概率论与数理统计综合训练

（第3版）

方　茹　李朝艳　文海玉　刘　伟　陈佳奇　主编

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

概率论与数理统计

综合训练试题（一）

班级：______________________

学号：______________________

姓名：______________________

紫丁香影院

QQ 1689929593

心得 体会 拓广 疑问

一、填空题(每小题 3 分,共 5 小题,满分 15 分)

1. 设事件 A,B,C 两两独立,且 $ABC=\varnothing$,$P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$,$P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$,则 $P(A)=$________.

2. 设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$,A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等,则 $P(A)=$________.

3. 设随机变量 $X\sim U(-1,1)$,则 $Y=e^X$ 的概率密度为 $f_Y(y)=$________.

4. 设随机变量 $X\sim U[0,6]$,$Y\sim B\left(12,\frac{1}{4}\right)$,且 X 与 Y 相互独立,则根据切比雪夫不等式有:$P(X-3<Y<X+3)\geqslant$________.

5. 总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,$\sigma^2=0.04$,抽取容量为16的样本,测得样本均值为1.416,若 μ 的置信区间是 $(1.416-0.098,1.416+0.098)$,则置信度为________.

二、选择题(每小题 3 分,共 5 小题,满分 15 分)

(每小题给出的四个选项中,只有一个是符合题目要求的,把所选项的字母填在题后的括号内)

1. 设 A,B,C 是三个独立的随机事件,且 $0<P(C)<1$,则在下列给定的四对事件中不相互独立的是(　　).

A. $\overline{A\cup B}$ 与 C　　B. $\overline{BC}$ 与 $\overline{C}$　　C. $\overline{A-B}$ 与 $\overline{C}$　　D. $\overline{AB}$ 与 $\overline{C}$

2. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$,则 $Y=2X$ 的概率密度为(　　).

A. $\frac{1}{\pi(1+4y^2)}$　　B. $\frac{1}{\pi(4+y^2)}$　　C. $\frac{2}{\pi(4+y^2)}$　　D. $\frac{2}{\pi(1+y^2)}$

3. 如下四个函数中不是随机变量分布函数的是(　　).

A. $F(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0\\ \frac{1}{2+x^2}, & x<0\end{cases}$

B. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & 0\leqslant x<1\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

C. $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$,其中$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t=1$

D. $F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ 1-\mathrm{e}^{-x}, & x>0\end{cases}$

4. 随机变量 $X\sim U(-1,1)$,$Y=X^7$,则(　　).

A. X 与 Y 不相关,不独立　　B. X 与 Y 相关,不独立

C. X 与 Y 不相关,独立　　D. X 与 Y 相关,独立

5. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是总体 X 的样本,$E(X)=\mu$,$D(X)=\sigma^2$,$\overline{X}$ 是样本均值,S^2 是样本方差,则(　　).

A. $\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{1}{n}\sigma^2\right)$　　B. S^2 与 $\overline{X}$ 独立

C. S^2 是 σ^2 的无偏估计　　D. $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

三、(10 分) 某炮台上有三门炮,假定第一门炮的命中率为 0.4,第二门炮的命中率为 0.3,第三门炮的命中率为 0.5,今三门炮向同一目标各射一发炮弹,结果有两弹中靶,求第一门炮中靶的概率.

年　月　日

四、(10 分) 某种商品一周的需求量是一个随机变量,其概率密度为

$$f(t)=\begin{cases}te^{-t}, & t>0\\ 0, & t\leqslant 0\end{cases}$$

设各周的需求量是相互独立的,试求两周需求量的概率密度.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

五、(10分) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -2<x<0\\ A, & 1<x<B\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，分布函数 $F(x)$ 在 $x=2$ 处的值 $F(2)=\frac{5}{6}$,求：

(1) A,B;

(2) 若 $Y=|X|$,求 X,Y 联合分布函数 $F(x,y)$ 在(2,3)处的值.

年 月 日

六、(14分) 总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\theta^2}{(\theta^2-1)x^3}, & x\in(1,\theta)\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，抽取简单随机样本 $X_1,\cdots,X_n$，求 θ 的矩估计和最大似然估计.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

七、(6 分) 证明:若 $X \sim \chi^2(n)$,则 $E(X)=n, D(X)=2n$.

心得 体会 拓广 疑问

年　月　日

概率论与数理统计
综合训练试题(二)

班级：______________________

学号：______________________

姓名：______________________

心得 体会 拓广 疑问

一、填空题(每小题 3 分,共 5 小题,满分 15 分)

1. 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$,$P(AB)=0$,$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16}$,则 A,B,C 都不发生的概率为________.

2. 随机变量 $X\sim P(\lambda)$,$E(X^2)=12$,则 $P(X\geqslant 1)=$________.

3. 随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<1\\ \frac{1}{4}, & 1<x<3\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$,则 $Y=1-2X$ 的概率密度为 $f_Y(y)=$________.

4. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\leqslant x<0\\ 1-x, & 0<x\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

则方差 $D(X)=$________.

5. 已知一批零件的长度 $X\sim N(\mu,1)$,从中随机地抽取 16 个零件,得样本均值 $\bar{x}=40$,则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是________.

二、选择题(每小题 3 分,共 5 小题,满分 15 分)

(每小题给出的四个选项中,只有一个是符合题目要求的,把所选项的字母填在题后的括号内)

1. 设 A,B,C 三个事件两两独立,则 A,B,C 相互独立的充分必要条件是(　　).

A. A 与 BC 独立　　B. AB 与 $A\cup C$ 独立

C. AB 与 AC 独立　　D. $A\cup B$ 与 $A\cup C$ 独立

2. 下列四个函数中,能成为随机变量概率密度的是(　　).

A. $f(x)=e^{-|x|}$　　B. $f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$

C. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$　　D. $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

3. 随机变量 X,Y 独立同分布，$X\sim N\left(\mu,\frac{1}{2}\right)$，$P(X+Y\leqslant 1)=\frac{1}{2}$，则 $\mu=($　　$)$.

A. -1　　B. 0　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

4. 将一枚硬币重复掷 n 次，以 X 和 Y 分别表示正、反面向上的次数，则 X 和 Y 的相关系数等于(　　).

A. 1　　B. -1　　C. 0　　D. $\frac{1}{2}$

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自具有 $\chi^2(n)$ 分布的总体的样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则 $E(\overline{X})$ 和 $D(\overline{X})$ 的值为(　　).

A. $E(\overline{X})=n, D(\overline{X})=2$　　B. $E(\overline{X})=n, D(\overline{X})=2n$

C. $E(\overline{X})=1, D(\overline{X})=2$　　D. $E(\overline{X})=\frac{1}{n}, D(\overline{X})=n$

三、**(10 分)** 设一批晶体管的次品率为 0.01，今从这批晶体管中抽取 4 个，求其中恰有 1 个次品和恰有 2 个次品的概率.

校学生会
QQ 3348756836

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

四、**(10 分)** (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\lambda^2 e^{-\lambda x}, & 0<y<x \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，$\lambda>0$，求 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

五、(10分) 随机变量 $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$，$Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$，$E(XY)=\frac{5}{8}$，求：

(1)$P(X+Y\leqslant 1)$；

(2)$E(\max(X,Y))$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

六、(6 分) 在射击比赛中，每人射击三次(每次一发)，约定全部不中得 0 分，只中一弹得 5 分，中两弹得 10 分，中三弹得 20 分. 某人每次射击的命中率均为 0.4，求他的得分值 X 的数学期望.

