于平面 π 的直线，作为母线，沿着曲线C 移动，产生一个柱面，柱面与平面π 的交线，就是投影曲线。

求投影曲线方程： 设空间曲线方程为：

$$\left\{\begin{array}{l} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{array}\right\}$$

通过消元化，消去变量 z，得到母线（直线）垂直于平面XOY，沿着准线 C 移动形成的柱面：$H(x,y)=0$，这个柱面与XOY 的交线就是曲线C 在XOY 的投影曲线：投影曲线方程为，

$$\left\{\begin{array}{c} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{array}\right\}$$

Example 15

求曲线 C 分别在坐标面 XOY, ZOX 的投影：

$$C:\left\{\begin{array}{c} x^2+y^2+z^2=1, 1\geq z\geq 0 \\ x^2+y^2-x=0 \end{array}\right\}$$

解.

1. XOY 平面：注意到 $x^2+y^2-x=0$ 就是垂直XOY 平面的母线沿空间曲线 C移动形成的柱面，它与XOY 的交线就是投影曲线：

$$\left\{\begin{array}{c} x^2+y^2-x=0 \\ z=0 \end{array}\right\}$$

这是一个圆方程，圆心为$(\frac{1}{2},0,0)$，半径为 $\frac{1}{2}$.

□

2. XOZ 平面：消去变量 y, 得到柱面方程：$z^2+x=1$, 投影曲线为：

$$\left\{\begin{array}{c} z^2+x=1, 1\geq z\geq 0 \\ y=0 \end{array}\right\}$$

本节最后考察一下，已知曲线参数方程，如何求投影曲线：例如螺旋曲线参数方程为，

$$\left\{\begin{array}{c} x=a\cos\omega t \\ y=a\sin\omega t \\ z=vt \end{array}\right\}$$

1. XOY 平面：投影曲线为：

$$\left\{\begin{array}{c} x=a\cos\omega t \\ y=a\sin\omega t \\ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x^2+y^2=a^2 \\ z=0 \end{array}\right\}$$

2. XOZ 平面：投影曲线为：

$$\left\{\begin{array}{c} x=a\cos\omega t \\ y=0 \\ z=vt \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=a\cos\frac{\omega z}{v} \\ y=0 \end{array}\right\}$$

3. YOZ 平面：类似 XOZ 平面。

8.5 二次曲面

三元二次方程：

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \\ + a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + a_{44} = 0$$

在空间中对应的曲面，称为二次曲面。

用矩阵表达二次曲面方程：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, A = A', X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix}$$

$$X'AX + V'X + a_{44} = 0$$

根据二次型的定理，有正交变换：$X = PY$，化二次型为标准型：

$$X'AX = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$$

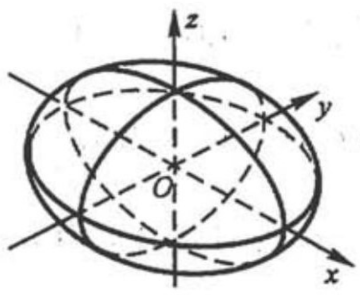
所以只要选取适当的直角坐标系，三元二次方程可以表达为：

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + ax' + by' + cz' + d = 0$$

8.5.1 椭球面

椭球面方程为：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, a>0, b>0, c>0.$$



a, b, c 称为椭球面的三个半轴.

