高等学校教材配套教辅 2

概率论与数理统计同步训练

PROBABILITY AND MATHEMATICAL STATISTICS SYNCHRONOUS TRAINING

周永春 田波平 王勇 主编

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图片来源：《伟大的建筑书》

高等学校教材配套辅导系列

- 概率论与数理统计综合训练
- 概率论与数理统计同步训练
- 概率论与数理统计同步辅导与习题解答
- 复变函数与积分变换同步训练
- 复变函数与积分变换综合训练
- 数值分析习题与实验
- 线性代数与空间解析几何疑难解答
- 线性代数与空间解析几何习题指导
- 线性代数与空间解析几何同步训练

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 聂兆慈
封面设计 孙茵艾

哈尔滨工业大学出版社 刘培杰数学工作室
联系地址：哈尔滨市南岗区复华四道街10号
邮 编：150006
联系电话：0451-86281378 13904613167
E-mail：lpj1378@163.com
微 信：impjpp

ISBN 978-7-5603-5562-7
9 787560 355627 >
定价 10.00元

高等学校教材配套教辅 2

概率论与数理统计同步训练

PROBABILITY AND MATHEMATICAL STATISTICS SYNCHRONOUS TRAINING

周永春　田波平　王勇　主编

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书是一本关于概率论与数理统计的习题书，涵盖了概率论与数理统计教材中的相应习题，共分八章. 习题由浅入深，内容全面，知识点丰富，适合高等院校学生使用.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计同步训练/周永春，田波平，王勇主编. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社，2015. 8
ISBN 978-7-5603-5562-7

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①周…②田…③王… Ⅲ. ①概率论-高等学校-习题集②数理统计-高等学校-习题集
Ⅳ. ①O21-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 191115 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 聂兆慈
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress. hit. edu. cn
印 刷 哈尔滨久利印刷有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 6.5 字数 154 千字
版 次 2015 年 8 月第 1 版 2015 年 8 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-5562-7
定 价 10.00 元

目录

概率论与数理统计同步训练

第 一 章

班级：19机械二班

学号：190310203

姓名：吴晓宇

心得 体会 拓广 疑问

1 设 A,B,C 是随机试验 E 的三个事件，试用 A,B,C 表示下列事件：

(1) 仅 A 发生；

(2) A,B,C 中至少有两个发生；

(3) A,B,C 中不多于两个发生；

(4) A,B,C 中恰有两个发生；

(5) A,B,C 中至多有一个发生.

解：(1) $A\bar{B}\bar{C}$

(2) $ABC+\bar{A}BC+A\bar{B}C+AB\bar{C}$

(3) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}BC+A\bar{B}C+AB\bar{C}$

(4) $\bar{A}BC+A\bar{B}C+AB\bar{C}$

(5) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}B\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}$

2 一个工人生产了三件产品，以 $A_i(i=1,2,3)$ 表示第 i 件产品是正品，试用 A_i 表示下列事件：

(1) 没有一件产品是次品；

(2) 至少有一件产品是次品；

(3) 恰有一个产品是次品；

(4) 至少有两件产品不是次品.

解：(1) $A_1A_2A_3$

(2) $\overline{A_1A_2A_3}$

(3) $\bar{A}_1A_2A_3+A_1\bar{A}_2A_3+A_1A_2\bar{A}_3$

(4) $\bar{A}_1A_2A_3+A_1\bar{A}_2A_3+A_1A_2\bar{A}_3+A_1A_2A_3$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

❸ 袋中有编号为 1 到 10 的 10 个球，今从袋中任取 3 个球，求：
(1)3 个球的最小号码为 5 的概率；
(2)3 个球的最大号码为 5 的概率.

解：(1) $P=\frac{C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{12}$ $\frac{C_5^2}{C_{10}^2}$

(2) $P=\frac{C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{20}$ $\frac{C_5^2}{C_{10}^2}$

❹ (1) 教室里有 r 个学生，求他们的生日都不相同的概率；(2) 房间里有四个人，求至少有两个人的生日在同一个月的概率.

解：(1) $P=\frac{C_{365}^r A_r^r}{365^r}$

(2) $P=1-\frac{C_{12}^4 A_4^4}{12^4}=0.427$

心得 体会 拓广 疑问

5 将 C,C,E,E,I,N,S 等七个字母随机地排成一行，那么恰好排成英文单词 SCIENCE 的概率是多少？

解：$P=\frac{2\times 2}{7!}=\frac{4}{7!}$

6 从 0,1,2,…,9 等十个数字中任意选出三个不同数字，试求下列事件的概率：A_1＝“三个数字中不含 0 和 5”，A_2＝“三个数字中不含 0 或 5”，A_3＝“三个数字中含 0，但不含 5”.

解：$P(A_1)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$

$P(A_2)=\frac{C_8^2C_2^1+C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{14}{15}$

$P(A_3)=\frac{C_8^2}{C_{10}^3}=\frac{7}{30}$

心得 体会 拓广 疑问

7 一批产品共有 10 个正品和 2 个次品，任意抽取两次，每次抽出一个，抽出后不放回，求第二次抽到次品的概率.

解: $P=\dfrac{C_2^1C_1^1+C_{10}^1C_2^1}{A_{12}^2}=\dfrac{1}{6}$

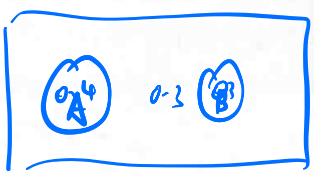
8 设事件 A 与 B 互不相容，$P(A)=0.4$，$P(B)=0.3$，求 $P(\bar{A}\,\bar{B})$ 与 $P(\bar{A}\cup B)$.

解: $P(A)=0.4$ $\quad P(B)=0.3$

$P(\bar{A})=0.6$ $\quad P(\bar{B})=0.7$

$P(\bar{A}\bar{B})=1-P(A)-P(B)=0.3$

$P(\bar{A}\cup B)=P(\bar{A})=0.6$ $\quad (B\subset\bar{A})$



心得 体会 拓广 疑问

9 若 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$ 且 $P(A)=p$，求 $P(B)$.

解: $P(\overline{A}\overline{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB)$

$P(A) + P(B) = 1$

$P(B) = 1-p$

10 设事件 A,B 及 $A\cup B$ 的概率分别为 p,q 及 r，求 $P(AB)$ 与 $P(A\cup\overline{B})$.

解: $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A\cup B) = p+q-r$

$P(A\cup\overline{B}) = 1 - P(B\setminus A) = 1 - P(B) + P(AB) = 1+p-r$

心得 体会 拓广 疑问

11 设 $P(A)+P(B)=0.7$ 且 A,B 仅发生一个的概率为 0.5，求 A，B 都发生的概率.

解: $P(A)+P(B)=0.7$

$P(A)+P(B)-2P(AB)=0.5$

$P(AB)=0.1$

12 设 $P(A)=0.7, P(A-B)=0.3, P(B-A)=0.2$，求 $P(\overline{AB})$ 与 $P(\overline{A}\,\overline{B})$.

解: $P(A)=0.7$

$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=0.3$

$P(AB)=0.4$

$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=0.2$

$P(B)=0.6$

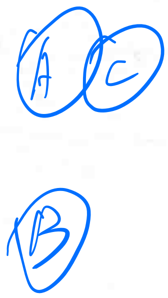
$P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.6$

$P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(A)-P(B)+P(AB)=0.1$

心得 体会 拓广 疑问

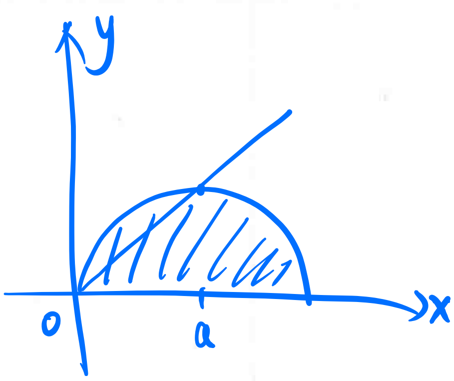
13 设 A,B,C 是三个事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=1/4$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=1/8$，求 A,B,C 中至少有一个发生的概率.

解：$P=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)=\frac{5}{8}$



14 随机地向半圆 $y=\sqrt{2ax-x^2}>0$（a 为正常数）内掷一点，点落在圆内任何区域的概率与区域的面积成正比，求原点至该点的连续与 x 轴的夹角小于 $\pi/4$ 的概率.

解：



$P=1-\dfrac{\frac{\pi}{4}a^2-\frac{1}{2}a^2}{\frac{\pi}{2}a^2}=\dfrac{\pi+2}{2\pi}$

心得 体会 拓广 疑问

15 三封信随机地投向标号为 A,B,C,D 的四个邮筒，问 B 筒恰好投入一封信的概率为多少？

解：$P=\dfrac{C_3^1\cdot 3^2}{4^3}=\dfrac{27}{64}$

16 袋中有 9 个球(4 个白球，5 个黑球)，现从中任取两个，求：

(1) 两个均为白球的概率；

(2) 两个球中一个是白球，另一个是黑球的概率；

(3) 至少有一个黑球的概率.

解：(1) $P_1=\dfrac{C_4^2}{C_9^2}=\dfrac{1}{6}$

(2) $P_2=\dfrac{C_4^1C_5^1}{C_9^2}=\dfrac{5}{9}$

(3) $P_3=1-P_1=\dfrac{5}{6}$

心得 体会 拓广 疑问

17 从2,3,4,5这四个数中,有放回地取三次,每次任取一个数,求所取得的三个数之积能被10整除的概率.

解: $P=\frac{7}{4^3}=\frac{7}{64}$ $\frac{18+12}{64}$

18 对任意三事件 A,B,C,试证

$$P(AB)+P(AC)-P(BC)\leqslant P(A)$$

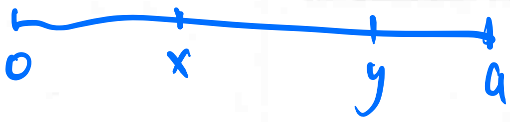
解: $(A\cap B)\cup(A\cap C)=A\cap(B\cup C)\subset A\cup(B\cap C)=A+BC$

$P(AB)+P(AC)\leq P(A)+P(BC)$

心得 体会 拓广 疑问

19 把长度为 a 的棒任意折成三段，求它们可以构成一个三角形的概率.

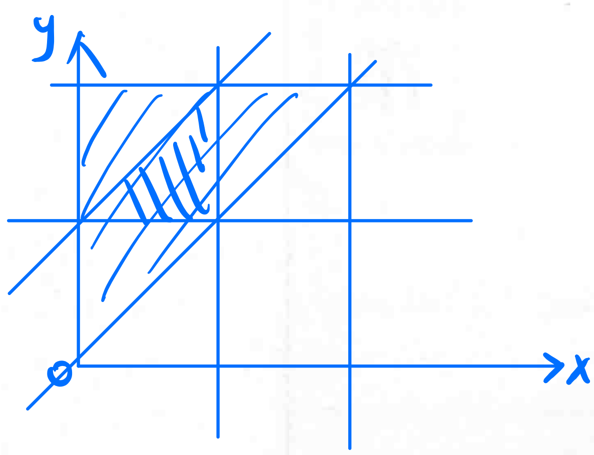
解:



$x \qquad y-x \qquad a-y \qquad$ 设 $y>x$

$x-y+x<a-y \qquad x<\frac{a}{2},\ y<\frac{a}{2}$

$y-x-x<a-y \qquad x+y>\frac{a}{2}$

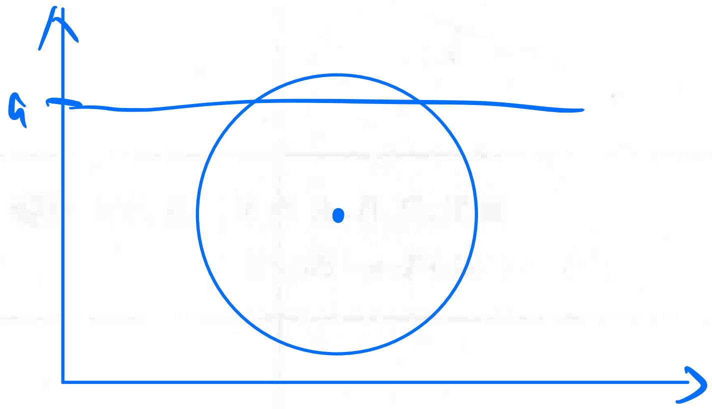


$p=\frac{1}{4}$

心得 体会 拓广 疑问

20（蒲丰投针问题）在平面上画出等距离 $a(a>0)$ 的一些平行线，向平面上随机地投掷一根长 $l(l<a)$ 的针，试求针与任一平行线相交的概率.

解：$p=\dfrac{\int_0^{\pi}\frac{l}{2}\sin\varphi}{\pi\frac{a}{2}}=\dfrac{2l}{\pi a}$



概率论与数理统计同步训练

第　二　章

班级：18机械二班

学号：1803110203

姓名：吴晓宇

心得 体会 拓广 疑问

1 假设一批产品中一、二、三等品各占 60%,30%,10%,从中任取一件,发现它不是三等品,求它是一等品的概率.

解: A: 它是一等品

B: 它不是三等品

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.6}{0.6+0.3}=\frac{2}{3}$$

2 设 10 件产品中有 4 件不合格品,从中任取两件,已知所取两件中有一件是不合格品,求另一件也是不合格品的概率.

解: A: 另一件是不合格品

B: 有一件是不合格品.

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{C_4^2}{C_{10}^2}}{1-\frac{C_6^2}{C_{10}^2}}=\frac{1}{5}$$

年 月 日

10 (8+2)

心得 体会 拓广 疑问

3 甲袋中有 3 个白球 2 个黑球，乙袋中有 4 个白球 4 个黑球，今从甲袋中任取 2 个球放入乙袋，再从乙袋中任取 1 个球，求该球是白球的概率.

解：设 A_1 为抽到来自甲袋的球
A_2 为抽到来自乙袋的球
B 为该球为白球

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$$
$$=\frac{2}{10}\times\frac{3}{5}+\frac{8}{10}\times\frac{1}{2}=\frac{13}{25}$$

4 电报发射台发出“•”和“—”的比例为 5∶3，由于干扰，传送“•”时失真率为 2/5，传送“—”时失真率为 1/3. 求接受台收到“•”时发出信号恰是“•”的概率.