年　月　日

七、(14 分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\lambda)=\begin{cases}\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases},\lambda>0$$

而 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本. 求:

(1) 未知参数 λ 的矩估计和最大似然估计;

(2) 讨论上述估计的无偏性.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

概率论与数理统计
综合训练试题(三)

班级:________________________

学号:________________________

姓名:________________________

心得 体会 拓广 疑问

一区二年支 葛君泽
731429909

一、填空题(每小题 3 分,共 5 小题,满分 15 分)

1. 设事件 A,B 满足 $P(A)=0.5,P(B)=0.6,P(B\mid\overline{A})=0.6$,则 $P(A\cup B)=$________.

2. 设 X 服从泊松分布,若 $E(X^2)=6$,则 $P(X\geqslant 1)=$________.

3. 设随机变量 X,Y 相互独立,且均服从 $N\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 分布,则 $Z=X+Y$ 的概率密度为 $f_Z(z)=$________.

4. 随机变量 $X\sim U(-\sqrt{3},\sqrt{3})$,则 $E((X-1)(X+2))=$________.

5. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,X 的方差为 1,根据来自 X 的容量为 100 的样本,测得样本均值为 5,则 X 的数学期望的置信度为 0.95 的置信区间是________.

二、选择题(每小题 3 分,共 5 小题,满分 15 分)

(每小题给出的四个选项中,只有一个是符合题目要求的,把所选项的字母填在题后的括号内)

1. 事件 A,B 满足 $P(A)=P(B)=\frac{1}{2},P(A\mid\overline{B})=P(B)$,下列正确的是(　　).

A. $P(AB)=\frac{1}{4}$　　B. $P(A-B)=\frac{3}{4}$

C. $P(\overline{B-A})=\frac{1}{2}$　　D. $P(A\cup B)=1$

2. 随机事件 $A\supset B,0<P(A)<1$,则(　　).

A. $P(A\cup B)=P(A)$　　B. $P(AB)=P(A)$

C. $P(B-A)=P(B)-P(A)$　　D. $P(B\mid A)=P(B)$

3. 如下四个函数,能作为随机变量的分布函数的是(　　).

A. $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x^2}, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}$　　B. $F(x)=\begin{cases}3-e^{-3x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$

C. $F(x)=2F_1(x)-3F_2(x)$,其中 $F_1(x),F_2(x)$ 分别是随机变量 X_1,X_2 的分布函数

D. $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$,其中$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=1$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

4. 设 X 为连续型随机变量，且方差存在，则对任意常数 C 和 $\varepsilon>0$，必有(　　).

A. $P(|X-C|\geqslant\varepsilon)=\dfrac{E|X-C|}{\varepsilon}$

B. $P(|X-C|\geqslant\varepsilon)\geqslant\dfrac{E|X-C|}{\varepsilon}$

C. $P(|X-C|\geqslant\varepsilon)\leqslant\dfrac{E|X-C|}{\varepsilon}$

D. $P(|X-C|\geqslant\varepsilon)\leqslant\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_6$ 是来自 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$S^2=\dfrac{1}{5}\sum\limits_{i=1}^{6}(X_i-\overline{X})^2$，则 $D(S^2)$ 的值为(　　).

A. $\dfrac{1}{3}\sigma^4$　　B. $\dfrac{1}{5}\sigma^4$　　C. $\dfrac{2}{5}\sigma^4$　　D. $\dfrac{2}{5}\sigma^2$

三、(10 分) 甲袋中有 2 个白球，3 个黑球；乙袋中有 3 个白球，2 个黑球，从甲袋中取出一个放入乙袋，再从乙袋中任取一个，若放入乙袋的球和从乙袋中取出的球是同色的，求放入乙袋的是黑球的概率.

年　月　日

四、(10 分) (X,Y) 的概率密度 $f(x,y)=\begin{cases} k\cdot e^{-2x-3y}, & x>0,y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，

求：

(1) k；

(2) $P(X+2Y\leqslant 1)$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

五、(10 分) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$，求随机变量 $Y=|X|$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

六、(14 分) 设总体概率密度为

$$f(x;\alpha)=\begin{cases}(\alpha+1)x^{\alpha}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases},\alpha>-1$$

试用样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$,求参数 α 的矩估计和最大似然估计.

年　月　日

七、(6 分) 已知 $X \sim t(n)$，求证 $X^2 \sim F(1,n)$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

概率论与数理统计
综合训练试题（四）

班级：________________

学号：________________

姓名：________________

心得 体会 拓广 疑问

一、填空题(每小题 3 分,共 5 小题,满分 15 分)

1. 若事件 A,B 满足 $P(B \mid A)=P(\bar{B} \mid A)$,则 $P(B \mid A)=$________.

2. 在区间(0,1)中随机地取两个数,则"两数之和小于 $\frac{6}{5}$"的概率为________.

3. 设随机变量 X,Y 相互独立,且都服从区间[0,1]的均匀分布,则 $P\left(X+Y \leqslant \frac{1}{2}\right)=$________.

4. 随机变量 X,Y 独立同分布,$E(X)=2, P(XY<5)=0.7$, $P(XY \leqslant 3)=0.3$,用切比雪夫不等式估计 $D(XY)=$________.

5. 设由来自总体 $X \sim N(\mu, 0.9^2)$ 容量为9的样本的样本均值 $\bar{x}=5$,则未知参数 μ 的置信度为0.95的置信区间是________.

二、选择题(每小题 3 分,共 5 小题,满分 15 分)

(每小题给出的四个选项中,只有一个是符合题目要求的,把所选项的字母填在题后的括号内)

1. 随机事件 A,C 满足 $P(A \mid A \cup C)+P(C \mid A \cup C)=1$,则下列正确的是( ).

A. A,C 不相容 B. A,C 独立

C. $AC, A \cup C$ 独立 D. $P(A \mid C)+P(C \mid A)=1$

2. 设随机变量 X 服从指数分布,则随机变量 $Y=\min(X,2)$ 的分布函数( ).

A. 是连续函数 B. 至少有两个间断点

C. 是阶梯函数 D. 恰好有一个间断点

3. 对于任意两个随机变量 X 和 Y,若其方差存在,则与 X 和 Y 不相关(即 $\rho_{XY}=0$)等价的是( ).

A. X 与 Y 独立 B. $E(XY)=E(X)E(Y)$

C. X 与 Y 不独立 D. $D(XY)=D(X)D(Y)$

4. 设随机变量 X 的方差为 25,则根据切比雪夫不等式,有 $P(\mid X-E(X)\mid<10)$( ).

A. $\leqslant 0.25$ B. $\leqslant 0.75$ C. $\geqslant 0.75$ D. $\geqslant 0.25$

5. 总体 $X \sim P(\lambda)$,抽取简单随机样本 $X_1, \cdots, X_n$. 设 $\bar{X}, S^2$ 分别为样

年 月 日

本均值、样本方差. 若 $a\overline{X}+(3-2a)S^2$ 为 λ 的无偏估计,则 $a=($　　$)$.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

三、(10分) 袋中有 8 个正品,2 个次品,任取 3 个,取后不放回,若第 3 次取到的是次品,求前 2 次取到的是正品的概率.

心得 体会 拓广 疑问

年　月　日

四、(10 分) 设随机变量 X 与 Y 独立，$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，Y 服从 $[-\pi, \pi]$ 的均匀分布，试求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

心得 体会 拓广 疑问

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

五、(10 分) 设随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(x+y), & 0\leqslant x,y\leqslant 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求 $E(X)$, $E(Y)$, $\mathrm{Cov}(X,Y)$, ρ_{XY}, $D(X+Y)$.