- $a=b=c$, 椭球面是一个球面
- a,b,c 中有两个相等时，比如$a=b$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 是一个旋转椭球面(绕 Z–轴)。
- 椭球面关于三个坐标面，三根轴，坐标原点，都是对称的，而且变量范围：

$$|x|\leq a, |y|\leq b, |z|\leq c$$

- 用平面$z=h, |h|\leq c$去截割椭球面，得到交线是一条椭圆曲线：

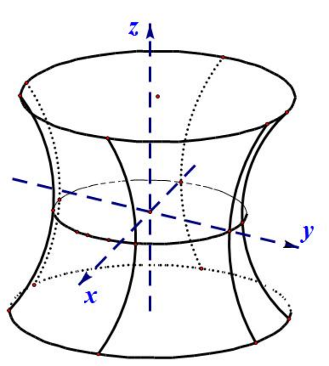
$$\left\{\begin{array}{c}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}\\ z=h\end{array}\right\}$$

对于平面 $x=h$ 或者 $y=h$, 结果类似。

8.5.2 单叶双曲面

单叶双曲面方程：

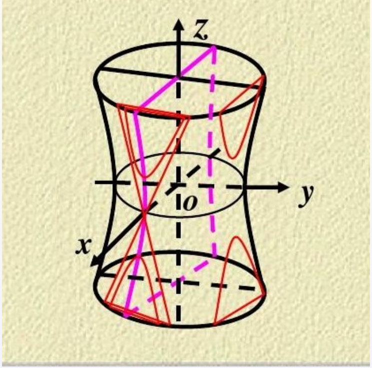
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, a>0, b>0, c>0.$$



- 平方项：两正一负，或者如：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, a>0, b>0, c>0$. 或者如：$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, a>0, b>0, c>0$.
- 用平面$z=h$ 截曲面，交线是椭圆：

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}\\ z=h\end{array}\right\}$$

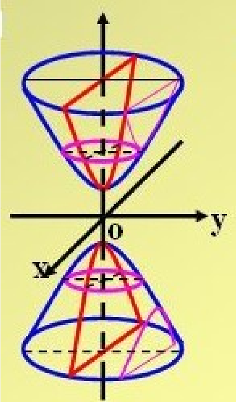
- 用平面 $y=h$ 截曲面，交线是双曲线：$\left\{\begin{array}{c}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2} \\ y=h\end{array}\right\}$.
  $|h|<b$,双曲线的实轴与 x 轴平行；$|h|>b$,双曲线的实轴与 z 轴平行；$|h|=b$,交线为两条直线：$\left\{\begin{array}{c}\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=0 \\ y=\pm b\end{array}\right\}$

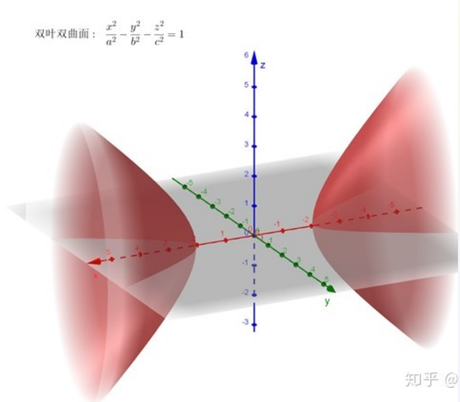


8.5.3 双叶双曲面

双叶双曲面方程:

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, a>0, b>0, c>0.$$





- 特点，平方项里，一个正号，两个负号。
- 用平面 $x=h$ 或者 $y=h$ 截断曲面，得到交线是双曲线

$$\left\{\begin{array}{c} -\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1+\frac{h^2}{a^2}, a>0, b>0, c>0. \\ x=h \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c} -\frac{x^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1+\frac{h^2}{b^2}, a>0, b>0, c>0. \\ y=h \end{array}\right\}$$

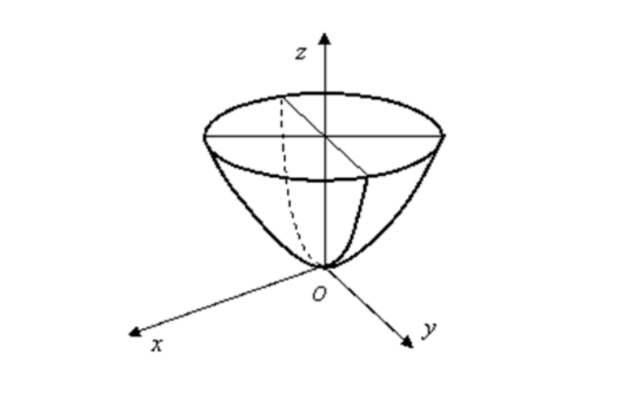
- 用平面 $z=h, |h|\geq c$ 截断曲面，得到交线是一个椭圆：

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1, a>0, b>0, c>0. \\ z=h \end{array}\right\}$$