解：设 A 为接受的信号为“•”，B 为发出的信号为“•”

$$P(A|B)=\frac{P(A)\ P(B|A)}{P(A)\ P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})}$$

$$=\frac{\frac{5}{8}\times(1-\frac{2}{5})}{\frac{5}{8}\times(1-\frac{2}{5})+\frac{3}{8}\times\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$$

心得 体会 拓广 疑问

5 玻璃杯成箱出售，每箱 20 只，假设各箱含 0，1，2 只残次品的概率相应为 0.8，0.1，0.1，一顾客欲购一箱玻璃杯，在购买时，售货员随意取一箱，而顾客开箱随意地察看四只，若无残次品，则买下该箱玻璃杯，否则退回，试求：

(1) 顾客买下该箱的概率 α；

(2) 在顾客买下的一箱中，确实没有残次品的概率 β.

解：(1) 设 A：看四只无残次品　B_0、B_1、B_2：选含 0、1、2 只残次品的箱子

$$P(\alpha)=P(A)=0.8+0.1\times\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}+0.2\times\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=0.943$$

(2) $$P(\beta)=P(B_0|A)=\frac{P(A|B_0)P(B_0)}{P(A)}=\frac{1\times0.8}{0.943}=0.848$$

6 设有来自三个地区的各 10 名，15 名和 25 名考生的报名表，其中女生的报名表分别为 3 份，7 份和 5 份，随机地抽取一个地区的报名表，从中先后取两份.

(1) 求先抽到的一份是女生报名表的概率 p.

(2) 已知后取到的一份是男生报名表，求先取到的一份是女生报名表的概率 q.

解：(1) 设 A_1、A_2：第 1、2 个抽到女生报名表　B_1、B_2、B_3：抽到地区 1、2、3 的报名表

$$P(A_1)=P(A_1|B_1)P(B_1)+P(A_1|B_2)P(B_2)+P(A_1|B_3)P(B_3)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}+\frac{7}{15}+\frac{5}{25}\right)=\frac{29}{90}$$

(2) $$P(\bar{A}_1|A_2)=\frac{P(\bar{A}_1A_2)}{P(A_2)}=\frac{\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(\bar{A}_1A_2|B_i)}{\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A_2|B_i)}=\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{7}{30}+\frac{8}{30}+\frac{5}{30}\right)}{\frac{1}{3}\left(\frac{7}{10}+\frac{8}{15}+\frac{20}{25}\right)}$$

$$=\frac{20}{61}$$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

❼ 一袋中装有 m 个正品硬币，n 个次品硬币（次品硬币的两面均印有国徽），在袋中任取一只，已知将它投掷 r 次，每次都得到国徽，问这只硬币是正品的概率是多少？

解：A：硬币为正品　B_i：第 i 次为国徽

$$P(A|B_r)=\frac{P(AB_r)}{P(B_r)}=\frac{P(AB_r)}{P(B_r|A)P(A)+P(B_r|\bar{A})P(\bar{A})}$$

$$=\frac{\frac{m}{m+n}\cdot\frac{1}{2^r}}{\frac{1}{2^r}\cdot\frac{m}{m+n}+\frac{n}{m+n}}=\frac{m}{m+n\cdot 2^r}$$

❽ 甲、乙两人独立地对同一目标各射击一次，其命中率分别为 0.6 和 0.5，现已知目标被击中，求它是甲射中的概率.

解：A：甲击中　B：乙击中　C：目标被击中

$$P(A|C)=\frac{P(AC)}{P(C)}=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(AB)}=0.75$$

心得 体会 拓广 疑问

9 三人独立地去破译一个密码，他们能译出的概率分别是$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$．求他们将此密码译出的概率．

解：A_i：三人分别译出　B：密码译出

$P(B)=1-P(\bar{B})=1-P(\bar{A_1}\bar{A_2}\bar{A_3})=0.6$

10 甲、乙、丙三人向一架飞机进行射击，设他们的命中率分别为0.4，0.5，0.7．又设飞机中一弹而被击落的概率为0.2，中两弹而被击落的概率为0.6，中三弹必然被击落．今三人各射击一次，求飞机被击落的概率．

解：设A：飞机被击落　B_i：甲、乙、丙命中

$P(A|B_i)=0.2$　$P(A|B_iB_j)=0.6$　$P(A|B_iB_jB_k)=1$

$P(A)=P(A|B_i)\cdot\Sigma P(B_i\bar{B_j}\bar{B_k})+P(A|B_iB_j)\cdot\Sigma P(B_iB_j\bar{B_k})$

$+P(A|B_1B_2B_3)\,P(B_1B_2B_3)$

$=0.2\times(0.4\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.7)$

$+0.6\times(0.4\times0.5\times0.3+0.4\times0.5\times0.7+0.6\times0.5\times0.7)$

$+1\times(0.4\times0.5\times0.7)$

$=0.458$

心得 体会 拓广 疑问

11 一个教室里有 4 名一年级男生，6 名一年级女生，6 名二年级男生，若干名二年级女生，为使我们在随机地选择一名学生时，性别和年级是相互独立的，教室里的二年级女生应为多少名？

n

解：设 A：学生为一年级　B：学生为女生

$P(A)=\frac{10}{16+n}$　$P(B)=\frac{6+n}{16+n}$

$P(AB)=\frac{6}{16+n}$　$n=9$

12 一射手对同一目标独立地进行四次射击，若至少命中一次的概率为 80/81，求该射手的命中率.

解：$1-P^4(\bar{A})=\frac{80}{81}$　$P(\bar{A})=\frac{1}{3}$　$P(A)=\frac{2}{3}$

心得 体会 拓广 疑问

13 考试时有四道选择题，每题附有4个答案，其中只有一个是正确的. 一个考生随意地选择每题的答案，求他至少答对三道题的概率.

解：$p = C_4^3 (\frac{1}{4})^3 \frac{3}{4} + (\frac{1}{4})^4 = \frac{13}{256}$

14 设在伯努利试验中，成功的概率为 p，求第 n 次试验时得到第 r 次成功的概率.

$n-1$ $r-1$

解：$p = C_{n-1}^{r-1} p^{r-1} (1-p)^{n-r} \cdot p = C_{n-1}^{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$

心得 体会 拓广 疑问

15 设一厂家生产的每台仪器,以概率0.7为优秀可以直接出厂;以概率0.3需进一步调试,经调试后优秀概率为0.8可以出厂,以概率0.2定为不合格品,不能出厂.现该厂生产了$n(n\geqslant 2)$台仪器(假定各台仪器的生产过程相互独立).求:

(1) 全部能出厂的概率α;

(2) 其中恰有两台不能出厂的概率β;

(3) 其中至少有两台不能出厂的概率θ.

解:(1) 能出厂概率 $=0.7+0.3\times0.8=0.94$

$\alpha=0.94^n$

(2) $\beta=C_n^2\times0.06^2\times0.94^{n-2}$

(3) $\theta=1-0.94^n-C_n^1\times0.06\times0.94^{n-1}$

16 一台仪器中装有2 000个同样的元件,每个元件损坏的概率为0.005.如果任一元件损坏,则仪器即停止工作,求仪器停止工作的概率.

解: $p=1-0.995^{2000}=0.9999557$

心得 体会 拓广 疑问

17 某种仪器由甲、乙、丙三个部件组装而成，假定各部件的质量互不影响，且优质品率都是 0.8，如果三个部件全是优质品，那么组装后的仪器一定合格；如果有两个优质品，那么仪器合格的概率为0.9；如果仅有一个优质品，那么仪器合格的概率为 0.5；如果三个全不是优质品，那么仪器合格的概率为 0.2.

(1) 试求仪器的不合格率；

(2) 已知某台仪器不合格，试求它的三个部件中恰有一个不是优质品的概率.

解：(1) $P=(1-0.2)\times(1-0.8)^3+(1-0.5)\times C_3^2\times 0.8\times(1-0.8)^2$

$+(1-0.9)\times C_3^2\times 0.8^2\times(1-0.8)=0.0928$

(2) A：仪器合格　B_1：有1个不是优质品

$P(B_1\mid\bar{A})=\dfrac{P(B_1\bar{A})}{P(\bar{A})}=\dfrac{P(\bar{A}\mid B_1)P(B_1)}{P(\bar{A})}=\dfrac{0.1\times C_3^1\times 0.2\times 0.8^2}{0.0928}=0.414$

$\dfrac{0.3456}{1-0.0928}$

$P(AB)=P(A)P(B)$　$P(AC)=0$　$P(A\cup C)=P(A)+P(C)$

18 设事件 A,B 相互独立，A,C 互不相容，$P(A)=\dfrac{1}{2}$，$P(B)=\dfrac{1}{3}$，$P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(B\mid C)=\dfrac{1}{8}$，试求 $P(A\cup B)$，$P(C\mid A\cup B)$，$P(AB\mid\bar{C})$.

解：$P(B\mid C)=\dfrac{P(BC)}{P(C)}=\dfrac{1}{8}$　$P(BC)=\dfrac{1}{32}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\dfrac{2}{3}$

$P(C\mid A\cup B)=\dfrac{P(C(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\dfrac{P(AC\cup BC)}{P(A\cup B)}=\dfrac{P(BC)}{P(A\cup B)}=\dfrac{3}{64}$

$P(AB\mid\bar{C})=\dfrac{P(AB\bar{C})}{P(\bar{C})}=\dfrac{P(A\bar{C}\mid B)P(B)}{P(\bar{C})}=\dfrac{P(A\mid B)P(B)}{P(\bar{C})}=\dfrac{P(A)P(B)}{P(\bar{C})}=\dfrac{2}{9}$

心得 体会 拓广 疑问

19 某考生想借一本书，决定到三个图书馆去借，对每一个图书馆而言，有无这本书的概率相等；若有，能否借到的概率也相等．假设这三个图书馆采购、出借图书相互独立，求该生能借到此书的概率．

解：设A：借得到

$P(A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$P=1-(1-\frac{1}{4})^3=\frac{37}{64}$

20 设 B,C 及 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是具有正概率的事件，且 $A_iA_j=\varnothing$，$i\neq j(i,j=1,2,\cdots,n)$，$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=S$．若 $P(A_i)$，$P(B\mid A_i)$ 及 $P(C\mid BA_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 已知，求 $P(C\mid B)$．

解：$P(C|B)=\frac{P(BC)}{P(B)}=\frac{\sum_{i=1}^{n}P(A_iBC)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_iB)}=\frac{\sum_{i=1}^{n}P(C|BA_i)P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(B|A_i)P(A_i)}$

心得 体会 拓广 疑问

21 设有三个事件 A,B,C,其中 $P(B)>0,0<P(C)<1$,且 B 与 C 相互独立,证明

$$P(A\mid B)=P(A\mid BC)P(C)+P(A\mid B\overline{C})P(\overline{C})$$

证明: $P(BC)=P(B)P(C)$ $P(B\overline{C})=P(B)P(\overline{C})$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P[AB(C+\overline{C})]}{P(B)}=\frac{P(ABC)+P(AB\overline{C})}{P(B)}$$

$$=\frac{P(A|BC)P(BC)+P(A|B\overline{C})P(B\overline{C})}{P(B)}$$

$$=P(A|BC)P(C)+P(A|B\overline{C})P(\overline{C})$$

22 某人有两盒火柴,吸烟时从任一盒中取一根火柴.经过若干时间后,发现一盒火柴已经用完.如果最初两盒中各有 n 根火柴,求这时另一盒中还有 r 根火柴的概率.

解: 在第 $(2n-r+1)$ 次发现, 前 $(2n-r)$ 次中有一盒空且下一次看到空盒

$$P=C_{2n-r}^{n}\frac{1}{2^{2n-r}}\times C_2^1\times\frac{1}{2}=\frac{C_{2n-r}^{n}}{2^{2n-r}}$$

心得 体会 拓广 疑问

23 设一个系统由 5 个元件组成，连接方式如图 1 所示，元件 1,5 的可靠性均为 $r(0<r<1)$，元件 2,3,4 的可靠性均为 $p(0<p<1)$，且各元件能否正常工作是相互独立的. 试求：

(1) 这个系统的可靠性；

(2) 在这个系统正常工作时，元件 2,3,4 中仅有一个在正常工作的概率.

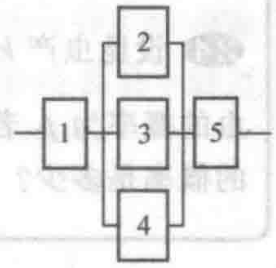


图 1

解：(1) $r^2\cdot[1-(1-p)^3]$

(2) 设 A_1：2、3、4仅有1个正常工作　B：系统正常

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{r^2C_3^1p(1-p)^2}{r^2[1-(1-p)^3]}=\frac{3p(1-p)^2}{1-(1-p)^3}$$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

24 设昆虫产 k 个卵的概率 $p_k=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，又设一个虫卵能孵化成昆虫的概率为 p. 若卵的孵化是相互独立的，问此昆虫的下一代有 L 条的概率是多少？

解:

$$P_k(L)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\cdot C_k^L p^L(1-p)^{k-L}$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\frac{k!}{L!(k-L)!}p^L(1-p)^{k-L}$$

$$=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{L!(k-L)!}p^L(1-p)^{k-L}$$

$$P(L)=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(L)=\frac{e^{-\lambda}p^L}{L!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k(1-p)^{k-L}}{(k-L)!}$$

由于 $k<L$ 时 $(k-L)!$ 不存在

$$P(L)=\frac{e^{-\lambda}(p\lambda)^L}{L!}\sum_{k=L}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^{k-L}}{(k-L)!}=\frac{e^{-\lambda}(p\lambda)^L}{L!}e^{\lambda(1-p)}=\frac{e^{-\lambda p}(p\lambda)^L}{L!}$$

概率论与数理统计同步训练

第 三 章

班级：18机械二班

学号：180310203

姓名：吴晓宇

心得 体会 拓广 疑问

1 袋中有 a 个白球，b 个黑球，从袋中任意取出 r 个球，求 r 个球中黑球个数 X 的分布列.

解: $X=1,2,\cdots r \ (r\le b)$ $\quad X=1,2,\cdots b \ (b<r\le a+b)$

$$P(X=n)=\begin{cases}\dfrac{C_b^n}{C_{a+b}^r} & (b<r\le a+b \text{ 且 } n\le b \text{ 或 } r\le b)\\ \dfrac{C_b^n C_a^{r-n}}{C_{a+b}^r} & (b<r\le a+b \text{ 且 } b<n\le r)\end{cases}$$

2 一实习生用一台机器接连独立地制造了 3 个同样零件，第 i 个零件是不合格品的概率为 $\frac{1}{i+1}(i=1,2,3)$，以 X 表示 3 个零件中合格品的个数，求 X 的分布列.