年 月 日

六、(14分) 已知总体 X 在区间$[\theta_1,\theta_2]$服从均匀分布，$X_1,\cdots,X_n$ 是取自 X 的一个样本，求 θ_1,θ_2 的矩估计和最大似然估计.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

七、**(6 分)** 产品的次品率为 0.1. 每天抽查 4 次，每次随机取 3 只，若发现 3 只中次品数多于 1 个，则要进行调整，记 X 为每天调整次数，求 $E(X)$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

概率论与数理统计
综合训练试题（五）

班级：________________________

学号：________________________

姓名：________________________

心得 体会 拓广 疑问

数值分析Q群
926420643

一、填空题(每小题 3 分,共 5 小题,满分 15 分)

1. 设事件 A,B 仅发生一个的概率为 0.3,且 $P(A)+P(B)=0.5$,则 A,B 至少有一个不发生的概率为________.

2. 设在每次试验中,事件 A 出现的概率均为 p,若已知在三次独立试验中 A 至少出现一次的概率等于$\dfrac{19}{27}$,则 $p=$________.

3. 已知随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则 $E(XY)=$________.

4. 总体 $X\sim E(\lambda)$,$X_1,\cdots,X_n$ 为简单随机样本,其样本均值为 $\overline{X}$,样本方差为 S^2. 若 $\overline{X}+(3-2a)\lambda S^2$ 是$\dfrac{1}{\lambda}$ 的无偏估计,则 $a=$________.

5. 总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,$\sigma^2=9$,抽取简单随机样本 $X_1,\cdots,X_n$,若 $(\overline{X}-0.98,\overline{X}+0.98)$ 为 μ 的置信度为 0.95 的置信区间,则 $n=$________.

二、选择题(每小题 3 分,共 5 小题,满分 15 分)

(每小题给出的四个选项中,只有一个是符合题目要求的,把所选项的字母填在题后的括号内)

1. 对任意的两个事件 A 和 B,与 $A\cup B=B$ 不等价的是(　　).

A. $A\subset B$　　B. $\overline{B}\subset\overline{A}$　　C. $A\overline{B}=\varnothing$　　D. $\overline{A}B=\varnothing$

2. 设随机变量 X,Y 相互独立,方差存在,以下结论正确的是(　　).

A. $D(XY)=D(X)D(Y)$　　B. $D(XY)\leqslant D(X)D(Y)$

C. $D(XY)\geqslant D(X)D(Y)$　　D. 前三者都不一定成立

3. 设 $X\sim N(2,4)$,$Y\sim N(2,5)$,$E(XY)=6$,则(　　).

A. X,Y 不相关　　B. X,Y 相互独立

C. $D(X-Y)=5$　　D. $D(X-Y)=13$

4. 随机变量 X,Y 不相关,$D(X)=D(Y)$,则 X 与 $X+Y$ 的相关系数为(　　).

A. -1　　B. 0　　C. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　D. 1

年　月　日

5. 总体 $X \sim N(\mu,4)$，抽取简单随机样本 $X_1,\cdots,X_{17}$，其样本均值为 $\overline{X}$，样本方差为 S^2，若 $P(S^2>a)=0.01$，则 $E(S^2-a)+D(S^2-a)=$（　　）.

A. 2　　　B. 4　　　C. -2　　　D. -4

（注：$P(\chi^2(16)\geqslant 32)=0.01$，$P(\chi^2(15)\geqslant 30.58)=0.01$）

心得 体会 拓广 疑问

三、(10 分) 三个箱子，第一个箱子中有 4 个黑球，1 个白球；第二个箱子中有 3 个黑球，3 个白球；第三个箱子中有 3 个黑球，5 个白球. 现随机地取一个箱子，再从这个箱子中取出一个球，求该球是白球的概率.

年　月　日

四、(10 分) 一台电子仪器由两个部件组成，以 X 和 Y 分别表示两个部件的寿命(单位：千小时)，已知 X 与 Y 的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases} c-e^{-0.5x}-e^{-0.5y}+e^{-0.5(x+y)}, & x\geqslant 0, y\geqslant 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求常数 c；

(2) 随机变量 X 与 Y 是否独立？为什么？

(3) 求两个部件的寿命都超过 1 000 小时的概率.

心得 体会 拓广 疑问

年　月　日

五、(10分) 已知随机变量 X 和 Y 分别服从 $N(1,3^2)$ 和 $N(0,4^2)$，且 X 和 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$，设 $Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$，求：

(1) $E(Z)$ 和 $D(Z)$；

(2) ρ_{XZ}.

心得 体会 拓广 疑问

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

六、(14分) 总体 X 分布列为 $\begin{array}{c|ccc} X & 0 & 1 & 2 \\ \hline P & \theta & 1-2\theta & \theta \end{array}$，抽取简单随机样本中有 2 个 0,4 个 1,4 个 2. 求 θ 的矩估计与最大似然估计.

年　月　日

七、(6 分) 某人有一串钥匙共 n 把，其中只有一把能打开家门，他任意取一把去开门，直至门开为止. 若他把每次用过的钥匙分开，求所需开门次数的数学期望.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

概率论与数理统计
综合训练试题(六)

班级：________________________

学号：________________________

姓名：________________________

心得 体会 拓广 疑问

一、填空题(每小题 3 分,共 5 小题,满分 15 分)

1. 设事件 A,B 相互独立,事件 B,C 互不相容,事件 A 与 C 不能同时发生,且 $P(A)=P(B)=0.5$,$P(C)=0.2$,则事件 A,B 和 C 中仅 C 发生或仅 C 不发生的概率为________.

2. 若随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}4x^2\mathrm{e}^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$,则 X 的分布函数 $F(x)=$________.

3. 设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立,且 X_1 服从区间 $(0,6)$ 上的均匀分布,X_2 服从正态分布 $N(0,4)$,X_3 服从参数为 3 的泊松分布,则 $Y=X_1-2X_2+3X_3$ 的方差是________.

4. 设 X,Y 为两个随机变量,$D(X)=1$,$D(Y)=4$,$\mathrm{Cov}(X,Y)=1$,记 $X_1=X-2Y$,$X_2=2X-Y$,则 X_1,X_2 的相关系数是________.

5. 随机地取某种炮弹 9 发做试验,测得炮口速度的样本标准差 $S=11\ \mathrm{m/s}$. 设炮口速度 X 服从 $N(\mu,\sigma^2)$,则这种炮弹的炮口速度的标准差 σ 的 95% 的置信区间为________.

二、选择题(每小题 3 分,共 5 小题,满分 15 分)

(每小题给出的四个选项中,只有一个是符合题目要求的,把所选项的字母填在题后的括号内)

1. 设 A,B,C 为三个事件且 A,B 相互独立,则以下结论中不正确的是(　　).

A. 若 $P(C)=1$,则 AC 与 BC 也独立

B. 若 $P(C)=1$,则 $A\cup C$ 与 B 也独立

C. 若 $P(C)=1$,则 $A-C$ 与 A 也独立

D. 若 $C\subset B$,则 A 与 C 也独立

2. 设随机变量 X,Y 独立同分布,$X\sim U[0,1]$,则下列随机变量中服从均匀分布的是(　　).

A. (X,Y)　　B. $X+Y$　　C. X^2　　D. $X-Y$

3. 设 X 为一随机变量,$E(X)=\mu$,$D(X)=\sigma^2$($\mu,\sigma>0$,常数),则对任意常数 C,必有(　　).