8.5 4 椭圆抛物面

椭圆抛物面由下列方程表示：

$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z,(pq>0)$$



即 p,q 同号。

1. 用平面 $z=h, h$ 与 p, q 同号，截断椭圆抛物面，得到一个椭圆：

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{x^2}{2ph}+\frac{y^2}{2qh}=1\\ z=h\end{array}\right\}$$

2. 用 $x=h$ 或者 $y=h$截断椭圆抛物面，得到抛物线：

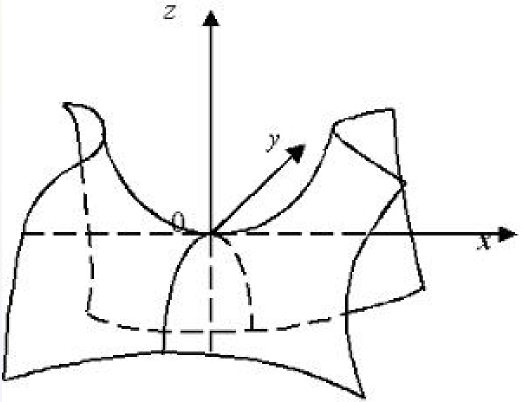
$$\left\{\begin{array}{c}y^2=2q(z-\frac{h^2}{2p})\\ x=h\end{array}\right\},\left\{\begin{array}{c}x^2=2p(z-\frac{h^2}{2q})\\ y=h\end{array}\right\}$$

分别平行于 yoz 和 xoz 平面。

8.5.5 双曲抛物面

双曲抛物面对应方程为：又称马鞍面。

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z, (pq > 0)$$



即 p, q 同号。

1 用平面 $z=h$ 截断双曲抛物面：得到双曲线，

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{x^2}{2ph}-\frac{y^2}{2qh}=1\\ z=h\end{array}\right\}$$

- h与 p,q 同号， 双曲线以 x 轴为平行实轴，任意实数y, 有对应 $\pm x$ 值。
- h与 p,q 异号，双曲线以 y 轴为平行实轴，任意实数x, 有对应 $\pm y$ 值。
- $z=h=0$,双曲线退化为直线。

2. 用平面 $x=h$ 或者 $y=h$ 平面，截断双曲抛物面，得到抛物线。

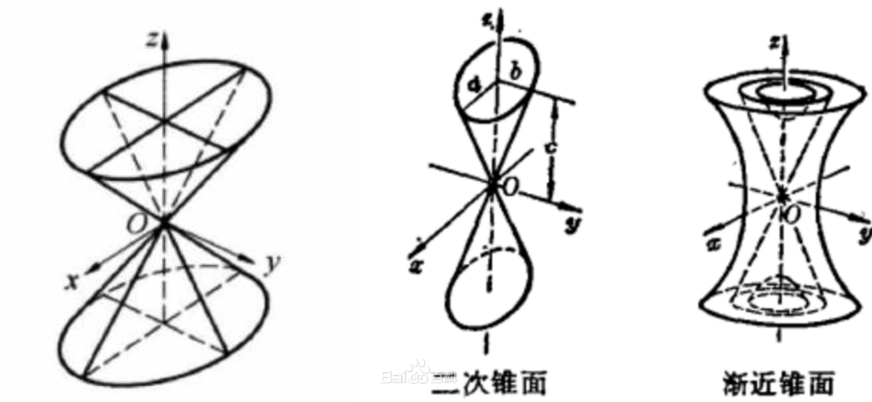
8.5.6 二次锥面

曲面方程：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,(a>0,b>0,c>0)$$

对应的图形，称为二次锥面。

- 特色：二次齐次方程，二正一负；或者一正二负；


z
O
x
y
z
a
b
c
O
x
y
二次锥面
z
O
x
y
渐近锥面

- 用平面 $z=h$ 截断二次锥面，得到椭圆：

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}\\ z=h\end{array}\right\}$$