不 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$

合 $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$

解: $X=0,1,2,3$

$P(X=0)=(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{1}{3})\times(1-\frac{1}{4})=\frac{1}{4}$ $\quad \frac{1}{24}$

$P(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

$P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{11}{24}$

$P(X=3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$ $\quad \frac{1}{4}$

心得 体会 拓广 疑问

3 一汽车沿一街道行驶，需通过三个设有红绿信号灯的路口，每个信号灯为红或绿相互独立，且每一信号灯红绿两种信号显示的概率为1/2，以 X 表示汽车首次遇红灯前已通过的路口的个数，求 X 的概率分布.

解: $X=0,1,2,3$

$P(X=0)=\frac{1}{2}$

$P(X=1)=\frac{1}{4}$

$P(X=2)=P(X=3)=\frac{1}{8}$

4 将一枚硬币连掷 n 次，以 X 表示这 n 次中出现正面的次数，求 X 的分布列.

解: $X=0,1,\cdots n$

$P(X=i)=C_n^i\left(\frac{1}{2}\right)^i\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-i}=\frac{C_n^i}{2^n}$

心得 体会 拓广 疑问

5 设某商店每月销售商品的数量服从参数为 5 的泊松分布，问在月初要库存多少此种商品才能保证当月不脱销的概率为 0.999 77 以上.

0.00023

解: $P(X=k)=\frac{5^k e^{-5}}{k!} > 1-0.99977$

$k>15$

6 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} C\sin x, & 0<x<\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求：(1) 常数 C；(2) 使 $P(X>a)=P(X<a)$ 成立的 a.

解: (1) $\int_0^{\pi} f(x)\,dx = C\int_0^{\pi}\sin x\,dx = 2C = 1 \quad C=\frac{1}{2}$

(2) $\int_0^a \frac{1}{2}\sin x\,dx = \frac{1}{2}(1-\cos a)$

$\int_a^{\pi} \frac{1}{2}\sin x\,dx = \frac{1}{2}(\cos a - 1)$

$\cos a = 0 \quad a=\frac{\pi}{2}$

心得 体会 拓广 疑问

7 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=A+B\arctan x,-\infty<x<+\infty$$

求:(1) 系数 A 与 B;(2) $P(-1<X<1)$;(3) X 的概率密度.

解: (1) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)-\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=\pi B=1 \quad B=\frac{1}{\pi}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=A-\frac{1}{2}=0 \quad A=\frac{1}{2}$

(2) $P(-1<X<1)=F(1)-F(-1)=\frac{1}{2}$

(3) $f(x)=F'(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$

8 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1\\ 2-x, & 1\leqslant x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求 X 的分布函数.

解: $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{x^2}{2} & 0\leq x<1\\ -\frac{x^2}{2}+2x-1 & 1\leq x<2\\ 1 & x>1\end{cases}$

心得 体会 拓广 疑问

9 设电子管寿命 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{100}{x^2}, & x>100\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

若一架收音机上装有三个这种电子管，求：
(1) 使用的最初 150 h 内至少有两个电子管被烧坏的概率；
(2) 在使用的最初 150 h 内烧坏的电子管数 Y 的分布列；
(3) Y 的分布函数.

解：(1) $P(X<150)=\int_0^{150}f(x)dx=\int_{100}^{150}\frac{100}{x^2}dx=\frac{1}{3}$

$P(n\geq 2)=C_3^2\times(\frac{1}{3})^2(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3})^3=\frac{7}{27}$

(2) $Y=0,1,2,3$ $P(Y=0)=\frac{8}{27}$ $P(Y=1)=\frac{4}{9}$ $P(Y=2)=\frac{2}{9}$ $P(Y=3)=\frac{1}{27}$

(3) $F_Y(x)=C_3^x(\frac{1}{3})^x(\frac{2}{3})^{3-x}=\frac{C_3^x\cdot 2^{3-x}}{27}$

10 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

现对 X 进行 n 次独立重复观测，以 V_n 表示观测值不大于 0.1 的次数，试求随机变量 V_n 的概率分布.

解：$F(x)=\begin{cases}x^2 & 0<x\leq 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

$P(X<0.1)=F(0.1)=0.01$

$P(V_n=m)=C_n^m\times 0.01^m\times 0.99^{n-m}$

心得 体会 拓广 疑问

11 设随机变量 $X\sim U[2,5]$. 现对 X 进行三次独立观测,试求至少有两次观测值大于 3 的概率.

解: $p(X>3)=\frac{5-3}{5-2}=\frac{2}{3}$

$P(n=2)=C_3^2\times(\frac{2}{3})^2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}+(\frac{2}{3})^3=\frac{20}{27}$

12 设顾客在某银行窗口等待服务的时间 X(单位:min) 服从参数为 1/5 的指数分布,若等待时间超过 10 min,则他就离开. 设他一个月内要来银行 5 次,以 Y 表示一个月内他没有等到服务而离开窗口的次数,求 Y 的分布列及 $P(Y\geqslant 1)$.

解: $f(x)=\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}\ (x>0)$

$P(t\geq 10)=1-\int_0^{10}f(x)\,dx=\frac{1}{e^2}$

$Y=0,1,2,3,4,5$

$P(Y=n)=C_5^n(\frac{1}{e^2})^n(1-\frac{1}{e^2})^{5-n}$

$P(Y\geq 1)=1-P(Y<1)=1-P(Y=0)=1-(1-\frac{1}{e^2})^5$

心得 体会 拓广 疑问

13 设一大型设备在任何长为 t 的时间内发生故障的次数 $N(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布. 求:

(1) 相继两次故障之间时间间隔 T 的概率分布;

(2) 在设备已经无故障工作了 8 h 的情况下,再无故障运行 8 h 的概率.

解: (1) $F_T(t)=P(T\le t)=1-P(T>t)=1-P(N(t)=0)$

$=1-e^{-\lambda t}$

(2) $P(T\ge 16 \mid T\ge 8)=\dfrac{P(T\ge 16 \wedge T\ge 8)}{P(T\ge 8)}=\dfrac{P(T\ge 16)}{P(T\ge 8)}$

$=\dfrac{1-P(T<16)}{1-P(T<8)}=\dfrac{1-F(16)}{1-F(8)}=\dfrac{e^{-16\lambda}}{e^{-8\lambda}}=e^{-8\lambda}$

14 设随机变量 $X\sim N(108,3^2)$. 求:

(1) $P(101.1<X<117.6)$;

(2) 常数 a,使 $P(X<a)=0.90$;

(3) 常数 a,使 $P(|X-a|>a)=0.01$.

解: (1) $P(101.1<X<117.6)=P(\mu-2.3\sigma<X<\mu+3.2\sigma)$

$=\Phi(3.2)-\Phi(-2.3)=0.9993-(1-0.9893)=0.9886$

(2) $\Phi(x)=0.90$ $x=1.28$ $a=\mu+1.28\sigma=111.84$

(3) $P(|X-a|>a)=0.01$ $P(|X-a|\le a)=0.99$

$P(0\le X\le 2a)=0.99=P(\mu-36\sigma\le X\le \mu+n\sigma)$

$=\Phi(n)-\Phi(-36)\approx\Phi(n)$ $n=2.33$ $2a=\mu+n\sigma$ $a=57.5$

心得 体会 拓广 疑问

15 某地抽样调查结果表明，考生的外语成绩（百分制）近似服从正态分布，平均成绩（参数 μ 之值）为 72 分，96 分以上的占考生的 2.3%，试求考生的外语成绩在 60 ~ 84 分之间的概率.

解: $P(X\geqslant 96)=P(X\geqslant \mu+n\sigma)=0.023$

$\Phi(n)=1-0.023=0.977 \quad n\approx 2.00$

$\sigma=\frac{96-72}{2}=12$

$P(60\leq X\leq 84)=P(\mu-\sigma\leq X\leq \mu+\sigma)=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1$

$=0.6826$

16 假设测量的随机误差 $X\sim N(0,10^2)$，试求在 100 次重复测量中，至少有三次测量误差的绝对值大于 19.6 的概率 a，并利用泊松分布求出 a 的近似值（要求小数点后取两位有效数字）.

解: $P(|X|>19.6)=1-P(|X|\leq 19.6)$

$=1-P(\mu-1.96\sigma\leq X\leq \mu+1.96\sigma)$

$=2\times(1-\Phi(1.96))=0.05$

$a=C_{100}^{3}\times 0.05^3\times 0.95^{97}$

心得 体会 拓广 疑问

17 在电源电压不超过 200 V，在 200 ～ 240 V 之间和超过 240 V 三种情况下，某种电子元件损坏的概率分别为 0.1，0.001 和 0.2. 假设电源电压服从正态分布 $N(220,25^2)$，试求：

(1) 该电子元件损坏的概率 α；

(2) 该电子元件损坏时，电源电压在 200 ～ 240 V 之间的概率 β.

解：(1) 设事件A：元件损坏，B_1、B_2、B_3： $U<200$，$200<U<240$，$U>240$

$P(A)=P(A|B_1)+P(A|B_2)+P(A|B_3)=0.301$

(2)

$$P(A|200<U<240)=\frac{P(AB_2)}{2\Phi(0.8)-1}=\frac{P(A)P(B_2|A)}{2\Phi(0.8)-1}=0.001$$

$\beta=P(B_2|A)=0.0019$

18 已知离散型随机变量 X 的分布列为

X	-2	-1	0	1	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{11}{30}$

求 $Y=X^2$ 的分布列.

解：

X	0	1	4	9
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{11}{30}$

心得 体会 拓广 疑问

19 设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

求 $Y=e^X$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

解: $F_Y(y)=P(e^X\leq y)=P(X\leq \ln y)=F_X(\ln y)$

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}\qquad F_X(\ln y)=\begin{cases}1-\frac{1}{y} & \ln y\geq 0\\ 0 & \ln y<0\end{cases}$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{1}{y^2} & y\geq 1\\ 0 & y<1\end{cases}$$

20 设 $X\sim N(0,1)$，求 $Y=|X|$ 的概率密度.

解: $F_Y(y)=P(|X|<y)=P(-y<X<y)=\Phi(y)-\Phi(-y)$

$=2\Phi(y)-1 \qquad (y\geq 0)$

$f_Y(y)=F_Y'(y)=2\Phi'(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-\frac{y^2}{2}}$

心得 体会 拓广 疑问

21 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi \\ 0, & 其他\end{cases}$$

求 $Y=\sin X$ 的概率密度.

解: $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\sin X\le y)=1-P(\arcsin y\le X\le \pi-\arcsin y)$

(当 $y>1$ $F_Y(y)=1$ $f_Y(y)=0$ 当 $y<-1$ $F_Y(y)=0$ $f_Y(y)=0$)

$=1-[F_X(\pi-\arcsin y)-F_X(\arcsin y)]$

$$F_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{\pi^2} & 0<x<\pi \\ 0 & 其他\end{cases}\qquad F_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\arcsin y & -1<y<1 \\ 0 & 其他\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}} & -1<y<1 \\ 0 & 其他\end{cases}$$

22 设随机变量 $X\sim E(1)$,求 $Y=\sqrt{X}$ 的概率密度.

解: $$f_X(x)=\begin{cases}0 & x\le 0 \\ e^{-x} & x>0\end{cases}\qquad F_X(x)=\begin{cases}0 & x\le 0 \\ 1-e^{-x} & x>0\end{cases}$$

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\sqrt{X}\le y)=P(X\le y^2)$

$$=F_X(y^2)=\begin{cases}0 & y^2\le 0 \\ 1-e^{-y^2} & y^2>0\end{cases}=1-e^{-y^2}\quad(y>0)$$

$f_Y(y)=2ye^{-y^2}\quad(y>0)$

心得 体会 拓广 疑问

23 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2x^3 e^{-x^2}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

试求:(1)$Y=X^2$ 的概率密度;(2)$Y=\ln X$ 的概率密度.

解:(1) $F_X(x)=\begin{cases}1-(x^2+1)e^{-x^2} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$ $-e^{-y}+(y+1)e^{-y}$

$F_Y(y)=P(X\leq\sqrt{y})=\begin{cases}1-(y+1)e^{-y} & y>0\\ 0 & y\leq 0\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}y e^{-y} & y>0\\ 0 & y\leq 0\end{cases}$

(2) $f_Y'(y)=e^y\cdot 2e^{3y}e^{-e^{2y}}$
$=2e^{4y-e^{2y}}$

24 随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi(1+x^2)}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

求 $Y=\ln X$ 的概率密度.

解: $F_Y(y)=P(\ln X\leq y)=P(X\leq e^y)=F_X(e^y)$
$f_Y(y)=f_X(e^y)e^y=\dfrac{2e^y}{\pi(1+e^{2y})}$

心得 体会 拓广 疑问

25 设连续型随机变量 X 的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ ax^2+bx, & 0<x<1\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}$$

且 $P\left(X<\frac{1}{3}\right)=P\left(X>\frac{1}{3}\right)$，求常数 a 和 b.

解: $F(1)=a+b=1$

$F(\frac{1}{3})=\frac{1}{2}=\frac{a}{9}+\frac{b}{3}$

$a=-\frac{3}{4}\quad b=\frac{7}{4}$

26 假设随机变量 X 的绝对值不大于 1，$P(X=-1)=\frac{1}{8}$，$P(X=1)=\frac{1}{4}$. 在事件 $\{-1<X<1\}$ 出现的条件下，X 在 $(-1,1)$ 内任一子区间上取值的条件概率与该子区间长度成正比. 试求：

(1) X 的分布函数；

(2) X 取负值的概率 p.

解: (1) $1=P(X=-1)+P(X=1)+P(X\in(-1,1))$

$P(X\in(-1,1))=\frac{5}{8}$

$P(X\in(-1,a))=\frac{5}{8}\times\frac{a+1}{2}=\frac{5(a+1)}{16}$

$x<-1\quad F(x)=0\qquad x>1\quad F(x)=1$

当 $-1\leq x\leq 1\quad F(x)=P(X\leq x)=P(X\leq -1)+P(-1\leq X\leq x)$

$=\frac{1}{8}+\frac{5(x+1)}{16}=\frac{5x+7}{16}$

(2) $P(X<0)=F(0)=\frac{7}{16}$

心得 体会 拓广 疑问

27 设随机变量 X 服从参数为 2 的指数分布，试证：$Y=1-e^{-2X}$ 在区间(0,1)上服从均匀分布.