A. $E(X-C)^2=E(X^2)-C^2$　　B. $E(X-C)^2=E(X-\mu)^2$

C. $E(X-C)^2<E(X-\mu)^2$　　D. $E(X-C)^2\geqslant E(X-\mu)^2$

年　月　日

4. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$，则对随机变量 $|X|$ 与 X，下列结论成立的是(　　).

A. 相互独立　　B. 分布相同　　C. 互不相关　　D. 相关

5. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，统计量 $Y=n\left(\frac{\overline{X}-\mu}{S}\right)^2$，其中 $\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则(　　).

A. $Y \sim \chi^2(n-1)$　　B. $Y \sim t(n-1)$

C. $Y \sim F(n-1,1)$　　D. $Y \sim F(1,n-1)$

三、(10 分) 两台机床加工同样的零件，它们出现废品的概率分别为 0.03 和 0.02，加工出的零件放在一起. 设第一台机床加工的零件比第二台的多一倍，求任取一个零件是合格品的概率.

心得 体会 拓广 疑问

年　月　日

四、(10分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，求 $Z=|X-Y|$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

五、(10分) 某人在驾驶学校学习,需要参加电子路考,考试规定学员有当场补考一次的机会.这位学员第一次考试及格的概率为 p,第一次不及格第二次及格的概率为$\frac{p}{2}$,求:

(1) 他能通过电子路考考试的概率;

(2) 若已知该学员通过了电子路考,求他是第一次就通过考试的概率.

心得 体会 拓广 疑问

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

六、(14 分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 与 $N(\mu,2\sigma^2)$，其中 σ 是未知参数且 $\sigma>0$. 记 $Z=X-Y$.

(1) 求 Z 的概率密度 $f(z;\sigma^2)$；

(2) 设 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 为来自总体 Z 的简单随机样本，求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$；

(3) $\hat{\sigma}^2$ 是否为 σ^2 的无偏估计量，为什么?

年　月　日

七、(6分) 几副相异的手套共 $2n$ 只，随机地分成 n 堆，每堆 2 只，以 X 记“恰好成一副”的堆数，求 $E(X)$ 和 $D(X)$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

概率论与数理统计
综合训练试题（七）

大物实验群
290028380

班级：________________

学号：________________

姓名：________________

心得 体会 拓广 疑问

一、填空题(每小题 3 分,共 5 小题,满分 15 分)

1. 若事件 A,B,C 相互独立,且 $P(A)=\frac{1}{4}$,$P(B)=\frac{1}{2}$,$P(C)=\frac{2}{5}$,则 A,B,C 至少有一个不发生的概率为________.

2. 通过点(0,1)任意作直线与 x 轴相交成角 $\theta(0<\theta<\pi)$,试求这条直线在 x 轴上的截距的概率密度________.

3. 设 $X\sim N(-3,1)$,$Y\sim N(2,1)$,且 X 与 Y 相互独立,若 $Z=X-2Y+7$,则 $Z\sim$ ________.

4. 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 相互独立同分布,$E(X_i)=1$,$D(X_i)=1(i=1,2,\cdots)$,令 $S_9=\sum\limits_{i=1}^{9}X_i$,则对任意 $\varepsilon>0$,由切比雪夫不等式,$P(|S_9-9|<\varepsilon)\geqslant$ ________.

5. 已知灯泡寿命 $X\sim N(\mu,50^2)$,抽出 25 个灯泡检验,得 $\bar{x}=500$,在置信度 0.95 下,μ 的置信区间为________.

二、选择题(每小题 3 分,共 5 小题,满分 15 分)

(每小题给出的四个选项中,只有一个是符合题目要求的,把所选项的字母填在题后的括号内)

1. 设事件 A 和 B 满足 $P(B\mid A)=1$,则(　　).

A. A 是必然事件　　B. $P(A\mid\bar{B})=0$

C. $A\supset B$　　D. $A\subset B$

2. 下列函数可作为密度函数的是(　　).

A. $f(x)=\begin{cases}2(1-|x|), & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$

B. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & |x|\leqslant 2\\ 1, & |x|>2\end{cases}$

C. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases},\sigma>0$

D. $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$

3. 设 $E(X)=6$,$D(X)=4$,则 X 的分布为(　　).

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

A. 参数 $\lambda=6$ 的泊松分布

B. 区间 $(0,12)$ 上的均匀分布

C. 参数为 $n=18, p=\frac{1}{3}$ 的二项分布

D. 参数为 $\lambda=\frac{1}{2}$ 的指数分布

4. 随机变量 X, Y 独立同分布，记 $U=X-Y, V=X+Y$，则 U 和 V(　　).

A. 不独立　　B. 独立

C. 相关系数不为零　　D. 相关系数为零

5. 设随机变量 X 和 Y 都服从标准正态分布，则(　　).

A. $X+Y$ 服从正态分布　　B. X^2+Y^2 服从 χ^2 分布

C. X^2 和 Y^2 都服从 χ^2 分布　　D. $\frac{X^2}{Y^2}$ 服从 F 分布

三、**(10 分)** 已知 5% 的男人和 0.25% 的女人患色盲，假设男人女人各占一半，现随机地挑选一人.

(1) 求此人恰是色盲的概率；

(2) 若此人不患色盲，求他是男人的概率.

年　月　日

四、(10分) 求出在G上服从均匀分布的随机变量(X,Y)的概率密度及分布函数，其中G为x轴、y轴及直线$y=2x+1$所围成的三角形区域.

心得 体会 拓广 疑问

年　月　日

五、(10 分) 设 X,Y 是随机变量，均服从标准正态分布，相关系数 $\rho_{XY}=\frac{1}{2}$，令 $Z_1=aX$，$Z_2=bX+cY$，试确定 a,b,c，使 $D(Z_1)=D(Z_2)=1$ 且 Z_1 与 Z_2 不相关.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

六、(6分) 设有 n 盒产品，第 i 盒中的产品的使用寿命服从参数为 $\lambda_i(\lambda_i>0, i=1,2,\cdots,n)$ 的指数分布. 现等可能地从这 n 盒中任取一盒，再从该盒中取一件产品，求该产品的使用寿命 X 的概率密度和数学期望.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

七、(14 分) 设总体 X 具有概率密度 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$, $\theta>0$ 未知, 由样本 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 求 θ 的矩估计和最大似然估计.

年 月 日

概率论与数理统计
综合训练试题（八）

校学生会
QQ 3348756836

班级：________________

学号：________________

姓名：________________

心得 体会 拓广 疑问

一、填空题(每小题 3 分,共 5 小题,满分 15 分)

1. 设 A,B 为两事件,且 $P(A)=p,P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})$,则 $P(B)=$________.

2. 设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}2x^3e^{-x^2}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$,则 $Y=2X+3$ 的概率密度为________.

3. 设 (X,Y) 服从区域 $G=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2\}$ 上的均匀分布,令 $Z=\max(X,Y)$,则 $P(Z>\frac{1}{2})=$________.

4. 设随机变量 $X\sim U[0,1],Y\sim N(2,2^2)$,且 X 与 Y 独立,令 $Z=X+Y$,则根据切比雪夫不等式,$P(|Z-2.5|<7)\geqslant$________.

5. 测量零件尺寸产生的误差 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,σ 未知,今测量 10 个零件,得误差的样本均值和样本方差分别为 $\bar{x}=1.2,s^2=8.62$,则 μ 的置信度为 0.99 的置信区间是________.