- $a=b$ 时，得到圆锥面；
- 若点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 在二次锥面上，则任一点 $M(tx_0,ty_0,tz_0)$ 也在二次锥面上，意味着两个点：$O(0,0,0),M_0(x_0,y_0,z_0)$ 决定的直线都在二次锥面上。

8.5.7 二次曲面的一般方程

二次曲面的一般方程为：

$$
\begin{aligned}
a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \\
+a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + a_{44} = 0 \cdots\cdots (18)
\end{aligned}
$$

a_{ij} 都是实数。

二次曲面的矩阵表达方式:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \mathbf{v}=\begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix}$$

此处，$a_{ij}=a_{ji}$.二次曲面的矩阵表达为:

$$f(X)=X'AX+\mathbf{v}'X+a_{44}=0\cdots\cdots(19)$$

设对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 相应的特征向量为:

$$P_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

做正交变换: $X = PY = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$$f(X) = Y'P'APY + \mathbf{v}'PY + a_{44}$$
$$= \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + a'_{14}x' + a'_{24}y' + a'_{34}z' + a_{44} = 0$$

正交变换的几何意义：任何二次曲面，经过正交变换，保持原点不变，以正交标准向量：P_1, P_2, P_3 为基底，化为标准型：

$$g(x', y', z') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + a'_{14}x' + a'_{24}y' + a'_{34}z' + a_{44} = 0 \cdots (20)$$

注意，正交变换没有改变二次曲面的性质，或形状，所以我们按照标准型分类讨论。

1. 三个特征值：$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$都不为零，而且同号；再配方，相当于移动坐标轴，过程如下：

$$\lambda_1(x'+\frac{a'_{14}}{2\lambda_1})^2+\lambda_2(y'+\frac{a'_{24}}{2\lambda_2})^2+\lambda_3(z'+\frac{a'_{34}}{2\lambda_3})^2$$

$$-(\frac{a'^2_{14}}{4\lambda_1}+\frac{a'^2_{24}}{4\lambda_2}+\frac{a'^2_{34}}{4\lambda_3}-a_{44})=0$$

$$\text{Let } d=\frac{a'^2_{14}}{4\lambda_1}+\frac{a'^2_{24}}{4\lambda_2}+\frac{a'^2_{34}}{4\lambda_3}-a_{44}$$

得到

$$\lambda_1(x'+\frac{a'_{14}}{2\lambda_1})^2+\lambda_2(y'+\frac{a'_{24}}{2\lambda_2})^2+\lambda_3(z'+\frac{a'_{34}}{2\lambda_3})^2-d=0$$

进行坐标移动，令

$$\overline{x}=x'+\frac{a'_{14}}{2\lambda_1},\overline{y}=y'+\frac{a'_{24}}{2\lambda_2},\overline{z}=z'+\frac{a'_{34}}{2\lambda_3}$$

得到标准型：

$$\lambda_1\overline{x}^2+\lambda_2\overline{y}^2+\lambda_3\overline{z}^2=d\cdots\cdots(22)$$