证明: $f_X(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 2e^{-2x} & x\geq 0\end{cases}$ $Y=1-e^{-2X}$ $X=-\frac{1}{2}\ln(1-Y)$

$f_Y(y)=f_X\left(-\frac{1}{2}\ln(1-y)\right)\left(-\frac{1}{2}\ln(1-y)\right)'$

$=2(1-y)\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{1-y}=1$

显然 $Y\sim U(0,1)$

28 设随机变量 X 的概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & 1\leqslant x\leqslant 8\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$F(x)$ 是 X 的分布函数，求随机变量 $Y=F(X)$ 的分布函数.

解: $F(x)=P(x\leq X)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\,dx=\int_1^x\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}dx=\sqrt[3]{x}-1$ $(1\leq x\leq 8)$

当 $x<1$ $F(x)=0$ $x>8$ $F(x)=1$

$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(\sqrt[3]{x}-1\leq y)$

当 $y<0$ $F_Y(y)=0$

当 $0<y<1$ $F_Y(y)=P(\sqrt[3]{x}-1\leq y)=F[(y+1)^3]=y$

当 $y\geq 1$ $F_Y(y)=1$

心得 体会 拓广 疑问

29 设随机变量 $X\sim U[0,1]$，随机变量 $Y=X^2-4X+1$，求随机变量 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

解: $f_X(x)=\begin{cases}1 & 0<x\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$ $F_X(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x & 0<x\le 1\\ 1 & x>1\end{cases}$

$F_Y(y)=P(Y<y)=P(X^2-4X+1-y<0)$ $\Delta=(-4)^2-4(1-y)=12+4y$

当 $\Delta\le 0$ $12+4y\le 0$ $y\le -3$ $F_Y(y)=0$ 当 $\Delta>0$ $y>-3$

$F_Y(y)=P(2-\sqrt{y+3}<X<2+\sqrt{y+3})=F_X(2+\sqrt{y+3})-F_X(2-\sqrt{y+3})$

当 $2-\sqrt{y+3}\le 0$ $y\ge 1$ $2+\sqrt{y+3}\ge 4>1$ $F_Y(y)=1$

当 $0<2-\sqrt{y+3}\le 1$ $-2\le y<1$ $3\le 2+\sqrt{y+3}\le 4$ $F_Y(y)=\sqrt{y+3}-1$

当 $2-\sqrt{y+3}>1$ $-3<y<-2$ $F_Y(y)=0$

综上 $y<-2$ $F_Y(y)=0$ $-2\le y<1$ $F_Y(y)=\sqrt{y+3}-1$ $y>1$ $F_Y(y)=1$

$f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y+3}}$

30 设 $X\sim N(3,4)$，(1) 求 $P(2<X\le 5)$，$P(-4<X\le 10)$，$P(|X|>2)$，$P(X>3)$；(2) 确定 C 使得 $P(X>C)=P(X\le C)$.

解: (1) $\mu=3$ $\sigma^2=4$ $\sigma=2$

$P(2<X\le 5)=P(\mu-\frac{\sigma}{2}<x\le\mu+\sigma)=\Phi(1)-\Phi(-0.5)=0.5328$

$P(-4<X\le 10)=P(\mu-\frac{7}{2}\sigma<x\le\mu+\frac{7}{2}\sigma)=\Phi(\frac{7}{2})-\Phi(-\frac{7}{2})=0.9996$

$P(|X|>2)=2P(X<-2)=2P(x<\mu-\frac{5}{2}\sigma)=2\Phi(-\frac{5}{2})=0.0124$

$P(X>3)=1-P(X\le 3)=1-\Phi(0)=0.500$

(2) $P(X>c)=1-P(X\le c)=P(X\le c)$ $P(X\le c)=0.5=\Phi(0)$

$C=\mu=3$

心得 体会 拓广 疑问

31 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}Ax(1-x)^3, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求：

(1) 常数 A；

(2) X 的分布函数；

(3) 在 n 次独立观察中，X 的值至少有一次小于 0.5 的概率；

(4) $Y=X^3$ 的概率密度.

解：(1) $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{3}{10}A=1$ $A=\frac{10}{3}$ $A=20$

(2) $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{5}{3}x^2-\frac{2}{3}x^5 & 0\leq x\leq 1\\ 1 & x>1\end{cases}$

(3) $p(x<0.5)=F(0.5)=\frac{19}{48}$ $p(x\geq 0.5)=\frac{29}{48}$

$P=1-(\frac{29}{48})^n$

(4) $F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(X^3\leq y)=P(X\leq\sqrt[3]{y})=F_X(\sqrt[3]{y})$

当 $\sqrt[3]{y}<0$ $y<0$ $F_Y(y)=0$

当 $0\leq\sqrt[3]{y}\leq 1$ $0\leq y\leq 1$ $F_Y(y)=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}x^{\frac{5}{3}}$

当 $\sqrt[3]{y}>1$ $y>1$ $F_Y(y)=1$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

32 随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}Ax, & 0\leqslant x<1\\ B-x, & 1\leqslant x<2,\text{且 } f(x) \text{ 连续}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求：

(1) 常数 A,B；

(2) X 的分布函数；

(3) $P\left(\frac{1}{2}<X\leqslant\frac{3}{2}\right)$；

(4) $Y=1-\sqrt[3]{X}$ 的概率密度.

解：(1) $F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^1 Ax\,dx+\int_1^2 (B-x)dx=\frac{A}{2}+B-\frac{3}{2}=1$

$f(x)$ 连续 $A=B-1$ 有 $A=1$ $B=2$

(2) $f(x)=\begin{cases}x & 0\le x<1\\ 2-x & 1<x\le 2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$ $F_X(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{x^2}{2} & 0\le x\le 1\\ -\frac{x^2}{2}+2x-1 & 1<x\le 2\\ 1 & x>2\end{cases}$

(3) $P(\frac{1}{2}<X\le\frac{3}{2})=F(\frac{3}{2})-F(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}$

(4) $F_Y(y)=P(Y<y)=P(1-\sqrt[3]{X}<y)=P(X>(1-y)^3)=1-F[(1-y)^3]$

① $(1-y)^3<0$ $y>1$ $F_Y(y)=1$

② $0\le(1-y)^3\le 1$ $0\le y\le 1$ $F_Y(y)=1-\frac{(1-y)^6}{2}$

③ $1<(1-y)^3\le 2$ $1-\sqrt[3]{2}\le y<0$ $F_Y(y)=2+\frac{(1-y)^6}{2}-2(1-y)^3$

④ $(1-y)^3>2$ $y<1-\sqrt[3]{2}$ $F_Y(y)=0$

$f_Y(y)=\begin{cases}0 & y<1-\sqrt[3]{2} \text{ 或 } y>1\\ 3(1-y)^2[2-(1-y)^3] & 1-\sqrt[3]{2}<y\le 0\\ 3(1-y)^5 & 0\le y\le 1\end{cases}$

年 月 日

概率论与数理统计同步训练

第　四　章

班级：19机械二班

学号：1903102203

姓名：吴晓宇

心得 体会 拓广 疑问

❶ 将一硬币连掷三次，以 X 表示在三次中出现正面的次数，以 Y 表示在三次中出现正面次数与出现反面次数之差的绝对值，试写出 (X,Y) 的分布列及边缘分布列.

解:

Y \ X	0	1	2	3	p_i
1	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{3}{4}$
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
p_j	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

❷ 设 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} C(R-\sqrt{x^2+y^2}), & x^2+y^2\leqslant R^2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求：(1) 系数 C；(2) (X,Y) 落在圆 $x^2+y^2\leqslant r^2\,(r<R)$ 内的概率.

解: (1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} C(R-\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy$

$=\int_0^{2\pi}\int_0^{R} C(R-r)\,r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{3}R^3C=1$ $C=\frac{3}{\pi R^3}$

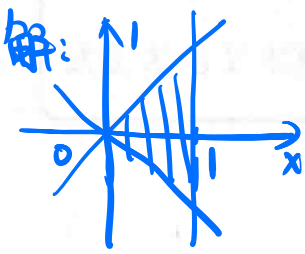
(2) $P(r_0<r) = \frac{3}{\pi R^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{r}(R-r)\,r\,dr\,d\theta = \frac{3r^2}{R^2}-\frac{2r^3}{R^3}$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

❸ 设二维随机变量(X,Y)在区域$D:0<x<1,|y|<x$内服从均匀分布,求边缘概率密度.

解:



$x=-y$

$f(x,y)=1$

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$ 当 $x<0$ 或 $x>1$ $f_X(x)=0$

当 $0\le x\le 1$ $f_X(x)=\int_{-x}^{x} dy=2x$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$ 当 $|y|>1$ $f_Y(y)=0$

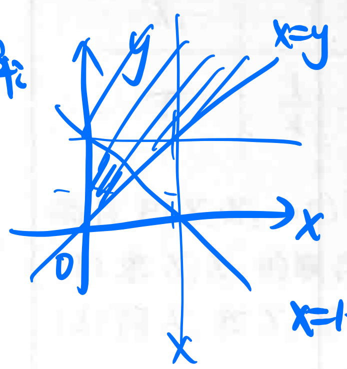
当 $-1\le y\le 0$ $f_Y(y)=\int_{-y}^{1} dy=1+y$ 当 $0<y\le 1$ $f_Y(y)=\int_{y}^{1} dy=1-y$

❹ 设(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求边缘概率密度和概率$P(X+Y\leqslant 1)$.

解:



$f_X(x)=\int_{x}^{+\infty} e^{-y}\,dy=e^{-x}\ (x>0)$

$f_Y(y)=\int_{0}^{y} e^{-y}\,dx=ye^{-y}$

$P(X+Y\le 1)=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left(\int_{x}^{1-x} e^{-y}\,dy\right)dx=1+\frac{1}{e}-\frac{2}{\sqrt{e}}$

心得 体会 拓广 疑问

5 一电子仪器由两个部件组成，以 X 和 Y 分别表示两个部件的寿命(单位：千小时)，已知 X,Y 的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-0.5x}-e^{-0.5y}+e^{-0.5(x+y)}, & x\geqslant 0,y\geqslant 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(1) 问 X,Y 是否独立？为什么？

(2) 求两个部件的寿命都超过 100 h 的概率.

解：(1) $F_X(x)=F(x,+\infty)=1-e^{-0.5x}$ $\quad F_X(y)=1-e^{-0.5y}$

$F_X(x)\cdot F_Y(y)=1-e^{-0.5x}-e^{-0.5y}+e^{-0.5(x+y)}=F(x,y)$

独立

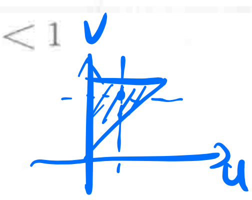
(2) $P(X>100,Y>100)=P(X>100)P(Y>100)=(1-P(X\leq 100))(1-P(Y\leq 100))$

$=(1-F_X(100))(1-F_Y(100))=e^{-100}$

6 设(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\leqslant x<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

问 X 与 Y 是否独立？



解：$f_X(x)=\begin{cases}\int_x^1 8xy\,dy=4x(1-x^2) & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

$f_Y(y)=\begin{cases}\int_0^y 8xy\,dx=4y^3 & 0<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

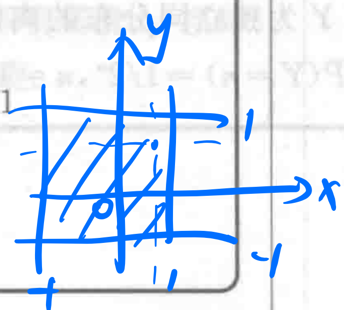
$f_X(x)\cdot f_Y(y)\neq f(x,y)$ 不独立.

心得 体会 拓广 疑问

7 设(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1+xy}{4}, & |x|<1,\ |y|<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

试证 X 与 Y 不独立，但 X^2 与 Y^2 是相互独立的.



证明: $f_X(x)=\int_{-1}^{1}\frac{1+xy}{4}dy=\frac{1}{2}=f_Y(y)$ 显然 X与Y不独立

$F_{X^2}(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \sqrt{x} & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$ $F_{Y^2}(y)=\begin{cases}0 & y<0\\ \sqrt{y} & 0\le y<1\\ 1 & y\ge 1\end{cases}$

$F_{(X^2,Y^2)}(x,y)=\begin{cases}0 & x<0 \text{ 或 } y<0\\ \sqrt{xy} & 0\le x<1 \text{ 且 } 0\le y<1\\ \sqrt{x} & 0\le x<1 \text{ 且 } y\ge 1\\ \sqrt{y} & x\ge 1 \text{ 且 } 0\le y<1\\ 1 & x\ge 1 \text{ 且 } y\ge 1\end{cases}$ 故独立.

8 已知随机变量 X_1 和 X_2 的概率分布为

X_1	-1	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

X_2	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

而且 $P(X_1X_2=0)=1$.

(1) 求 X_1X_2 的联合分布.

(2) 问 X_1 和 X_2 是否独立？为什么？

解: (1) $P(X_1X_2=0)=1$ $P(X_1X_2\neq 0)=0$ $P(X_1=\pm1,X_2=1)=0$

$X_2 \backslash X_1$	-1	0	1	$P(X_2=j)$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$P(X_1=i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

(2) $P(X_1=-1,X_2=0)=\frac{1}{4}$ $P(X_1=-1)\cdot P(X_2=0)=\frac{1}{8}$

不独立.

心得 体会 拓广 疑问

9 设 X 与 Y 为独立同分布的离散型随机变量，其概率分布列为 $P(X=n)=P(Y=n)=1/2^n, n=1,2,\cdots$，求 $X+Y$ 的分布列.

解: $P(X=i)=\frac{1}{2^i}$ $P(Y=j)=\frac{1}{2^j}$

$$P(X+Y=k)=\sum_{a=1}^{k-1} P(X=a)P(Y=k-a)$$

$$=\frac{k-1}{2^k}$$

10 设 X,Y 相互独立，其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}, \quad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$$

求 $X+Y$ 的概率密度. $[0,1]$ $(0,+\infty)$

解: $P(X+Y=k)=\sum p(X=j)P(Y=k-j)$

(当 $k>1$) $=\int_0^1 e^{-(k-y)}dy=\frac{e-1}{e^k}$

(当 $0<k\leq 1$) $=\int_0^k e^{-(k-y)}dy=1-\frac{1}{e^k}$

当 $k\leq 0$ $P(X+Y=k)=0$

心得 体会 拓广 疑问

11 在 4.5 节例 6 中，若系统 L_1 与 L_2 按图 2 联结，即当系统 L_1 损坏时，系统 L_2 开始工作，求系统 L 的寿命 Z 的概率密度.