二、选择题(每小题 3 分,共 5 小题,满分 15 分)

(每小题给出的四个选项中,只有一个是符合题目要求的,把所选项的字母填在题后的括号内)

1. 设 A,B 为两个事件,$P(A)\neq P(B)>0$,且 $B\subset A$,则(　　)一定成立.

A. $P(A\mid B)=1$　　B. $P(B\mid A)=1$

C. $P(B\mid \bar{A})=1$　　D. $P(A\mid \bar{B})=0$

2. 如下四个函数,哪个是随机变量的分布函数(　　).

A. $F(x)=\begin{cases}0, & x<-2\\ \frac{1}{2}, & -2\leqslant x<0\\ 2, & x\geqslant 0\end{cases}$　　B. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \sin x, & 0\leqslant x<\pi\\ 1, & x\geqslant \pi\end{cases}$

C. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \sin x, & 0\leqslant x<\frac{\pi}{2}\\ 1, & x\geqslant \frac{\pi}{2}\end{cases}$　　D. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x+\frac{1}{3}, & 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}\\ 1, & x>\frac{1}{2}\end{cases}$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

3. 设(X,Y)有概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}xe^{-x(y+1)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，则关于$Y$的边缘概率密度为(　　).

A. $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y+1}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$　　B. $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y-1}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$

C. $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(y+1)^2}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$　　D. $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(y-1)^2}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$

4. 设随机变量X服从正态分布$N(0,1)$，对给定的$\alpha(0<\alpha<1)$，数u_α满足$P(X>u_\alpha)=\alpha$. 若$P(|X|<x)=\alpha$，则x为(　　).

A. $u_{\frac{\alpha}{2}}$　　B. $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$　　C. $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$　　D. $u_{1-\alpha}$

5. 设随机变量$X\sim t(n)$，$(n>1)$，$Y=\dfrac{1}{X^2}$，则(　　).

A. $Y\sim\chi^2(n)$　　B. $Y\sim\chi^2(n-1)$

C. $Y\sim F(n,1)$　　D. $Y\sim F(1,n)$

三、**(10分)** 在一个罐子中有5个球，颜色有黑、白两种，从罐子中取4次球，每次取一个，取出后均放回罐子中，1次出现了白球，3次出现了黑球. 如在试验前每个球是白、黑的可能性相同，求在罐子中对白球数的各种假设的概率.

年　　月　　日

心得 体会 拓广 疑问

四、(10 分) 设(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{12}e^{-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}}, & x\geqslant 0,y\geqslant 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，

求：

(1)X,Y 的边缘概率密度，问 X,Y 是否相互独立？

(2)$Z=X+Y$ 的概率密度.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

五、(10 分) 已知随机变量 X 有概率密度 $f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\leqslant x<0\\ 1-x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

(1) 求 $Y=X^2+1$ 的概率密度 $f_Y(y)$；

(2) 求 $E(X^2+1)$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

六、(6 分) 购买某种保险,每个投保人每年度向保险公司交纳保费 a 元,若投保人在购买保险的一年度内出险,则可以获得 10 000 元的赔偿金. 假定在一年度内有 10 000 人购买了这种保险,且各投保人是否出险相互独立. 已知保险公司在一年度内至少支付赔偿金 10 000 元的概率为 $1-0.999^{10^4}$.

(1) 求一个投保人在一年度内出险的概率 p;

(2) 设保险公司开办该项险种业务除赔偿金外的成本为 50 000 元,为保证盈利的期望不小于 0,求每位投保人应交纳的最低保费.

年 月 日

七、(14 分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\leqslant\theta\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 是未知参数. 从总体 X 中抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$,记 $\hat{\theta}=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$.

(1) 求总体 X 的分布函数 $F(x)$;

(2) 求统计量 $\hat{\theta}$ 的分布函数 $F_{\hat{\theta}}(x)$;

(3) 如果用 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量,讨论它是否具有无偏性.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

概率论与数理统计
综合训练试题(九)

班级:________________

学号:________________

姓名:________________

心得 体会 拓广 疑问

一、填空题(每小题 3 分,共 5 小题,满分 15 分)

1. 设事件 A 与 B 互不相容，且 $P(A)=p, P(B)=q$，则 $P(\overline{A}\ \overline{B})=$________.

2. 设随机变量 X 具有概率密度 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi(1+x^2)}, & x>0 \\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$，则 $Y=\ln X$ 的概率密度 $f_Y(y)=$________.

3. 设随机变量 X 的分布列为 $P(X=k)=A\left(\dfrac{1}{3}\right)^k, k=1,2,3,\cdots$，则 $P(X>1)=$________.

4. 设随机变量 X,Y 相互独立，且均服从参数为 2 的指数分布，则 $P\{\min(X,Y)\leqslant 1\}=$________.

5. 为确定某种溶液中杂质的浓度，共取样 4 次，测得平均值 $\overline{x}=0.834$，样本标准差 $s=0.000\ 3$，设总体服从 $N(\mu,\sigma^2)$，则 μ 的置信区间为________$(\alpha=0.05)$.

二、选择题(每小题 3 分,共 5 小题,满分 15 分)

(每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项的字母填在题后的括号内)

1. 5 人以摸彩方式决定谁能得一张电影票，今设 A_i 表示第 i 个人摸到 $(i=1,2,3,4,5)$，则下列结果中有一个不正确，它是(　　).

A. $P(A_3 \mid \overline{A}_1\ \overline{A}_2)=\dfrac{1}{3}$　　B. $P(\overline{A}_1 A_2)=\dfrac{1}{5}$

C. $P(\overline{A}_1 A_2)=\dfrac{1}{4}$　　D. $P(A_5)=\dfrac{1}{5}$

2. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，且 $f(-x)=f(x)$，$F(x)$ 是 X 的分布函数，则对任意实数 a 有(　　).

A. $F(-a)=1-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$　　B. $F(-a)=\dfrac{1}{2}-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$

C. $F(-a)=F(a)$　　D. $F(-a)=2F(a)-1$

3. 设随机变量 X,Y 的方差存在，且不等于 0，则 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$ 是 X,Y (　　).

A. 不相关的充分条件，但不是必要条件

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

B. 独立的必要条件，但不是充分条件

C. 不相关的必要条件，但不是充分条件

D. 独立的充分必要条件

4. 设总体 $X \sim N(0,1)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为 X 的样本，则下列统计量的分布中不正确的是(　　).

A. $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$　　B. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(0,1)$

C. $\frac{\sqrt{n-1}X_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} X_i^2}} \sim t(n-1)$　　D. $\frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)\sum_{i=1}^{2} X_i^2}{\sum_{i=3}^{n} X_i^2} \sim F(2,n-2)$

5. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，即 $X \sim f(x)$，期望 μ 与方差 σ^2 都存在，样本 $X_1, \cdots, X_n (n > 1)$ 取自 X，$\overline{X}$ 是样本均值，则有(　　).

A. $\overline{X} \sim f(x)$　　B. $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i \sim f(x)$

C. $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i \sim f(x)$　　D. $(X_1, X_2, \cdots, X_n) \sim \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$

三、(10 分) 两箱同种类的零件，第 1 箱装 50 件，其中 10 件一等品；第 2 箱装 30 件，其中 12 件一等品. 今通过抛掷一枚均匀的硬币来决定从哪一箱中取零件，现若取出的第 1 件是一等品，并把它放回，问从同一箱中抽取的第 2 件也是一等品的概率.