- 注意到：$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$是同号的，如果 d 是异号，则二次曲面为虚椭圆方程，即不存在实数值满足方程；
- 如果 $d=0$，则二次曲面退化为一个点：(0,0,0)
- 如果 d 与$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$是同号的，则二次曲面为椭圆方程：

$$\frac{\overline{x}^2}{a^2}+\frac{\overline{y}^2}{b^2}+\frac{\overline{z}^2}{c^2}=1$$

$$a^2=\frac{d}{\lambda_1},b^2=\frac{d}{\lambda_2},c^2=\frac{d}{\lambda_3},$$

2. 假设二次曲面的系数矩阵 A 的特征值都不为零，三个特征值两正一负，不妨设：$\lambda_1>0,\lambda_2>0,\lambda_3<0$, 则二次曲面也可以化为标准形式（22）：

$$\lambda_1\overline{x}^2+\lambda_2\overline{y}^2+\lambda_3\overline{z}^2=d\cdots\cdots(22)$$

分三种情况讨论：

- $d>0$, 二次曲面为单叶双曲面方程：

$$\lambda_1\overline{x}^2+\lambda_2\overline{y}^2+\lambda_3\overline{z}^2=d$$

$$\frac{\lambda_1\overline{x}^2}{d}+\frac{\lambda_2\overline{y}^2}{d}-\frac{\lambda_3\overline{z}^2}{-d}=1$$

$$\frac{\overline{x}^2}{a^2}+\frac{\overline{y}^2}{b^2}-\frac{\overline{z}^2}{c^2}=1$$

$$a^2=\frac{d}{\lambda_1},b^2=\frac{d}{\lambda_2},c^2=\frac{-d}{\lambda_3}$$

- $d=0$, 曲面为二次锥面方程：

$$\frac{\overline{x}^2}{a^2}+\frac{\overline{y}^2}{b^2}-\frac{\overline{z}^2}{c^2}=0$$

$a^2=\frac{1}{\lambda_1},b^2=\frac{1}{\lambda_2},c^2=\frac{-1}{\lambda_3}$

- $d < 0$, 二次曲面是双叶双曲面：

$$\lambda_1\overline{x}^2 + \lambda_2\overline{y}^2 + \lambda_3\overline{z}^2 = d$$

$$-\frac{\lambda_1\overline{x}^2}{-d} - \frac{\lambda_2\overline{y}^2}{-d} + \frac{\lambda_3\overline{z}^2}{d} = 1$$

$$-\frac{\overline{x}^2}{a^2} - \frac{\overline{y}^2}{b^2} + \frac{\overline{z}^2}{c^2} = 1$$

$$a^2 = \frac{-d}{\lambda_1}, b^2 = \frac{-d}{\lambda_2}, c^2 = \frac{d}{\lambda_3}$$

3. 二次曲面有两个特征值不为零，不妨设：$\lambda_1\lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0$. 经过正交变换后，化为

$$g(x', y', z') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + a'_{14}x' + a'_{24}y' + a'_{34}z' + a_{44} = 0 \cdots (20-1)$$

配方后，化为：

$$\lambda_1(x'^2 + \frac{a'_{14}}{2\lambda_1})^2 + \lambda_2(y'^2 + \frac{a'_{24}}{2\lambda_2})^2 + a'_{34}z' - (\frac{a'^2_{14}}{4\lambda_1} + \frac{a'^2_{24}}{4\lambda_2} - a_{44}) = 0$$

再做坐标平移：$\overline{x} = x'^2 + \frac{a'_{14}}{2\lambda_1}, \overline{y} = y'^2 + \frac{a'_{24}}{2\lambda_2}, \overline{z} = z'$ 得到

$$\lambda_1\overline{x}^2 + \lambda_2\overline{y}^2 + a'_{34}\overline{z} = d \cdots\cdots (23)$$

$$d = \frac{a'^2_{14}}{4\lambda_1} + \frac{a'^2_{24}}{4\lambda_2} - a_{44}$$

对方程 (23) 分两种情况讨论:

- $a'_{34}=0$,

$$\lambda_1\overline{x}^2+\lambda_2\overline{y}^2=d\ \cdots\cdots\ (24)$$

λ_1,λ_2,d 同号，(λ_1,λ_2 同号,d 异号，无解)

$$\frac{\overline{x}^2}{d\lambda_1^{-1}}+\frac{\overline{y}^2}{d\lambda_2^{-1}}=1$$