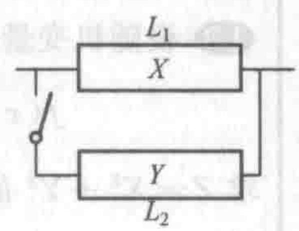


图 2

$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

$F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\beta y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$

解: $Z=X+Y$

$z>0,\ f_Z(z)=\int_0^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\,dy$

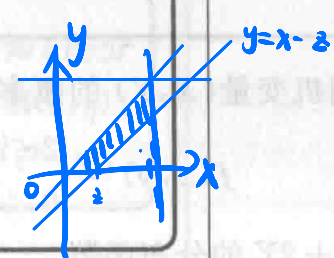
$=\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\left(e^{-\alpha z}-e^{-\beta z}\right)$

$z\le 0\quad f_Z(z)=0$

12 设 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<y<x,0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求 $Z=X-Y$ 的概率密度.



$x-y\le z \quad y\ge x-z$

解: $F_Z(z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\,dx\,dy$

当 $z\ge 1$ $F_Z(z)=0$ $f_Z(z)=0$ 当 $z<0$ $F_Z(z)=1$ $f_Z(z)=0$

当 $0\le z<1$

$f_Z(z)=\int_0^z\int_0^x 3x\,dy\,dx+\int_z^1\int_{x-z}^x 3x\,dy\,dx=\frac{3}{2}(1-z^2)$

心得 体会 拓广 疑问

13 设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}},\ -\infty<x,y<+\infty$$

求 $Z=X^2+Y^2$ 的概率密度.

解: $F_Z(z)=\iint\limits_{x^2+y^2\le z}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}dxdy$ $x=r\cos\theta$ $y=r\sin\theta$

$dxdy=rdrd\theta$

$F_Z(z)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{z}}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}rdrd\theta=\underline{2(1-e^{-\sqrt{z}})}$

$1-e^{-\frac{z}{2\sigma^2}}$

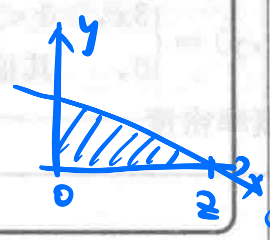
$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{z}e^{\sqrt{z}}}$

$\frac{1}{2\sigma^2}e^{-\frac{z}{2\sigma^2}}$

14 设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求 $Z=X+2Y$ 的分布函数.



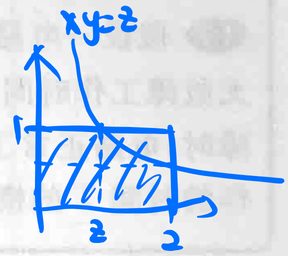
$y=-\frac{x}{2}+\frac{z}{2}$

解: $F_Z(z)=\int_0^z\int_0^{-\frac{x}{2}+\frac{z}{2}}2e^{-(x+2y)}dydx=1-\frac{z+1}{e^z}$ $(z>0)$

$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{z}{e^z} & (z>0)\\ 0 & z\le 0\end{cases}$

心得 体会 拓广 疑问

15 设二维随机变量(X,Y)在矩形$G=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 1\}$上服从均匀分布，试求边长为$X,Y$的矩形面积$S$的概率密度$f(s)$.



解: $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & (x,y)\in G\\ 0 & (x,y)\notin G\end{cases}$

$Z=XY$ 当 $0<s<2$ $F_Z(z)=\int_0^1\int_0^z \frac{1}{2}\,dx\,dy+\int_z^2\int_0^{\frac{z}{x}}\frac{1}{2}\,dy\,dx$

$=\frac{z}{2}\left(1+\ln\frac{2}{z}\right)$

$f_Z(z)=\frac{\ln\frac{2}{z}}{2}$ $f(s)=\frac{\ln\frac{2}{s}}{2}$

当 $s\geqslant 2$ $f(s)=0$

16 设ξ,η是相互独立且服从同一分布的两个随机变量，已知ξ的分布律为$P(\xi=i)=1/3,i=1,2,3$，又设$X=\max(\xi,\eta),Y=\min(\xi,\eta)$，试写出二维随机变量$(X,Y)$的分布律及边缘分布列并求$P(\xi=\eta)$.

解: $P(X=j)=P(\xi=j)P(\eta<j)+P(\eta=j)P(\xi\leqslant j)+P(\eta=j)P(\xi=j)$

$=\frac{1}{3}\times\frac{j-1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{j-1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2j-1}{9}$

$P(Y=k)=P(\xi=k)P(\eta>k)+P(\eta=k)P(\xi>k)+P(\eta=k)P(\xi=k)$

$=\frac{1}{3}\times\frac{3-k}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{3-k}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{7-2k}{9}$

Y \ X	1	2	3	$P(Y=k)$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$
2	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$
3	0	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
$P(X=j)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{5}{9}$	

$P(\xi=\eta)=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$

心得 体会 拓广 疑问

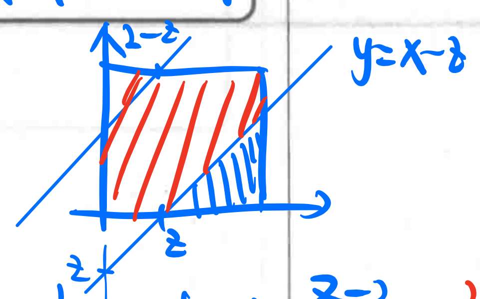
17 假设一电路装有三个同种电器元件，其工作状态相互独立，且无故障工作时间都服从参数为$\lambda>0$的指数分布. 当三个元件都无故障时，电路正常工作，否则整个电路不能正常工作. 试求电路正常工作的时间 T 的概率分布.

解：$T=\min(t_1,t_2,t_3)$

$$P(T=t)=3P(t_1\le t)P(t_2>t)P(t_3>t)$$
$$=3(1-e^{-\lambda t})e^{-2\lambda t}$$

$$1-P(X_1>t)P(X_2>t)P(X_3>t)=1-e^{-3\lambda t}$$

18 二维随机变量(X,Y)服从区域$G=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2\}$上的均匀分布. 求$Z=X-Y$的概率密度. $X-Y\le z$ $Y\ge X-z$



解：当$z\ge 2$ $f_Z(z)=0$ 当$z\le -2$ $f_Z(z)=0$

当$0\le z\le 2$

$$F_Z(z)=\int_z^2\int_0^{x-z}\frac{1}{4}\,dy\,dx=\frac{z^2}{8}-\frac{z}{2}+\frac{1}{2}\qquad f_Z(z)=\frac{z-2}{4}\quad \frac{2-z}{4}$$

当$-2<z<0$

$$F_Z(z)=1-\int_0^{2+z}\int_{x-z}^{2}\frac{1}{4}\,dy\,dx=1-\frac{(z+2)^2}{8}\qquad f_Z(z)=\cancel{-}\,\frac{z+2}{4}$$

心得 体会 拓广 疑问

19 设 $X_1 \sim N(1,2)$, $X_2 \sim N(0,3)$, $X_3 \sim N(2,1)$ 且 X_1, X_2, X_3 相互独立，则 $P(0 \leqslant 2X_1 + 3X_2 - X_3 \leqslant 6) =$ <u>0.3413</u>.

$Y = 2X_1 + 3X_2 - X_3 = 2(X_1 + X_2) + (X_2 - X_3)$

$Y \sim N(0, 36)$

$P = \Phi(1) - \Phi(0)$

$2X_1 \sim N(2, 8)$

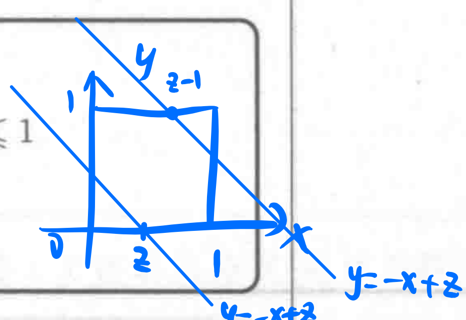
$3X_2 \sim N(0, 27)$

$X_3 \sim N(2, 1)$

20 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy, & 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 $Z = X + Y$ 的概率密度.



解：当 $z \leq 0$ $f_Z(z) = 0$

当 $0 < z \leq 1$ $F_Z(z) = \int_0^z dx \int_0^{z-x} 4xy\, dy = \frac{z^4}{6}$ $f_Z(z) = \frac{2}{3} z^3$

当 $1 < z \leq 2$ $F_Z(z) = \int_0^{z-1} dx \int_0^1 4xy\, dy + \int_{z-1}^1 dx \int_0^{z-x} 4xy\, dy$

$f_Z(z) = -\frac{2}{3} z^3 + 4z - \frac{8}{3}$

心得 体会 拓广 疑问

21 设 A,B 为两个随机事件，且 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B\mid A)=\frac{1}{3}$，$P(A\mid B)=\frac{1}{2}$，令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生}\\0, & A\text{不发生}\end{cases},\quad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生}\\0, & B\text{不发生}\end{cases}$$

求：(1) 二维随机变量 (X,Y) 的概率分布；(2) $Z=X^2+Y^2$ 的概率分布.

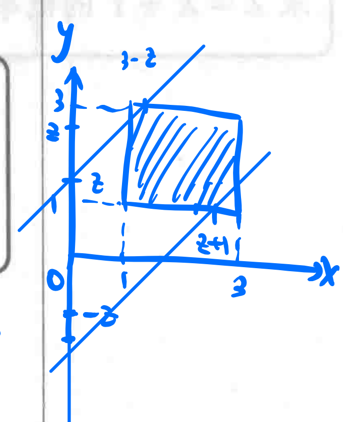
解：(1) $P(B|A)=\frac{P(BA)}{P(A)}$ $P(AB)=\frac{1}{12}$ $P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1}{6}$

Y \ X	0	1	
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

(2) $Z=0,1,2$

$P(Z=0)=\frac{2}{3}$ $P(Z=1)=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$ $P(Z=2)=\frac{1}{12}$

22 设随机变量 X 和 Y 的联合分布是正方形区域 $G=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 3,1\leqslant y\leqslant 3\}$ 上的均匀分布，试求随机变量 $Z=|X-Y|$ 的概率密度.



解：$|X-Y|\leq z$ $-z\leq X-Y\leq z$ $-X-z\leq -Y\leq -X+z$ $X-z\leq Y\leq X+z$

当 $z\leq 0$ $F_Z(z)=0$ $f_Z(z)=0$ 当 $z>2$ $F_Z(z)=1$ $f_Z(z)=0$

当 $0<z\leq 2$

$F_Z(z)=1-\int_1^{3-z}dx\int_{x+z}^{3}\frac{1}{4}dy-\int_{z+1}^{3}dx\int_1^{x-z}\frac{1}{4}dy$

$=1-\frac{(z-2)^2}{4}$

$f_Z(z)=-\frac{z}{2}+1$

心得 体会 拓广 疑问

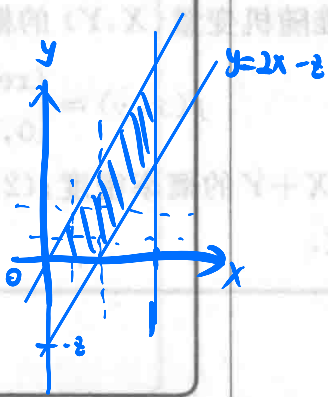
23 设二维随机变量(X,Y)的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<2x\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求：(1)(X,Y)的边缘概率密度$f_X(x)$，$f_Y(y)$；

(2)$Z=2X-Y$的概率密度$f_Z(z)$；

(3)$P\left(Y\leqslant\frac{1}{2}\middle|X\leqslant\frac{1}{2}\right)$.



解：(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^{2x}dy=2x \quad (0<x<1)$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{\frac{y}{2}}^{1}dx=1-\frac{y}{2} \quad (0<y<2)$

(2) $2X-Y\leq z \quad Y\geq 2X-z$

当$z\geq 2$和$z\leq 0$ $\quad f_Z(z)=0$

当$0<z<2$ $\quad F_Z(z)=1-\int_{\frac{z}{2}}^{1}dx\int_0^{2x-z}dy=-\frac{z^2}{4}+z \qquad f_Z(z)=-\frac{z}{2}+1$

(3) $P(Y\leq\frac{1}{2}|X\leq\frac{1}{2})=\frac{P(X\leq\frac{1}{2},Y\leq\frac{1}{2})}{P(X\leq\frac{1}{2})}=\frac{\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{y}{2}}^{\frac{1}{2}}dx}{\int_0^{\frac{1}{2}}2x\,dx}=\frac{3}{4}$

24 设随机变量X与Y独立，其中X的分布列为

X	1	2
P	0.3	0.7

而Y的概率密度为$f_Y(y)$，求随机变量$Z=X+Y$的密度函数$f_Z(z)$.

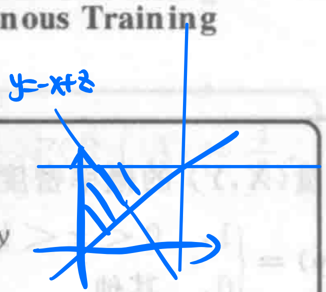
解：$P(Y=y)=\int_{-\infty}^{y}f_Y(u)du$

$P(X+Y=z)=P(X=1)P(Y=z-1)+P(X=2)P(Y=z-2)$

$=0.3\int_{-\infty}^{z-1}f_Y(u)du+0.7\int_{-\infty}^{z-2}f_Y(u)du$

$f_Z(z)=0.3f_Y(z-1)+0.7f_Y(z-2)$

心得 体会 拓广 疑问



25 设二维随机变量(X,Y)的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}xe^{-y}, & 0<x<y\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求:(1)$Z=X+Y$的概率密度;(2)$M=\max(X,Y)$和$N=\min(X,Y)$的概率密度.

解:(1) $F_Z(z)=\int_0^{\frac{z}{2}}dx\int_x^{z-x}xe^{-y}dy=e^{-z}-(z+2)e^{-\frac{z}{2}}+1$ $(z>0)$ $f_Z(z)=-e^{-z}+\frac{z}{2}e^{-\frac{z}{2}}$

(2) $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}du\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)dv=\int_0^x du\int_u^{+\infty}ue^{-v}dv=-(x+1)e^{-x}$

$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y}dv\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)du=\int_0^y dv\int_0^v ue^{-v}du=-(\frac{y^2}{2}+y+1)e^{-y}$

$M(x,y)=F_X(x)F_Y(y)=\frac{(x+1)(\frac{y^2}{2}+y+1)}{e^{x+y}}$

$N(x,y)=[1-F_X(x)][1-F_Y(y)]=(1+\frac{x+1}{e^x})(1+\frac{\frac{y^2}{2}+y+1}{e^y})$

26 设随机变量X服从参数为λ的指数分布,求随机变量$Y=\min(X,2)$的分布函数.