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

四、(10 分) 设(X,Y)有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0<x<1, 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

年　月　日

五、(10 分) 设二维离散型随机变量(X,Y)的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

(1) 求 $P(X=2Y)$；

(2) 求 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$；

(3) 求 X 与 Y 的相关系数.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

六、(14分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{\sqrt{\pi}\alpha^3}x^2e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}, & x>0,\alpha>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

$X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 α^2 的最大似然估计量；

(2) $\hat{\alpha}$ 是不是 α^2 的无偏估计量？为什么？

年 月 日

七、(6分) 某单位招聘155人，按考试成绩录用，共有526人报名. 假设报名者的成绩 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，已知90分以上有12人，60分以下有84人，若从高分到低分依次录取，某人成绩为78分，问此人是否在被录取之列？

心得 体会 拓广 疑问

年　月　日

概率论与数理统计
综合训练试题（十）

班级：________________________

学号：________________________

姓名：________________________

心得 体会 拓广 疑问

一、填空题(每小题 3 分,共 5 小题,满分 15 分)

1. 设相互独立的三个事件 A,B,C 满足条件:$P(A)=0.4,P(B)=0.5,P(C)=0.5$,则 $P(A-C\mid AB\cup C)=$________.

2. 在一张打上方格的纸上随机地投一枚硬币,若方格的长度为 a,硬币的直径为 $2b(2b<a)$ 且硬币落在每一处是等可能的,则硬币与方格线不相交的概率为________.

3. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$,对 X 进行三次独立重复观察,用 Y 表示事件 $\left(X\leqslant\frac{1}{2}\right)$ 出现的次数,则 $P(Y=1)=$________.

4. 已知随机变量 X 的分布列

X	1	2	3
P	0.2	0.3	0.5

试利用切比雪夫不等式估计事件 $\{|X-E(X)|<1.5\}$ 的概率________.

5. 设随机变量 X 和 Y 的联合概率分布为

Y \ X	-1	0	1
0	0.07	0.18	0.15
1	0.08	0.32	0.20

则 $\mathrm{Cov}(X^2,Y^2)=$________.

二、选择题(每小题 3 分,共 5 小题,满分 15 分)

(每小题给出的四个选项中,只有一个是符合题目要求的,把所选项的字母填在题后的括号内)

1. 设 $AB\subset C$,则(　　)成立.

A. $\overline{AB}\supset\overline{C}$　　B. $A\subset C$ 且 $B\subset C$

C. $\overline{A\cup B}\supset\overline{C}$　　D. $A\subset C$ 或 $B\subset C$

2. 下列函数中可以作为分布函数的是(　　).

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

A. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0 \\ \dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ \dfrac{3}{4}, & 1<x<2 \\ 1, & x\geqslant 2\end{cases}$

B. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0 \\ \sin x, & 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{4} \\ x, & \dfrac{\pi}{4}\leqslant x<1 \\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}$

C. $F(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}, & x\geqslant 0 \\ 0, & x<0\end{cases}$

D. $F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0 \\ \dfrac{x^2}{2}, & 0<x\leqslant 1 \\ -\dfrac{3}{2}+2x-\dfrac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant 2 \\ 2, & x>2\end{cases}$

3. 设随机变量 X,Y 的方差存在，则随机变量 $U=X+Y$ 与 $V=X-Y$ 不相关的充分必要条件为(　　).

A. $E(X)=E(Y)$

B. $E(X^2)-(E(X))^2=E(Y^2)-(E(Y))^2$

C. $E(X^2)=E(Y^2)$

D. $E(X^2)+(E(X))^2=U(Y^2)+(E(Y))^2$

4. 设 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\leqslant 1 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，则 X 与 Y 为(　　)的随机变量.

A. 独立同分布　　B. 独立不同分布

C. 不独立同分布　　D. 不独立也不同分布

5. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ,σ^2 为未知数，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是来自 X 的样本，则下列结论正确的是(　　).

A. $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 服从 $\chi^2(n-1)$ 分布

B. $S_1^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 服从 $\chi^2(n-1)$ 分布

C. $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 服从 $\chi^2(n-1)$ 分布

D. $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 服从 $\chi^2(n)$ 分布

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

三、(10 分) 有两个盒子,第一个盒子中装有 6 个白球,4 个黑球;第二个盒子中装有 3 个白球,7 个黑球. 现从这两个盒子中各取一球放在一起,再从中任取一球. 求:

(1) 此球为白球的概率;

(2) 若此球为白球,求从第一个盒子中取出的球是白球的概率.

四、(10 分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,其中 X 的概率分布为

X	1	2
P	0.3	0.7

而 Y 的概率密度为 $f_Y(y)$,求随机变量 $U=X+Y$ 的概率密度 $g(u)$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

五、(10 分) 设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}xe^{-y}, & 0<x<y<+\infty \\ 0, & 其他\end{cases}$$

求：

(1)X 和 Y 的边缘概率密度；

(2)(X,Y) 的联合分布函数；

(3)$P(X+Y<1)$.

年 月 日

六、(14分) 设总体 X 的概率密度

$$f(x,\theta)=\begin{cases}1, & \theta-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\theta+\frac{1}{2}, -\infty<\theta<+\infty\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$X_1,X_2,\cdots,X_{11}$ 为其样本.

(1) 求参数 θ 的矩估计和最大似然估计；

(2) 证明样本均值 $\overline{X}$ 及 $\frac{1}{2}[\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}X_i+\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}X_i]$ 都是 θ 的无偏估计量.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

七、(6分)从$1,2,\cdots,n$任取一个数X，再从$1,2,\cdots,X$中任取一个数Y，求$E(Y)$.

心得 体会 拓广 疑问

年　月　日

概率论与数理统计
综合训练试题(十一)

大物实验群
290028380

班级：____________________

学号：____________________

姓名：____________________

心得 体会 拓广 疑问

一、填空题(每小题 3 分,共 5 小题,满分 15 分)

1. 在投掷一枚均匀硬币的 4 次独立试验中,若已知至少 1 次已经反面朝上,则这时得到至少 3 次正面朝上的概率为________.

2. 电机的绝缘寿命为随机变量 $Y=10^X$,其中 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,则 Y 的概率密度为________.

3. 设随机变量 X,Y 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x\geqslant 0\\0, & x<0\end{cases},f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-4y}, & y\geqslant 0\\0, & y<0\end{cases}$$

且 X 与 Y 相互独立,则 $D(2X-3Y)=$________.

4. 设 (X,Y) 在 $G=\{(x,y)\mid 0<x<y<1\}$ 上服从均匀分布,则 X 与 Y 的相关系数为________.

5. 随机地取某种炮弹 9 发做试验,得炮口速度的样本标准差 $s=11\text{ m/s}$,设炮口速度服从正态分布,则这种炮弹的炮口速度的标准差 σ 的置信水平为 0.95 的置信区间是________.

二、选择题(每小题 3 分,共 5 小题,满分 15 分)

(每小题给出的四个选项中,只有一个是符合题目要求的,把所选项的字母填在题后的括号内)

1. 已知 $P(B)>0,A_1A_2=\varnothing$,则下列各式中不正确的是(　　).

A. $P(A_1A_2\mid B)=0$

B. $P(A_1\cup A_2\mid B)=P(A_1\mid B)+P(A_2\mid B)$

C. $P(\overline{A}_1\overline{A}_2\mid B)=1$

D. $P(\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\mid B)=1$

2. 下列函数可作为连续型随机变量的概率密度的是(　　).