这是椭圆柱面方程。

λ_1,λ_2 同号，$d=0$ 方程 （24）等价于 $\overline{x}=0,\overline{y}=0.$

λ_1,λ_2 异号，$d=0$ 方程 （24）等价于 两个相交平面（交线为 $\overline{z}-$ 轴）

λ_1,λ_2 异号，$d\neq 0,d>0,\lambda_1>0,\lambda_2<0$ 方程 （24）等价于双曲柱面的标准方程:

$$\frac{\overline{x}^2}{d\lambda_1^{-1}}-\frac{\overline{y}^2}{-d\lambda_2^{-1}}=1$$

或者：

$$-\frac{\overline{x}^2}{-d\lambda_1^{-1}}+\frac{\overline{y}^2}{d\lambda_2^{-1}}=1,\lambda_2>0,\lambda_1<0,d>0$$

- $a'_{34}\neq 0$, 方程(23)转化为：

$$\lambda_1\overline{x}^2+\lambda_2\overline{y}^2=-a'_{34}(\overline{z}-\frac{d}{a'_{34}})$$

等价于： $\lambda_1\overline{x}^2+\lambda_2\overline{y}^2=a\overline{z},a\neq 0\quad\cdots\cdots(25)$

λ_1,λ_2同号时，椭圆抛物面

$$\frac{\overline{x}^2}{a\lambda_1^{-1}}+\frac{\overline{y}^2}{a\lambda_2^{-1}}=\overline{z}$$

λ_1, λ_2异号时，双曲抛物面

$$\frac{\overline{x}^2}{a\lambda_1^{-1}} - \frac{\overline{y}^2}{-a\lambda_2^{-1}} = \overline{z}, \lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$$

4. 二次曲面有一个特征值不为零，不妨设：$\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$ 方程(20) 经过正交变换后，化为

$$g(x', y', z') = \lambda_1 x'^2 + a'_{14}x' + a'_{24}y' + a'_{34}z' + a_{44} = 0 \cdots (20-2)$$

配方后，化为：

$$\lambda_1(x'^2 + \frac{a'_{14}}{2\lambda_1})^2 + a'_{24}y' + a'_{34}z' - (\frac{a'^2_{14}}{4\lambda_1} - a_{44}) = 0$$

再做坐标平移： $\overline{x} = x'^2 + \frac{a'_{14}}{2\lambda_1}, \overline{y} = y', \overline{z} = z'$ 得到

$$\lambda_1 \overline{x}^2 + a'_{24}\overline{y} + a'_{34}\overline{z} = d \quad \cdots\cdots \quad (20-3)$$

$$d = \frac{a'^2_{14}}{4\lambda_1} - a_{44}$$

以下再分4种情况：

(1). $a'_{24} = a'_{34} = 0$,方程变为：

$$\lambda_1 \overline{x}^2 = d$$

λ_1, d 同号时， $\overline{x} = \pm\sqrt{d\lambda_1^{-1}}$, 两个平行平面； λ_1, d 异号时， 方程无解； $d = 0$时， $\overline{x} = 0$, 等价于平面 $\overline{yoz}$.

(2). $a'_{24} \neq 0, a'_{34} = 0$,方程变为：

$$\lambda_1 \overline{x}^2 + a'_{24}\overline{y} = d$$

$$\lambda_1 \overline{x}^2 = -a'_{24}(\overline{y} - \frac{d}{a'_{24}})$$

$$\overline{x}^2 = \frac{-a'_{24}}{\lambda_1}(\overline{y} - \frac{d}{a'_{24}})$$

这是抛物柱面。

(3) $a'_{24} = 0, a'_{34} \neq 0$, 类似 (2) 的情况，方程为：

$$\overline{x}^2 = \frac{-a'_{34}}{\lambda_1}(\overline{z} - \frac{d}{a'_{34}})$$