解: $f_X(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \lambda e^{-\lambda x} & x\geq 0\end{cases}$

$F_X(x)=1-e^{-\lambda x}$

$F_Y(y)=\begin{cases}0 & y<0\\ 1-e^{-\lambda y} & 0\leq y<2\\ 1 & y>2\end{cases}$

心得 体会 拓广 疑问

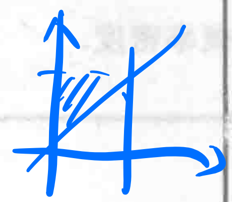
27 设随机变量 X 关于随机变量 Y 的条件概率密度

$$f_{X|Y}(x \mid y)=\begin{cases}3x^2/y^3, & 0<x<y\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

而 Y 的概率密度

$$f_Y(y)=\begin{cases}5y^4, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求 $P(X>1/2)$.



解：$f(x,y)=f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)=\begin{cases}15x^2y & 0<x<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

$f_X(x)=\int_x^1 15x^2y\,dy=\frac{15}{2}x^2(1-x^2)\quad (0<x<1)$

$P(X>\frac{1}{2})=\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{15}{2}x^2(1-x^2)dx=\frac{47}{64}$

28 设随机变量 $X\sim U(0,1)$，在 $X=x(0<x<1)$ 的条件下，随机变量 Y 在区间 $(0,x)$ 上服从均匀分布，求：

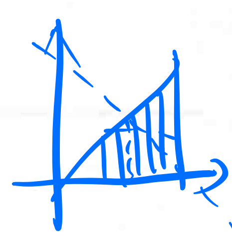
(1) 随机变量 X 和 Y 的联合概率密度；

(2) Y 的概率密度；

(3) $P(X+Y>1)$.

解：(1) $f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{x}\qquad f_X(x)=1\quad (0<x<1)$

$f(x,y)=\frac{1}{x}\qquad 0<y<x<1$



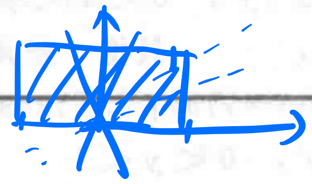
(2) $f_Y(y)=\int_y^1 f(x,y)dx=-\ln y$

(3) $P(X+Y>1)=\int_{\frac{1}{2}}^1 dx\int_{-x+1}^{x}\frac{1}{x}dy=1-\ln 2$

心得 体会 拓广 疑问

29 设(X,Y)服从$D=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$上的均匀分布，求$Z=\dfrac{Y}{3X}$的概率密度.

$\frac{Y}{3X}\le z$



解: $\frac{Y}{3X}\le z \Rightarrow \begin{cases} Y\le 3Xz & (X>0)\\ Y\ge 3Xz & (X<0)\end{cases}$

$$F_Z(z)=\begin{cases} 1-\frac{1}{12z} & (z>\frac{1}{3})\\ \frac{1}{2}+\frac{3z}{4} & (0\le z<\frac{1}{3})\\ \frac{1}{2}+\frac{3z}{4} & (-\frac{1}{3}\le z<0)\\ \frac{1}{12z} & (z<-\frac{1}{3})\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases} \frac{1}{12z^2} & (z>\frac{1}{3})\\ \frac{3}{4} & (0\le z<\frac{1}{3})\\ +\frac{3}{4} & (-\frac{1}{3}\le z<0)\\ -\frac{1}{12z^2} & (z<-\frac{1}{3})\end{cases}$$

概率论与数理统计同步训练

第 五 章

班级：19机械二班

学号：1803 10203

姓名：吴晓宇

心得 体会 拓广 疑问

1 假设有 10 只同种电器元件，其中有 2 只废品，从这批元件中任取 1 只，如是废品，则扔掉重新取 1 只，如仍是废品，则扔掉再取 1 只，试求在取到正品之前，已取出的废品只数的分布、数学期望和方差.

解: $P(X=0)=\frac{C_8^1}{C_{10}^1}=\frac{4}{5}$

$P(X=1)=\frac{C_2^1}{C_{10}^1}\frac{C_8^1}{C_9^1}=\frac{8}{45}$

$P(X=2)=\frac{C_2^1}{C_{10}^1}\frac{C_1^1}{C_9^1}=\frac{1}{45}$

$E(X)=0\times\frac{4}{5}+1\times\frac{8}{45}+2\times\frac{1}{45}=\frac{2}{9}$

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{88}{405}$

2 假设一部机器在一天内发生故障的概率为 0.2，机器发生故障时全天停止工作，若一周 5 个工作日里无故障，可获利润 10 万元；发生一次故障仍可获利润 5 万元；发生两次故障可获利润 0 元；发生三次或三次以上故障就要亏损 2 万元. 求一周内期望利润是多少？

解: 设故障次数为X

$P(X=0)=(1-0.2)^5=\frac{1024}{3125}$

$P(X=1)=C_5^1\,0.2\times0.8^4=\frac{256}{625}$

$P(X=2)=C_5^2\,0.2^2\times0.8^3=\frac{128}{625}$

$P(X\geq3)=1-\sum_{i=0}^{2}P(X=i)=\frac{181}{3125}$

$E(X)=5.20896$ (万元)

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

3 设随机变量 X 服从几何分布，其分布列为

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p,0<p<1,k=1,2,3,\cdots$$

求 $E(X)$ 与 $D(X)$.

解：$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}p=\frac{1}{p}$

$D(X)=\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}p\left(k-\frac{1-p^2}{p^2}\right)=\frac{1}{p}-1$

$\frac{1-p}{p^2}$

4 设随机变量 X 分别具有下列概率密度，求其数学期望与方差：

(1) $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$；

(2) $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1\\ 2-x, & 1\leqslant x\leqslant 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

解：(1) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-|x|}x=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}xe^{x}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{2}xe^{-x}dx=\cancel{1}\ 0$

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}x^2e^{x}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{2}x^2e^{-x}dx=2$

$D(X)=\cancel{1}\ 2$

(2) $E(X)=\int_0^1x^2dx+\int_1^2x(2-x)dx=1$

$E(X^2)=\int_0^1x^3dx+\int_1^2x^2(2-x)dx=\frac{7}{6}$

$D(X)=\frac{1}{6}$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

5 设某种商品每周的需求量 X 服从区间[10,30]上的均匀分布，而经销商店的进货量为区间[10,30]中的某一整数，商店每销售一单位商品，可获利 500 元，若供大于求则削价处理，每处理一单位商品亏损 100 元；若供不应求，则从外部调剂供应，此时每一单位商品仅获利 300 元. 为使商店所获利润期望不少于 9 280 元，试确定最小进货量.

解：设进货量为Y，利润为Z

当 $10\le Y\le X$ $Z=500Y+300(X-Y)=300X+200Y$

当 $X\le Y\le 30$ $Z=500X-100(Y-X)=600X-100Y$

$$E_Z(X)=\sum_{X=10}^{Y}\frac{1}{20}(600X-100Y)+\sum_{X=Y+1}^{30}\frac{1}{20}(300X+200Y)\geqslant 9280$$

$Y\geqslant 15.4$ $Y_{min}=16$

$a=21$

$$E(Y)=\frac{1}{20}\int_0^a(600x-100a)dx+\frac{1}{20}\int_a^{30}(300x+200a)dx$$

心得 体会 拓广 疑问

6 设 X 和 Y 同分布，且 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}x^2, & 0<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(1) 已知事件 $A=\{X>a\}$ 和事件 $B=\{Y>a\}$ 独立，且 $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$，求常数 a；

(2) 求 $E\left(\frac{1}{X^2}\right)$。

$0 \quad \frac{1}{8}x^3 \quad 1$

$P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

解：(1) $P(A\cup B)=\frac{3}{4}=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}=\int_a^2\frac{3}{8}x^2dx=1-\frac{1}{8}a^3 \quad a=\sqrt[3]{4}$

(2) $E\left(\frac{1}{X^2}\right)=\int_0^2\frac{1}{X^2}\cdot\frac{3}{8}x^2dx=\frac{3}{4}$

心得 体会 拓广 疑问

7 设(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}4xye^{-(x^2+y^2)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$的数学期望.

解: $E(Z)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}\,4xy\,e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$

$x=r\cos\theta \quad y=r\sin\theta \qquad dxdy=rdrd\theta$

$E(Z)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{+\infty}4r^4\sin\theta\cos\theta\, e^{-r^2}dr$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^{+\infty}u^{\frac{3}{2}}e^{-u}du$

$=\Gamma(\frac{5}{2})=\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$

8 设X服从泊松分布. (1) 若$P(X\geqslant 1)=1-e^{-2}$, 求$E(X^2)$; (2) 若$E(X^2)=12$, 求$P(X\geqslant 1)$.

解: (1) $P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $\quad P(X\geqslant1)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=1-e^{-\lambda}=1-e^{-2}$ $\quad \lambda=2$

$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\lambda(\lambda+1)=6$

(2) $E(X^2)=12 \quad \lambda=3 \qquad P(X\geqslant1)=1-e^{-3}$

心得 体会 拓广 疑问

9 设 $X \sim B(n,p)$ 且 $E(X)=2, D(X)=1$，求 $P(X>1)$.

解: $E(X)=np=2$ $D(X)=np(1-p)=1$ $p=\frac{1}{2}$ $n=4$

$P(X>1)=1-P(X\le 1)=1-\frac{1}{2^4}-C_4^1\frac{1}{2^3}\times\frac{1}{2}=\frac{11}{16}$

10 设 $X \sim U[a,b]$ 且 $E(X)=2, D(X)=\frac{1}{3}$，求 a,b 的值.

解: $E(X)=\frac{a+b}{2}$ $E(X^2)=E^2(X)+D(X)=\frac{13}{3}=\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)$ 有 $a=1$ $b=3$

心得 体会 拓广 疑问

11 假设随机变量 Y 服从参数为 $\lambda=1$ 的指数分布，定义随机变量

$$X_k=\begin{cases}0, & 若\ Y\leqslant k\\ 1, & 若\ Y>k\end{cases}\quad (k=1,2)$$

求：

(1) X_1 和 X_2 的联合概率分布；

(2) $E(X_1+X_2)$.

解：(1) $f_Y(y)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda y} & y\geq 0\\ 0 & y<0\end{cases}$

$P(X_k=0)=\int_0^k \lambda e^{-\lambda y}dy=1-e^{-k}$

$X_1 \backslash X_2$	0	1	$P(X_1=i)$
0	$(1-\frac{1}{e})(1-\frac{1}{e^2})$	$(1-\frac{1}{e})\frac{1}{e^2}$	$1-\frac{1}{e}$
1	$\frac{1}{e}(1-\frac{1}{e^2})$	$\frac{1}{e^3}$	$\frac{1}{e}$
$P(X_2=i)$	$1-\frac{1}{e^2}$	$\frac{1}{e^2}$	1

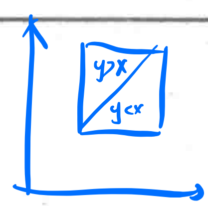
(2) $E(X_1+X_2)$

$=0\times(1-\frac{1}{e})(1-\frac{1}{e^2})+1\times[(1-\frac{1}{e})\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e}(1-\frac{1}{e^2})]$

$+2\times\frac{1}{e^3}=\frac{e+1}{e^2}$

12 一商店经销某种商品，每周进货量 X 与顾客对该种商品的需求量 Y 是相互独立的随机变量，且都服从区间[10,20]上的均匀分布.商店每售出一单位商品可得利润 1 000 元；若需求量超过了进货量，商店可从其他商店调剂供应，这时每单位商品获利为 500 元.试计算此商店经销该种商品每周所得利润的期望值.

解. $f(x,y)=\frac{1}{100}$



当 $y\leq x$　$g(x,y)=1000y$

当 $y>x$　$g(x,y)=1000x+500(y-x)=500(x+y)$

$E(Z)=\int_{10}^{20}dx\int_{10}^{x}1000y\times\frac{1}{100}dy+\int_{10}^{20}dx\int_{x}^{20}500(x+y)\times\frac{1}{100}dy=14167$(元)

心得 体会 拓广 疑问

13 设 X,Y 是两个相互独立的随机变量，其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & 其他\end{cases},\quad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-(y-5)}, & y>5\\ 0, & y\leqslant 5\end{cases}$$

求 $E(XY),D(XY)$.

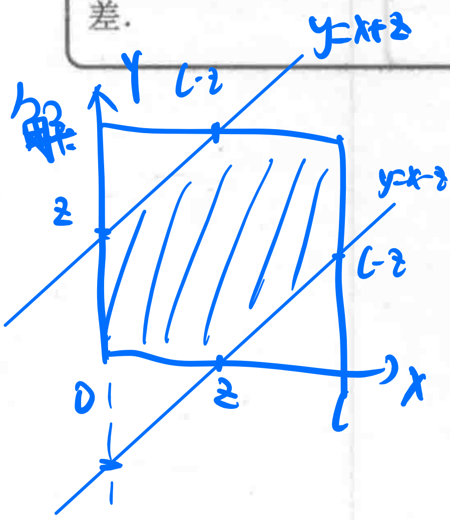
解: $E(XY)=E(X)E(Y)=\int_0^1 x\cdot 2x\,dx\cdot\int_5^{+\infty} ye^{-(y-5)}dy=4$

$E(X^2Y^2)=E(X^2)E(Y^2)=\int_0^1 x^2\cdot 2x\,dx\cdot\int_5^{+\infty} y^2e^{-(y-5)}dy=\frac{37}{2}$

$D(XY)=E(X^2Y^2)-E^2(XY)=\frac{5}{2}$

14 在长为 l 的线段上，任取两点，求两点间距离的数学期望与方差.

解:



$f(x,y)=\frac{1}{l^2}\quad(0<x<l\quad 0<y<l)\qquad Z=|Y-X|$

$F_Z(z)=1-\int_0^{l-z}dx\int_{x+z}^{l}\frac{dy}{l^2}-\int_z^{l}dx\int_0^{x-z}\frac{dy}{l^2}$

$=1-\frac{(l-z)^2}{l^2}$

$f_Z(z)=-\frac{2z}{l^2}+\frac{2}{l}$

$E(Z)=\int_0^l z\left(-\frac{2z}{l^2}+\frac{2}{l}\right)dz=\frac{l}{3}$

$E(Z^2)=\int_0^l z^2\left(-\frac{2z}{l^2}+\frac{2}{l}\right)dz=\frac{l^2}{6}$

$D(Z)=E(Z^2)-E^2(Z)=\frac{l^2}{18}$

心得 体会 拓广 疑问

15 设随机变量 X 与 Y 独立，且 X 服从均值为 1，标准差（均方差）为 $\sqrt{2}$ 的正态分布，而 Y 服从标准正态分布，试求随机变量 $Z=2X-Y+3$ 的概率密度.

