线性代数与空间解析几何
课程介绍

曾吉文
哈尔滨工业大学数学科学学院

2022年 9 月

介绍本课程的主要内容，主要思想，如何掌握学习方法，了解应对成绩考核；

1. 主要内容和主要思想
   - 线性方程组与矩阵
   - 线性方程组与向量
   - 矩阵与向量
2. 学习方法，解题问题
3. 关于本课程的考核，成绩判定
4. 参考书，教材，习题集

一. 主要内容和主要思想

1. 线性方程组与矩阵

设有二阶方程：

$$\begin{aligned} x+2y &= 3 \\ 2x+y &= 3 \end{aligned} \tag{10-1}$$

消元法：（2）式减去（1）式的两倍：

$$\begin{aligned} x+2y &= 3 \\ -3y &= -3 \end{aligned} \tag{10-2}$$

(2)式乘$-\frac{1}{3}$,得到

$$\begin{aligned} x+2y &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned} \tag{10-3}$$

原方程的解为：$y=1, x=1$

上述线性方程组的变换，实际只跟未知量的系数有关，所以我们可以用矩阵代替：矩阵的一行对应线性方程组的一行

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)-2(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \tag{10-4}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)-2(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{10-5}$$

只要记住每个矩阵对应的线性方程组，得到解为：$x = 1, y = 1$

用矩阵代替线性方程组的好处在哪里？ 设想有很多个线性方程组，100个未知量或者更多，一般设为n 个未知量， m 个线性方程：

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\cdots & +a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\cdots & +a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\cdots & +a_{mn}x_n = b_m \end{matrix} \tag{10-6}$$

此时，线性方程组的运算就会很麻烦。因此矩阵的引入就可以代替这样的运算：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{10-7}$$

矩阵的概念，运算，行变换，列变换，成为一个主要内容；同时为解决线性方程组的结构问题：有解，无解；有解时，解的唯一性，或者无穷解，所以又要引进矩阵的秩的概念，矩阵的行向量，列向量的概念

2.线性方程组与向量

即从另外一个角度看前面的例子：

$$\begin{aligned} x+2y &= 3 \\ 2x+y &= 3 \end{aligned} \Leftrightarrow x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} \tag{10-8}$$

记向量：

$$\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\gamma=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$$

问题转化为：向量 γ 如何表达为向量 α,β 的线性组合？根据前面线性方程组的解，我们知道有：

$$x=y=1,\alpha+\beta=\gamma$$

对于一般的线性方程组：n元 m 个线性方程组：

$$\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\cdots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\cdots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\cdots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{array} \tag{10-9}$$

引入向量表达记号：

$$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{10-10}$$

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{10-11}$$

这样线性方程组的解，就转化为向量的线性组合系数问题：

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \alpha$$

因此，研究向量构成的集合：线性空间，研究向量的运算，向量的线性组合，就是本课程的第二个重要问题。

3. 矩阵与向量

一个矩阵可以看作列向量，或者行向量的合成：例如空间中三个向量：

$$\alpha=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\gamma=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\tag{10-12}$$

对于空间中一个点：$A=(3,2,1)$,记作三维向量:$\delta=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$

求解向量表达式

$$x\alpha+y\beta+z\gamma=\delta$$

转化为矩阵表达式：

$$\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&1&1&2\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

向量表达式对应矩阵表达式，再对应矩阵的列向量关系。

研究矩阵与矩阵的列（行）向量的关系，是本课程的重要内容

二. 学习方法，解题问题

关于本课程的学习方法，如何解题

1. 准确理解每一个概念，看书，认真听课，做好笔记，看老师的PPt讲稿
2. 多提问题，多参加讨论，多与老师同学沟通；
3. 运用概念，定理，已知结论，解决未知题目。
4. 告别中学的学习方法，提高理解力，增强推理归纳能力；
5. 按时完成作业，独立完成课外作业（很重要），适当参考课外读物。
6. 及早规划未来的目标：工作，考研，出国，创业，确定自己的学习目标。

三. 关于本课程的考核，成绩判定

有关本课程的注意事项：

1. 成绩实行百分制： 平时成绩占百分之二十， 由平时作业评价；期中考试，占百分之三十；期末考试，占百分之五十。
2. 每人需要购买一本习题册。讲授一章后，要提交该章的习题作业，作为平时成绩。总共讲授7章，所以需要交7次习题作业。联系购买习题册电话：韩老师：15765530269.此外也可以购买（志愿）习题辅导书（两本）。
3. 本教材的主要参考教材：线性代数与空间解系几何，哈尔滨工业大学数学系，郑宝东主编。讲授内容：第1-6章，第8章。带*号内容不讲。
4. 本人讲授PPt基本来自上述参考教材，个别细节略有不同。需要本讲义，可以电子传送。本人邮箱：jwzeng@xmu.edu.cn. WX:jwzeng9018.

- 与本教程相关的三本书：

- 

- 其中第一本是习题本，每一个人都需要买，作为每一章的课外作业，每讲授完一章，交给助教，评定成绩，作为平时成绩的一部分。

推荐两个教学视频（教材），作为大家追求优秀学业的选择，挑战自己的数学能力：

- Mit：麻省理工公开课：Linear algebra, Professor Gilbert Strang 讲授
- 北京大学公开课：高等代数，丘维声教授主讲。

谢 谢！