抛物柱面。

(4) $a'_{24}a'_{34} \neq 0$,方程为:

$$\lambda_1\overline{x}^2 + a'_{24}\overline{y} + a'_{34}\overline{z} = d$$

$$\lambda_1\overline{x}^2 + a'_{24}\overline{y} + a'_{34}(\overline{z} - \frac{d}{a'_{34}}) = 0$$

等价于下列形式的方程:

$$\lambda_1\overline{x}^2 + p\overline{y} + q\overline{z} = 0 \quad \cdots\cdots \quad (26)$$

$$\lambda_1\overline{x}^2 + \sqrt{p^2+q^2}(\frac{p\overline{y}}{\sqrt{p^2+q^2}} + \frac{q\overline{z}}{\sqrt{p^2+q^2}}) = 0$$

$$\widetilde{x} = \overline{x}, \widetilde{y} = \frac{p\overline{y}}{\sqrt{p^2+q^2}} + \frac{q\overline{z}}{\sqrt{p^2+q^2}}, \widetilde{z} = -\frac{p\overline{y}}{\sqrt{p^2+q^2}} + \frac{q\overline{z}}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

做正交变换：

$$\begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \\ \widetilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} & \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} \\ 0 & -\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} & \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix}$$

(26) 化为：

$$\lambda_1 \widetilde{x}^2 + \sqrt{p^2+q^2}\,\widetilde{y} = 0$$

$$\widetilde{x}^2 = -\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\lambda_1}\widetilde{y}$$

抛物柱面

Theorem 4.1

*(书中定理8.5, P232)*三位几何空间中，二次曲面方程可以经过平移变换和正交变换，归结为以下*17*种二次曲面：

1. 椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$*(*三个特征值不为零，同号*)*;

2. 虚椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$*(*三个特征值不为零，同号*)*;

3. 退化椭球面，一个点：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$*(*三个特征值不为零，同号*)*;

4. 单叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$*(*三个特征值不为零，两正一负*)*;

5. 二次锥面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$*(*三个特征值不为零，两正一负*)*;

6. 双叶双曲面：$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$*(*三个特征值不为零，两负一正*)*;

7. 椭圆柱面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(两个特征值不为零)；

8. 虚椭圆柱面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$(两个特征值不为零)；

9. 直线：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0 \Leftrightarrow x=0, y=0$(两个特征值不为零)；

10. 相交平面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$(两个特征值不为零)；

11. 双曲柱面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$(两个特征值不为零)；

12. 椭圆抛物面：$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$(两个特征值不为零，$p, q$ 同号)；

13. 双曲抛物面：$\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}=z$(两个特征值不为零，$p, q$ 同号)；

14. 平行平面：$x^2 = a^2, a \neq 0$(一个特征值不为零)

15. 虚平行平面：$x^2 = -a^2, a \neq 0$(一个特征值不为零)

16. 重合平面：$x^2 = 0$,(一个特征值不为零)

17. 抛物柱面：$x^2 = 2py, p \neq 0$,(一个特征值不为零)

17 个标准型里，真正的二次曲面有9种：

三个柱面：

1. 椭圆柱面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(两个特征值不为零)；

2. 双曲柱面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$(两个特征值不为零)；

3. 抛物柱面：$x^2=2py, p\neq 0$,(一个特征值不为零).

一个椭球面

4. 椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$(三个特征值不为零，同号)；

两个双曲面

5. 单叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$(三个特征值不为零，两正一负)；

6. 双叶双曲面：$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$(三个特征值不为零，两负一正)；

两个抛物面

7. 椭圆抛物面：$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$(两个特征值不为零, p,q 同号)；

8. 双曲抛物面：$\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}=z$(两个特征值不为零, p,q 同号)；

一个锥面

9. 二次锥面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$(三个特征值不为零，两正一负)；

Example 16

讨论以下方程的图形

$$f(x,y,z)=6x^2-2y^2+6z^2+4xz+8x-4y-8z+a=0$$

解.