解：$X\sim N(1,2)$ 　$Y\sim N(0,1)$

$E(Z)=2E(X)-E(Y)+3=5$

$D(Z)=4D(X)+D(Y)=9$

$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 3}e^{-\frac{(z-5)^2}{2\times 9}}$

$=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-5)^2}{18}}$

16 设 X,Y 是两个相互独立且均服从正态分布 $N\left(0,\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)$ 的随机变量，求 $E(|X-Y|)$，$D(|X-Y|)$.

解：设 $Z=X-Y$ 　$Z\sim N(0,1)$

$E(|Z|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}ze^{-\frac{z^2}{2}}dz$

$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}d(\frac{z^2}{2})$

$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

$E(|Z|^2)=E(Z^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}z^2e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{p}\,e^{-p}dp=1$

$D(Z)=E(|Z|^2)-E^2(|Z|)=1-\frac{2}{\pi}$

心得 体会 拓广 疑问

17（超几何分布的数学期望） 设 N 件产品中有 M 件次品，从中任取 n 件进行检查，求查得的次品数 X 的数学期望.

解：$P(X=k)=\dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$

$E(X)=\sum_{k=0}^{n} kP(X=k)=\dfrac{nM}{N}$

18 对三台仪器进行检验，各台仪器产生故障的概率分为 p_1, p_2, p_3，求产生故障的仪器的台数 X 的数学期望与方差.

解：$P(X=0)=(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$

$P(X=1)=p_1(1-p_2)(1-p_3)+(1-p_1)p_2(1-p_3)+(1-p_1)(1-p_2)p_3$

$P(X=2)=p_1p_2(1-p_3)+p_1(1-p_2)p_3+(1-p_1)p_2p_3$

$P(X=3)=p_1p_2p_3$

$E(X)=p_1+p_2+p_3$

$E(X^2)=p_1+p_2+p_3+2(p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3)$

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=p_1+p_2+p_3-(p_1^2+p_2^2+p_3^2)$

心得 体会 拓广 疑问

19 将 n 只球（编号为 $1\sim n$）随机地放入 n 个盒子（编号为 $1\sim n$）中去，一个盒放一只球，将一只球放入与球同号的盒子中算为一个配对，记 X 为配对的个数，求 $E(X)$.

解：设 $X_i=\begin{cases}1 & i号球在i号盒\\ 0 & i号球不在i号盒\end{cases}$

$X=\sum_{i=1}^{n}X_i$

$P(X_i=1)=\frac{1}{n}$ $E(X_i)=\frac{1}{n}$ $E(X)=1$

20 已知 $D(X)=25, D(Y)=36, \rho_{XY}=0.4$，求 $D(X+Y)$ 及 $D(X-Y)$.

解：$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$ $Cov(X,Y)=12$

$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)=85$

$D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2Cov(X,Y)=37$

心得 体会 拓广 疑问

21 设随机变量 $Z\sim U[-2,2]$，随机变量

$$X=\begin{cases}-1, & Z\leqslant -1\\ 1, & Z>-1\end{cases},\quad Y=\begin{cases}-1, & Z\leqslant 1\\ 1, & Z>1\end{cases}$$

求：(1)X 和 Y 的联合分布；(2)$D(X+Y)$.

解：(1) $P(X=-1)=\frac{1}{4}$ $P(X=1)=\frac{3}{4}$

$P(Y=-1)=\frac{3}{4}$ $P(Y=1)=\frac{1}{4}$

Y \ X	-1	1	$P(Y=j)$
-1	$\frac{3}{16}$ $\frac{1}{4}$	$\frac{9}{16}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
1	$\frac{1}{16}$ 0	$\frac{3}{16}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$P(X=i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

(2) $E(X+Y)=\frac{3}{16}\times 2+\frac{3}{16}\times(-2)=0$

$E[(X+Y)^2]=\frac{3}{16}\times 4+\frac{3}{16}\times 4=\frac{3}{2}$

$D(X+Y)=\frac{3}{2}$

22 某箱装有 100 件产品，其中一、二和三等品分别为 80、10 和 10 件. 现在从中随机抽取一件，记

$$X_i=\begin{cases}1, & 抽到\ i\ 等品\\ 0, & 其他\end{cases}\quad (i=1,2,3)$$

试求：(1) 随机变量 X_1 与 X_2 的联合分布；(2) 随机变量 X_1 与 X_2 的相关系数 ρ.

解：(1) $P(X_1=1, X_2=0)=\frac{4}{5}$ $P(X_1=0, X_2=1)=\frac{1}{10}$

$P(X_1=0, X_2=0)=\frac{1}{10}$

(2) $E(X_1)=\frac{4}{5}$ $E(X_2)=\frac{1}{10}$

$E(X_1^2)=\frac{4}{5}$ $E(X_2^2)=\frac{1}{10}$ $E(X_1X_2)=0$

$D(X_1)=\frac{4}{25}$ $D(X_2)=\frac{9}{100}$

$Cov(X_1,X_2)=E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2)=-\frac{2}{25}$

$$\rho=\frac{Cov(X_1,X_2)}{\sqrt{D(X_1)}\sqrt{D(X_2)}}=-\frac{2}{3}$$

心得 体会 拓广 疑问

23 设 X,Y,Z 是三个两两不相关的随机变量，数学期望全为 0，方差都是 1，求 $X-Y$ 与 $Y-Z$ 的相关系数.

解: $E(X-Y)=0 \quad E(Y-Z)=0$

$D(X-Y)=2 \quad D(Y-Z)=2$

$\mathrm{Cov}(X-Y,Y-Z)=E[(X-Y)(Y-Z)]-E(X-Y)E(Y-Z)=-1$

$\rho=\dfrac{-1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}$

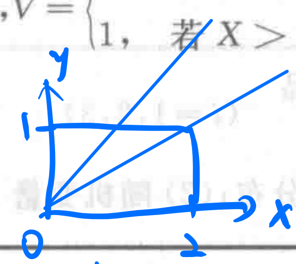
24 假设二维随机变量 (X,Y) 在矩形 $G=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上服从均匀分布，记

$$U=\begin{cases}0, & 若\ X\leqslant Y\\ 1, & 若\ X>Y\end{cases},\quad V=\begin{cases}0, & 若\ X\leqslant 2Y\\ 1, & 若\ X>2Y\end{cases}$$

求：

(1) U 和 V 的联合分布；

(2) U 和 V 的相关系数 ρ.



解:(1) $P(U=0)=\dfrac{3}{4} \quad P(U=1)=\dfrac{1}{4}$

$P(V=0)=P(V=1)=\dfrac{1}{2}$

V \ U	0	1	$P(V=j)$
0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$P(U=i)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

(2) $E(U)=\dfrac{1}{4} \quad E(V)=\dfrac{1}{2}$

$E(U^2)=\dfrac{1}{4} \quad E(V^2)=\dfrac{1}{2}$

$D(U)=\dfrac{3}{16} \quad D(V)=\dfrac{1}{4}$

$E(UV)=0$

$\mathrm{Cov}(U,V)=E(UV)-E(U)E(V)$

$=\dfrac{1}{8}$

$\rho=\dfrac{\frac{1}{8}}{\sqrt{\frac{3}{16}}\sqrt{\frac{1}{4}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

心得 体会 拓广 疑问

25 已知随机变量 X 和 Y 分别服从 $N(1,3^2)$ 和 $N(0,4^2)$，且 X 和 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$，设 $Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{3}$，求：

(1) Z 的数学期望与方差；

(2) X 与 Z 的相关系数 ρ_{XZ}.

解：(1) $E(Z)=\frac{1}{3}E(X)+\frac{1}{3}E(Y)=\frac{1}{3}$

$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{Cov(X,Y)}{12}=-\frac{1}{2}$ $\quad Cov(X,Y)=-6$

$D(Z)=D(\frac{X+Y}{3})=\frac{1}{9}D(X+Y)=\frac{1}{9}[D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)]=\frac{13}{9}$

(2) $\rho_{XZ}=\frac{Cov(X,Z)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Z)}}$ $\quad Cov(X,Z)=E(XZ)-E(X)E(Z)=1$

$\rho_{XZ}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$

26 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$，$-\infty<x<+\infty$，试证 X 与 $|X|$ 不相关，但是不独立.

证明：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}xe^{-|x|}dx=0$

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-|x|}dx=\Gamma(3)=2$

$D(X)=2$

$Cov(X,|X|)=E(X|X|)-E(X)E(|X|)=0$ 不相关

$|X|=\begin{cases}X & X\geq 0\\ -X & X<0\end{cases}$ 显然不独立

心得 体会 拓广 疑问

27 设二维随机变量(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2}[\varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y)]$$

$\varphi_1(x,y)$ 和 $\varphi_2(x,y)$ 都是二维正态密度函数，且它们对应的二维随机变量的相关系数分别为$\frac{1}{3}$ 和 $-\frac{1}{3}$，它们的边缘密度函数所对应的随机变量的数学期望都是 0，方差都是 1.

(1) 求随机变量 X 和 Y 的密度函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(y)$，及 X 和 Y 的相关系数 ρ(可以直接利用二维正态概率密度的性质)；

(2) 问 X 和 Y 是否独立？为什么？

解：(1) $f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\frac{1}{2}[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(x,y)dy+\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2(x,y)dy]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

同理 $f_2(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$

$\rho=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\,f(x,y)\,dxdy=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[\varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y)]\,dx\,dy$

$=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{3})=0$

(2) $f(x,y)=\frac{3}{8\sqrt{2}\pi}\{\exp[-\frac{9}{16}(x^2-\frac{2}{3}xy+y^2)]+\exp[-\frac{9}{16}(x^2+\frac{2}{3}xy+y^2)]\}$

$f(x)f(y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 故不独立

28 若 $D(X)=0.004$，利用切比雪夫不等式估计概率 $P(|X-E(X)|<0.2)$.

解：$P(|X-E(X)|<0.2)=1-P(|X-E(X)|\geqslant 0.2)$

$P(|X-E(X)|\geqslant 0.2)\leqslant\frac{D(X)}{0.2^2}=0.1$

$P(|X-E(X)|<0.2)\geqslant 0.9$

心得 体会 拓广 疑问

29 用切比雪夫不等式确定掷一均匀硬币时，需掷多少次，才能保证"正面"出现的频率在 0.4 ~ 0.6 之间的概率不小于 0.9.

解：设正面次数为X，掷n次

$E(X)=\frac{n}{2}$ $\quad D(X)=\frac{n}{4}$

$P(|\frac{X}{n}-0.5|\le 0.1)=1-\frac{\frac{n}{4}}{0.01}\ge 0.9$

$n\ge 250$

30 某保险公司多年的资料表明，在索赔户中，被盗索赔户占 20%，以 X 表示在随机抽查的 100 个索赔户中因被盗而向保险公司索赔的户数，试求 $P(14\leqslant X\leqslant 30)$.

解：$X\sim B(100,0.2)$ $\quad E(X)=20$ $\quad D(X)=16$

$P(14\le X\le 30)=\Phi(2.5)-\Phi(-1.5)=0.927$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

31 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立同分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\leqslant\theta\end{cases}\quad(\theta\text{ 为常数})$$

$Z=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$，求 $E(Z)$ 和 $D(Z)$.

解: $F_Z(x)=1-[1-F(x)]^n$

$F(x)=\int_\theta^x 2e^{-2(u-\theta)}du = 1-e^{-2(x-\theta)}$

$F_Z(x)=1-e^{-2n(x-\theta)}$ $\quad f_Z(x)=2ne^{-2n(x-\theta)}$

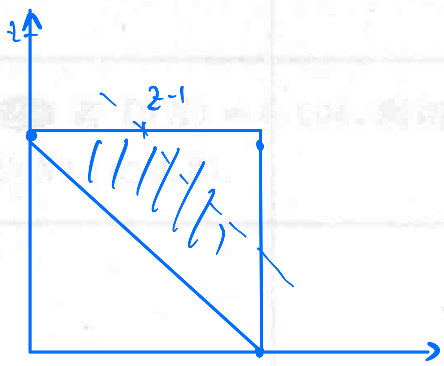
$E(Z)=\int_\theta^{+\infty} 2nxe^{-2n(x-\theta)}dx=\theta+\frac{1}{2n}$

$E(Z^2)=\int_\theta^{+\infty} 2nx^2e^{-2n(x-\theta)}dx=\theta^2+\frac{\theta}{n}+\frac{1}{2n^2}$

$D(Z)=E(Z^2)-E^2(Z)=\frac{1}{4n^2}$

32 设 (X,Y) 在以点 $(0,1),(1,0),(1,1)$ 为顶点的三角形区域上服从均匀分布，求 $Z=X+Y$ 的数学期望和方差.

解:



$E(X)=E(Y)=\frac{2}{3}$

$E(X^2)=E(Y^2)=\frac{1}{2}$

$D(X)=D(Y)=\frac{1}{18}$ $\quad Cov(X,Y)=-\frac{1}{36}$

$E(Z)=\frac{4}{3}$

$D(Z)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)=\frac{1}{18}$

心得 体会 拓广 疑问

33 设 X,Y,Z 为三个随机变量，且 $E(X)=E(Y)=1,E(Z)=-1$，$D(X)=D(Y)=D(Z)=1,\rho_{XY}=0,\rho_{XZ}=\frac{1}{2},\rho_{YZ}=-\frac{1}{2}$. 若 $W=X+Y+Z$，求 $E(W),D(W)$.

解：$E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)=1$

$D(X+Y+Z)=D(X)+D(Y)+D(Z)+Cov(X,Y)+Cov(X,Z)+Cov(Y,Z)$

$=D(X)+D(Y)+D(Z)+\rho_{XZ}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Z)}+\rho_{YZ}\sqrt{D(Y)}\sqrt{D(Z)}$

$=3$

34 设随机变量 Y 服从参数为 $\lambda=1$ 的指数分布，随机变量

$$X_k=\begin{cases}0, & Y\leqslant k\\ 1, & Y>k\end{cases}\quad(k=1,2)$$

求：(1) X_1 和 X_2 的联合概率分布；(2) $E(X_1+X_2)$.