记：$A=\begin{pmatrix}6&0&2\\0&-2&0\\2&0&6\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}8\\-4\\-8\end{pmatrix}$ □

$$f(x,y,z)=\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \mathbf{v}' \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + a = 0$$

第一步：通过正交变换，将矩阵 A 化为对角型矩阵。

(1)求出矩阵 A 的特征值：

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-6 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda+2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda-6 \end{vmatrix} = 0$$

$$|\lambda E - A| = (\lambda+2)(\lambda-4)(\lambda-8) = 0$$

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 8$$

(2). 求特征向量:

- $\lambda_1 = -2$, 解方程: $(-2E - A)X = 0$

$$2E + A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\lambda_1 = 4$, 解方程: $(4E - A)X = 0$

$$4E - A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda_1 = 8$, 解方程: $(8E - A)X = 0$

$$8E-A=\begin{pmatrix}2&0&-2\\0&10&0\\-2&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

(3). 取正交矩阵， $P=\begin{pmatrix}\frac{\xi_1}{|\xi_1|}&\frac{\xi_2}{|\xi_2|}&\frac{\xi_3}{|\xi_3|}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&4&0\\0&0&8\end{pmatrix}$$

第二步：对二次型进行正交坐标变换：$X = PY$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = PY = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix}$$

$$f(x,y,z) = (\overline{x},\overline{y},\overline{z})P'AP \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix} + \mathbf{v}'P \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix} + a = 0$$

$$= -2\overline{x}^2 + 4\overline{y}^2 + 8\overline{z}^2$$

$$+ \begin{pmatrix} 8 & -4 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix} + a = 0$$

$$f(x,y,z)=f(\overline{x},\overline{y},\overline{z})=-2\overline{x}^2+4\overline{y}^2+8\overline{z}^2$$

$$+\begin{pmatrix} -4 & -8\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix}+a=0$$

$$f(\overline{x},\overline{y},\overline{z})=-2\overline{x}^2+4\overline{y}^2+8\overline{z}^2-4\overline{x}-8\sqrt{2}\overline{y}+a=0$$

$$-2(\overline{x}^2+2x+1)+2+4(\overline{y}^2-2\sqrt{2}\overline{y}+2)-8+8\overline{z}^2+a=0$$

$$-2(\overline{x}+1)^2+4(\overline{y}-\sqrt{2})^2+8\overline{z}^2=6-a$$

$$(\overline{x}+1)^2-2(\overline{y}-\sqrt{2})^2-4\overline{z}^2=\frac{6-a}{2}$$

$$\widetilde{x}=\overline{x}+1,\widetilde{y}=\overline{y}-\sqrt{2},\widetilde{z}=\overline{z}$$

$$\widetilde{x}^2 - 2\widetilde{y}^2 - 4\widetilde{z}^2 = \frac{6-a}{2}$$

$$a = 6, \widetilde{x}^2 - 2\widetilde{y}^2 - 4\widetilde{z}^2 = 0, \text{二次锥面，} \quad (9)$$

$$a < 6, \frac{\widetilde{x}^2}{\frac{6-a}{2}} - \frac{\widetilde{y}^2}{\frac{6-a}{4}} - \frac{\widetilde{z}^2}{\frac{6-a}{8}} = 1, \text{双叶双曲面，特征值两负一正} \quad (6)$$

$$a > 6, -\frac{\widetilde{x}^2}{\frac{a-6}{2}} + \frac{\widetilde{y}^2}{\frac{a-6}{4}} + \frac{\widetilde{z}^2}{\frac{a-6}{8}} = 1, \text{单叶双曲面，特征值两正一负} \quad (5)$$

谢 谢！