解：(1) $f_Y(y)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda y} & y\geq 0\\ 0 & y<0\end{cases}$

$P(X_k=0)=\int_0^k \lambda e^{-\lambda y}dy=1-e^{-k}$

$X_1 \backslash X_2$	0	1	$P(X_1=j)$
0	$(1-\frac{1}{e})(1-\frac{1}{e^2})$	$(1-\frac{1}{e})\frac{1}{e^2}$	$1-\frac{1}{e}$
1	$\frac{1}{e}(1-\frac{1}{e^2})$	$\frac{1}{e^3}$	$\frac{1}{e}$
$P(X_2=i)$	$1-\frac{1}{e^2}$	$\frac{1}{e^2}$	1

(2) $E(X_1+X_2)$

$=0\times(1-\frac{1}{e})(1-\frac{1}{e^2})+1\times[(1-\frac{1}{e})\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e}(1-\frac{1}{e^2})]$

$+2\times\frac{1}{e^3}=\frac{e+1}{e^2}$

心得 体会 拓广 疑问

35 设随机变量 X 和 Y 在圆域 $x^2+y^2\leqslant r^2$ 上服从二维均匀分布.
(1) 求 X 与 Y 的相关系数 ρ;
(2) 问 X 与 Y 是否独立？为什么？

解: (1) $f(x,y)=\frac{1}{\pi r^2}$

$f_X(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-x^2} & |x|\le r\\ 0 & x>r\end{cases}$ $\quad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-y^2} & |y|\le r\\ 0 & |y|>r\end{cases}$

$E(X)=\int_{-r}^{r}\frac{2x}{\pi r^2}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=0=E(Y)$

$Cov(X,Y)=0 \quad \rho=0$

(2) $f_X(x)\cdot f_Y(y)\neq f(x,y)$ 不独立

36 $X\sim N(0,1)$, $Y=X^2$, 讨论 X 与 Y 的不相关性与独立性.

解: $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

$f_Y(y)=\frac{1}{2\pi}e^{-y^2}$

显然 X 与 Y 不独立.

$E(X)=0 \quad E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y}{2\pi}e^{-y^2}dy=0$

$E(XY)=0$ 故 X 与 Y 不相关

心得 体会 拓广 疑问

37 给定 $P(|X-E(X)|<\varepsilon)\geqslant 0.9, D(X)=0.009$，利用切比雪夫不等式估计 ε.

解: $P(|X-E(X)|\geqslant\varepsilon)<0.1=\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$

$\varepsilon=0.3$

38 $X\sim N(2,9), Y\sim E(\frac{1}{2}), \rho=\frac{1}{2}$，利用切比雪夫不等式估计 $P(|X-Y|\geqslant 4)$.

解: $E(X)=2$ $D(X)=9$ $E(Y)=2$ $D(Y)=4$ $E(X-Y)=0$

$D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2Cov(X,Y)=\cancel{11}\ 7$

$P(|X-Y|\geqslant 4)=P(|(X-Y)-E(X-Y)|\geqslant 4)$

$\leqslant\frac{D(X-Y)}{4^2}=\frac{11}{16}$ $\frac{7}{16}$

心得 体会 拓广 疑问

39 设有 30 个电子器件 $D_1, D_2, \cdots, D_{30}$，它们的使用情况如下：D_1 损坏，D_2 立即使用；D_2 损坏，D_3 立即使用等. 设器件 D_i 的寿命(单位：h) 是服从参数为 $\lambda=0.1$ h 的指数分布的随机变量，令 T 为 30 个器件使用的总时间，问 T 超过 350 h 的概率是多少？

解：$T=\sum_{i=1}^{30} D_i$ $E(T)=30\times\frac{1}{0.1}=300$ $D(T)=30\times\frac{1}{0.1^2}=3000$

$$P(T\geqslant 350)=P\left(\frac{T-E(T)}{\sqrt{D(T)}}\geqslant\frac{350-300}{\sqrt{3000}}\right)$$

$$=1-\Phi\left(\frac{50}{\sqrt{3000}}\right)=0.1814$$

年 月 日

概率论与数理统计同步训练

第 六 章

班级：

学号：

姓名：

心得 体会 拓广 疑问

❶ 某厂生产玻璃板，以每块玻璃上的泡疵点个数为数量指标，已知它服从均值为λ的泊松分布. 从产品中抽一个容量为n的样本X_1，X_2，…，X_m，求样本的分布.

解：$P(X_1=a_1, X_2=a_2, \cdots X_m=a_m)$

$$=\frac{\lambda^{a_1}e^{-\lambda}}{a_1!}\cdot\frac{\lambda^{a_2}e^{-\lambda}}{a_2!}\cdots\cdots\frac{\lambda^{a_m}e^{-\lambda}}{a_m!}$$

$$=\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{m}a_i}e^{-m\lambda}}{\prod_{i=1}^{m}a_i!}$$

❷ 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的简单随机样本，已知$E(X^k)=\alpha_k(k=1,2,3,4)$，证明：当$n$充分大时$Z_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$近似服从正态分布，并指出其分布参数.

证明 $E(X^2)=a_2$

$D(X^2)=E(X^4)-E^2(X^2)=a_4-a_2^2$

$Z_n \sim N\left(a_2, \frac{a_4-a_2^2}{n}\right)$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

❸ 已知 $X \sim t(n)$，求证 $X^2 \sim F(1,n)$.

证明: $X = \dfrac{P}{\sqrt{Q/n}}$ $P \sim N(0,1)$ $Q \sim \chi^2(n)$

$X^2 = \dfrac{P^2}{Q/n}$ $P^2 \sim \chi^2(1)$ $Q \sim \chi^2(n)$

$\therefore X^2 \sim F(1,n)$

❹ 设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自正态总体 $N(0,2^2)$ 的简单随机样本，$X=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2$，求常数 a,b，使得 $X \sim \chi^2(2)$.

解: $Y_1 = X_1 - 2X_2 \sim N(0,20)$

$Y_2 = 3X_3 - 4X_4 \sim N(0,100)$

$aY_1^2 \sim N(0,1)$ $a = \frac{1}{20}$ $D(aY_1^2) = 1$

$bY_2^2 \sim N(0,1)$ $b = \frac{1}{100}$

心得 体会 拓广 疑问

❺ 设 $X_1,\cdots,X_n,X_{n+1},\cdots,X_{n+m}$ 是分布 $N(0,\sigma^2)$ 的容量为 $n+m$ 的样本，试求下列统计量的概率分布：

(1) $Y_1=\dfrac{\sqrt{m}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}{\sqrt{n}\sqrt{\sum\limits_{i=n+1}^{n+m}X_i^2}}$；

(2) $Y_2=\dfrac{m\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2}{n\sum\limits_{i=n+1}^{n+m}X_i^2}$.

解：(1) $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i \sim N(0,n\sigma^2)$

心得 体会 拓广 疑问

❻ 设 $X_1,\cdots,X_n,X_{n+1}$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$；$S^{*2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，试求统计量 $T=\frac{X_{n+1}-\overline{X}}{S^*}\cdot\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$ 的分布.

❼ 从正态总体 $N(3.4,\sigma^2)$ 中抽取容量为 n 的样本，如果需求样本均值位于区间(1.4,5.4)内的概率不小于 0.95，问样本容量 n 至少应多大?

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

8 求总体 $N(20,3)$ 的容量分别为10,15的两独立样本均值差的绝对值大于0.3的概率.

9 设在总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 中抽取一容量为16的样本,这里 μ,σ^2 均为未知,求(1) $P(S^2/\sigma^2\leqslant 2.038\,5)$;(2) $D(S^2)$.

概率论与数理统计同步训练

第 七 章

班级：______________________

学号：______________________

姓名：______________________

心得 体会 拓广 疑问

❶ 设总体 X 服从参数为 N 和 p 的二项分布，$x_1,\cdots,x_n$ 为取自 X 的样本，试求参数 N 和 p 的矩估计.

解: $X \sim B(N,p)$

$Np=\mu_1$

$\frac{\mu_1^2+\mu_1-\mu_2}{\mu_1}$

$\mu_1^2-\mu_1 p+\mu_1=\mu_2$

$\mu_1 = EX_i = \frac{\Sigma X_i}{n} = Np$

$\mu_2 = EX_i^2 = (EX_i)^2 + DX = (Np)^2 + Np(1-p) = N^2p^2 - Np^2 + Np$

$N = \frac{\mu_1^2}{\mu_1^2+\mu_1-\mu_2} = \frac{E^2(x)}{E^2(x)+E(x)-E(x^2)}$

$p = \mu_1 - \frac{\mu_2}{\mu_1} + 1 = E(x) - \frac{E(x^2)}{E(x)} + 1$

$\frac{\mu_1^2}{\mu_1^2+\mu_1-\mu_2}$

❷ 设总体密度为

$$f(x;a)=\begin{cases}(a+1)x^a, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\quad (a>-1)$$

试用样本 $x_1,\cdots,x_n$ 求参数 a 的矩估计和极大似然估计.

解: $\mu_1 = \int_0^1 x(a+1)x^a\,dx = \frac{a+1}{a+2}$ $\quad a = \frac{2\mu_1-1}{1-\mu_1} = \frac{2E(x)-1}{1-E(x)}$ $\quad E(x) = \frac{\Sigma x_i}{n}$

$L(a) = \prod_{i=1}^n (a+1)x_i^a = (a+1)^n \prod_{i=1}^n x_i^a$

$\ln L(a) = n\ln(a+1) + a\sum_{i=1}^n \ln x_i$

$\frac{d\ln L(a)}{da} = \frac{n}{a+1} + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0$

$\hat{a} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i} - 1$

班级：

学号：

姓名：

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

3 已知总体 X 在 $[\theta_1,\theta_2]$ 上服从均匀分布，$x_1,\cdots,x_n$ 是取自 X 的一个样本，求 θ_1,θ_2 的矩估计和极大似然估计.

4 设总体的密度函数如下，试用样本 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 求参数 θ 的极大似然估计

$$f(x;\theta)=\begin{cases}(\theta\alpha)x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\theta x^{\alpha}}, & x>0,\alpha \text{ 已知}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

5 设总体 X 服从指数分布

$$f(x;\theta)=\begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x\geqslant\theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

试利用样本 $x_1,\cdots,x_n$，求参数 θ 的极大似然估计.

$e^{-\Sigma x_i+n\theta}$

t_1 t_2

$\ln L=-\Sigma x_i+n\theta$

6 设总体 X 服从几何分布

$$P(X=k)=p(1-p)^{k-1},k=1,2,\cdots;0<p<1$$

试利用样本 $x_1,\cdots,x_n$ 求未知参数 p 的极大似然估计.

心得 体会 拓广 疑问

7 设总体的分布列为截尾几何分布

$$P(X=k)=\theta^{k-1}(1-\theta),k=1,2,\cdots,r$$

$$P(X=r+1)=\theta^{r}$$

从中抽得样本 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，其中有 M 个取值为 $r+1$，求 θ 的极大似然估计.

$1-\theta$

$\theta(1-\theta)$

$\theta^2(1-\theta)$

$\vdots$

θ^r

$n \quad M \quad n-M$

$$L=\theta^{Mr}\cdot\theta^{\sum_{n-M}^{M} x_i-(n-M)}(1-\theta)^{(n-M)}$$

8 设 $x_1,\cdots,x_n$ 是总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，(1) 试适当选择常数 c，使 $c\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)^2$ 是 σ^2 的无偏估计；(2) 求 k 使得 $\hat{\sigma}=k\sum_{i=1}^{n}|X_i-\overline{X}|$ 为 σ 的无偏估计量.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

9 设$\hat{\theta}$是参数θ的无偏估计,且有$D(\hat{\theta})>0$,试证$\hat{\theta}^2=(\hat{\theta})^2$不是$\theta^2$的无偏估计.

10 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,x_1,x_2,x_3是来自X的样本,试证下列估计量

$$\hat{\mu}_1=\frac{1}{5}x_1+\frac{3}{10}x_3+\frac{1}{2}x_2$$
$$\hat{\mu}_2=\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{4}x_2+\frac{5}{12}x_3$$
$$\hat{\mu}_3=\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{6}x_2+\frac{1}{2}x_3$$

都是μ的无偏估计,并指出它们中哪个最有效.

心得 体会 拓广 疑问

11 设总体 X 的数学期望 $\mu=E(X)$ 已知，试证统计量 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 是总体方差 $\sigma^2=D(X)$ 的无偏估计.

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)$

$=E((X-E(X))^2)$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

12 生产一个零件所需时间 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，观察 25 个零件的生产时间得 $\bar{x}=5.5$ s，$s=1.73$ s. 试以 0.95 的可靠性求 μ 和 σ^2 的置信区间.

年 月 日

概率论与数理统计同步训练

第 八 章

班级：

学号：

姓名：

心得 体会 拓广 疑问

❶ 一种元件,要求其使用寿命不得低于 1 000 h. 现在从一批这种元件中任取 25 件,测得其寿命平均值为 950 h. 已知该种元件寿命服从标准差 $\sigma=100$ h 的正态分布,问这批元件是否合格($\alpha=0.05$)?

❷ 糖厂用自动打包机打包. 每包标准质量为 100 kg. 每天开工后需要检验一次打包机工作是否正常. 某日开工后测得 9 包质量(单位:kg) 如下:

99.3　98.7　100.5　101.2　98.3　99.7　99.5　102.1　100.5

问该日打包机工作是否正常($\alpha=0.05$,已知包重服从正态分布)?

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

3 按照规定，每 100 g 的罐头番茄汁，维生素 C 的含量不得少于 21 mg，现从某厂生产的一批罐头中抽取 17 个，测得维生素 C 的含量(单位：mg) 如下：

16　22　21　20　23　21　19　15　13

23　17　20　29　18　22　16　25

已知维生素 C 的含量服从正态分布，试检验这种罐头的维生素含量是否合格($\alpha=0.025$).

4 从一批轴料中取 15 件测量其椭圆度，计算得 $s=0.025$，问该批轴料椭圆度的总体方差与规定的 $\sigma^2=0.000\ 4$ 有无显著差别($\alpha=0.05$，椭圆度服从正态分布)？

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

5 从一批保险丝中抽取 10 根试验其熔化时间，结果为

42 65 75 78 71 59 57 68 54 55

问是否可认为这批保险丝的熔化时间的方差小于或等于 80($a=0.05$，熔化时间服从正态分布)？

6 两台机床加工同一种零件，分别取 6 个和 9 个零件，量其长度是 $s_1^2=0.345$，$s_2^2=0.357$，假定零件长度服从正态分布，问是否可认为两台机床加工的零件长度的方差无显著性差异($a=0.05$)？

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

[Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ]
书名=１４５３６２４４
ＳＳ号=１４５３６２４４