A. $f(x)=\begin{cases}\sin x, & \pi\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi\\0, & \text{其他}\end{cases}$

B. $g(x)=\begin{cases}-\sin x, & \pi\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi\\0, & \text{其他}\end{cases}$

C. $\varphi(x)=\begin{cases}\cos x, & \pi\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi\\0, & \text{其他}\end{cases}$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

D. $h(x)=\begin{cases}1-\cos x, & \pi\leqslant x\leqslant \frac{3}{2}\pi \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

3. 设随机变量 $X\sim N(-3,1)$，$Y\sim N(2,1)$，且 X 与 Y 独立，设 $Z=X-2Y+7$，则 $Z\sim$（　　）.

A. $N(0,5)$　　B. $N(0,-3)$　C. $N(0,46)$　　C. $N(0,54)$

4. 设(X,Y)有概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}24y(1-x), & 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，则关于 X 的概率密度为（　　）.

A. $f_X(x)=\begin{cases}12x^2(1-x), & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

B. $f_X(x)=\begin{cases}12x(1-x)^2, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

C. $f_X(x)=\begin{cases}24x^2(1-x), & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

D. $f_X(x)=\begin{cases}24x(1-x)^2, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

5. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是总体 X 的样本，$E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$，$\overline{X}$ 是样本均值，S^2 是样本方差，则（　　）.

A. $\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$　　B. S^2 与 $\overline{X}$ 独立

C. $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$　　D. S^2 是 σ^2 的无偏估计

三、**(10分)** 某班车起点站处上车人数 $X\sim P(\lambda)(\lambda>0)$，每位乘客在中途下车的概率均为 p，且中途下车与否相互独立，以 Y 表示在中途下车的人数. 求：

(1) 在发车时有 n 个乘客的条件下，中途有 m 个人下车的概率；

(2) 二维随机变量(X,Y)的概率分布.

年　　月　　日

四、(10 分) 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

试求随机变量 $Z=X-Y$ 的分布函数与概率密度.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

五、(10 分) 设随机变量 X 和 Y 的联合分布在以点(0,1),(1,0),(1,1)为顶点的三角形区域内服从均匀分布,试求随机变量 $V=X+Y$ 的方差.

心得 体会 拓广 疑问

年　月　日

六、(6分) 在[0,1]上任取n个点，以X记最大点与最小点的距离，求$E(X)$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

七、(14 分) 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自两参数指数分布的样本，总体 X 的概率密度为

心得 体会 拓广 疑问

$$f(x;\theta_1\theta_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta_2}e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}, & x\geqslant\theta_1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中 $-\infty<\theta_1<+\infty,0<\theta_2<+\infty$，求：

(1) 参数 θ_1 和 θ_2 的最大似然估计；

(2) 参数 θ_1 和 θ_2 的矩估计.

年　月　日

概率论与数理统计

综合训练试题(十二)

班级：________________

学号：________________

姓名：________________

心得 体会 拓广 疑问

一、填空题(每小题 3 分,共 5 小题,满分 15 分)

1. 已知 $P(A)=0.5, P(B)=0.6, P(B\mid A)=0.8$,则 $P(A\cup B)=$________.

2. 设随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$,则 $Y=|X|$ 的概率密度为________.

3. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布且 $P(X=3)=\frac{4}{3}e^{-2}$,则 $E(X^2)=$________.

4. 二维随机变量 (X,Y) 服从 $D=\{(x,y)\mid x+y\geqslant 1, 0<x<1, 0<y<1\}$ 有限区域上的均匀分布,则根据切比雪夫不等式有 $P\left(\left|X+Y-\frac{4}{3}\right|\geqslant 3\right)\leqslant$________.

5. 已知铝的密度 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,测量了 16 次,得 $\bar{x}=2.705, s=0.029$,在置信度 0.95 下,μ 的置信区间为________,$t_{0.025}(15)=2.1315$.

二、选择题(每小题 3 分,共 5 小题,满分 15 分)

(每小题给出的四个选项中,只有一个是符合题目要求的,把所选项的字母填在题后的括号内)

1. 袋中有 5 个黑球,3 个白球,大小相同.一次随机摸出 4 个球,其中恰有 3 个白球的概率为(　　).

A. $\frac{3}{8}$　　B. $\left(\frac{3}{8}\right)^5\left(\frac{1}{8}\right)$　　C. $\left(\frac{3}{8}\right)^3\left(\frac{1}{8}\right)$　　D. $\frac{5}{C_8^4}$

2. $P(X=k)=c\lambda^k\frac{e^{-\lambda}}{k!}(k=0,2,4,\cdots)$ 是随机变量 X 的概率函数,则 λ, c 一定满足(　　).

A. $\lambda>0$　　B. $c>0$　　C. $c\lambda>0$　　D. $c>0$ 且 $\lambda>0$

3. (X,Y) 为二维随机变量,则 $U=X+Y, V=X-Y$ 不相关的充要条件为(　　).

A. $E(X)=E(Y)$

B. $E(X^2)-(E(X))^2=E(Y^2)-(E(Y))^2$

C. $E(X^2)=E(Y^2)$

D. $E(X^2)+(E(X))^2=E(Y^2)+(E(Y))^2$

4. 设随机变量 X 和 Y 都服从正态分布,且它们不相关,则(　　).

年　月　日

A. X 与 Y 一定独立　　　　B. (X,Y) 服从二维正态分布

C. X 与 Y 未必独立　　　　D. $X+Y$ 服从一维正态分布

5. 设随机变量 $X \sim N(0,1)$，$Y \sim N(1,4)$，且 $\rho_{XY}=1$，则(　　).

A. $P\{Y=-2X-1\}=1$　　　　B. $P\{Y=2X-1\}=1$

C. $P\{Y=-2X+1\}=1$　　　　D. $P\{Y=2X+1\}=1$

心得 体会 拓广 疑问

三、(10 分) 甲、乙进行比赛，每进行一次，胜者得一分. 在一次比赛中，甲"胜"的概率为 α，乙胜的概率为 $\beta(\alpha+\beta=1)$. 独立地进行比赛到有一人超过对方两分就停止(例如在乒乓球比赛中，双方比分为 10：10 时，开始交替发球，直到有一方超过对方两分为止)，多得两分者为胜. 试求甲、乙获胜的概率(设每一次比赛均可分出胜负).

年　月　日

四、(10 分) 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<2(1-x)\\0, & \text{其他}\end{cases}$$

求随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

五、(10 分) 已知随机变量 X 服从(1,2) 上的均匀分布,求:

(1)$Y=e^{2X}$ 的概率密度 $f_Y(y)$;

(2)$E(e^{2X})$.

心得 体会 拓广 疑问

年　月　日

六、(6 分) 设随机变量 $X \sim U[0,1]$，求：

(1)$Y = X^2 - 4X + 1$ 的概率密度；

(2)$2X$ 与 Y 之间的相关系数.

心得 体会 拓广 疑问

年　月　日

七、**(14 分)** 设总体 $X \sim U[1,\theta]$，$X_1,\cdots,X_n$ 为简单随机样本.求：

(1)θ 的矩估计 $\hat{\theta}$，并问 $\hat{\theta}$ 是否为 θ 的无偏估计？

(2) 估计量的方差 $D(\hat{\theta})$.

心得 体会 拓广 疑问

年　月　日

概率论与数理统计
综合训练试题(十三)

班级:______________________

学号:______________________

姓名:______________________

心得 体会 拓广 疑问

数值分析Q群
926420643

一、填空题(每小题 3 分,共 5 小题,满分 15 分)

1. 在有三个小孩的家庭中,已知至少有一个女孩,求该家庭至少有一个男孩的概率为________.

2. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x^3 e^{-x^2}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$,则 $Y=X^2$ 的概率密度 $f_Y(y)=$________$(y>0)$.

3. 设随机变量 X 和 Y 的相关系数为 0.6,若 $Z=5X-0.6$,则 Y 与 Z 的相关系数为________.

4. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}x, & a<x<b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$,$0<a<b$,且 $E(X^2)=2$,则 $P(|X|<\frac{3}{2})=$________.

5. 若用机器装罐头,已知罐头重量 $X\sim N(\mu,0.02^2)$,随机抽取 25 个进行测量,得样本均值 $\overline{X}=1.05$ kg,则总体期望 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是________,$\Phi(1.96)=0.975$.

二、选择题(每小题 3 分,共 5 小题,满分 15 分)

(每小题给出的四个选项中,只有一个是符合题目要求的,把所选项的字母填在题后的括号内)

1. 若 $P(A\mid C)\geqslant P(B\mid C)$,$P(A\mid\overline{C})\geqslant P(B\mid\overline{C})$,则下列(　　)成立.

A. $P(A)\geqslant P(B)$　　　　B. $P(A)=P(B)$

C. $P(A)\leqslant P(B)$　　　　D. $P(A)=P(B)+P(C)$

2. 下列函数中能作为分布函数的是(　　).

A. $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \frac{1}{3}, & -1\leqslant x\leqslant 2\\ 1, & x>2\end{cases}$　　B. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \sin x, & 0\leqslant x<\pi\\ 1, & x\geqslant \pi\end{cases}$

C. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{x+2}{5}, & 0\leqslant x<2\\ 1, & x\geqslant 2\end{cases}$　　D. $F(x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{2\pi}\arctan x$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

3. 设二维随机变量(X,Y)服从区域$D=\{(x,y)\mid x+y\geqslant 1,0<x<1,0<y<1\}$上的均匀分布，则根据切比雪夫不等式有$P\left(\left|X+Y-\frac{4}{3}\right|\geqslant 2\right)\leqslant$(　　).

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{36}$　　C. $\frac{1}{48}$　　D. $\frac{1}{72}$

4. 设随机变量X,Y独立同分布，且X的分布函数为$F(x)$，则$Z=\min(X,Y)$的分布函数为(　　).

A. $F^2(x)$　　B. $F(x)F(y)$

C. $1-[1-F(x)]^2$　　D. $[1-F(x)][1-F(y)]$

5. 设$X_1,X_2,\cdots,X_6$和$Y_1,Y_2,\cdots,Y_{10}$分别来自两个正态总体$N(-1,2^2)$和$N(2,5)$的样本，且相互独立，S_1^2与S_2^2分别为两个总体的样本方差，则服从$F(5,9)$的统计量为(　　).

A. $2S_1^2/5S_2^2$　　B. $5S_1^2/4S_2^2$　　C. $4S_2^2/5S_1^2$　　D. $5S_1^2/2S_2^2$

三、(10分) 一个仪器上有3个零件，这3个零件互不相关且出现故障的概率分别为0.2，0.4，0.6. 若这3个零件中有一个零件出现故障，仪器不能正常工作的概率为0.3；若有2个零件出现故障，仪器不能正常工作的概率为0.65；若3个零件都出现故障，仪器不能正常工作的概率为0.85，现在仪器不能正常工作，求有2个零件出现故障的概率.

年　月　日

四、(10 分) 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<2x\\0, & 其他\end{cases}$$

求 $Z=2X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

心得 体会 拓广 疑问

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

五、(10分) 某人有m把钥匙，其中有两把能打开门，他从中任取一把试开，试过的除去后不再使用，直到把门打开为止，求：

(1) 试开次数X的分布列；

(2) 数学期望$E(X)$，方差$D(X)$.

年 月 日

六、(14分) 设总体 X 服从二项分布 $B(k,p)$，k 是正整数，$0<p<1$，两者都是未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是一样本.

(1) 试求 k 和 p 的矩估计；

(2) 当 k 已知，试求 p 的最大似然估计.

心得 体会 拓广 疑问

年　月　日

七、(6分) 设随机变量 X,Y 相互独立,试证明随机变量 $U=2X+1$, $V=e^Y$ 也相互独立.

资源共享QQID
HGDZYFXZ

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

概率论与数理统计
综合训练试题（十四）

班级：____________________

学号：____________________

姓名：____________________

心得 体会 拓广 疑问

一、填空题(每小题 3 分,共 5 小题,满分 15 分)

1. 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$,$P(AB)=P(AC)=P(BC)=\frac{1}{8}$,$P(ABC)=\frac{1}{16}$,则 A,B,C 恰有一个发生的概率为________.

2. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}Ax^2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$($A$ 为待定常数),则 X 的分布函数为________.

3. 已知 $E(X)=2,D(X)=25,E(Y)=1,D(Y)=36,\rho_{XY}=0.4$,则 $E(2X-3Y+4)^2=$________.

4. 两人约定上午 9 点到 10 点在公园会面,一人要等另一个人半小时以上的概率为________.

5. 设 $X\sim U[0,6]$,$Y\sim P(3)$,且 X,Y 独立,由切比雪夫不等式知 $P\{|X-Y|\leqslant 3\}\geqslant$________.

二、选择题(每小题 3 分,共 5 小题,满分 15 分)

(每小题给出的四个选项中,只有一个是符合题目要求的,把所选项的字母填在题后的括号内)

1. 设 A,B 为任意两个事件,则下列关系式成立的是(　　).

A. $(A\cup B)-B=A$　　B. $(A\cup B)-B\supset A$

C. $(A\cup B)-B\subset A$　　D. $(A-B)\cup B=A$

2. 设 X_1 和 X_2 是任意两个相互独立的连续型随机变量,它们的概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$,分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$,则(　　).

A. $f_1(x)+f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度

B. $f_1(x)f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度

C. $F_1(x)+F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数

D. $F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数

3. 已知(X,Y)的联合分布函数为 $F(x,y)$,而 $F_X(x),F_Y(y)$ 分别为(X,Y)关于 X 和 Y 的边缘分布函数,则 $P(X>x_0,Y>y_0)$ 可表示为(　　).

A. $F(x_0,y_0)$　　B. $1-F(x_0,y_0)$

C. $[1-F_X(x_0)][1-F_Y(y_0)]$　　D. $1-F_X(x_0)-F_Y(y_0)+F(x_0,y_0)$

年　月　日

4. 设随机变量 X 与 Y 独立，且 $P(X=1)=P(Y=1)=p>0, P(X=0)=P(Y=0)=1-p>0$，令 $Z=\begin{cases}1, & X+Y \text{ 为偶数} \\ 0, & X+Y \text{ 为奇数}\end{cases}$，要使 X 与 Z 独立，则 p 的值为（　　）.

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

5. 设 X_1, X_2 为总体 X 的样本，则下列总体期望 $E(X)$ 的无偏估计中，（　　）最有效.

A. $\frac{1}{4}X_1+\frac{3}{4}X_2$　　B. $\frac{1}{3}X_1+\frac{2}{3}X_2$

C. $\frac{3}{8}X_1+\frac{5}{8}X_2$　　D. $\frac{4}{9}X_1+\frac{5}{9}X_2$

三、(10 分) 有甲、乙、丙三个袋子，甲袋中有 2 个黑球，3 个白球；乙袋中有 1 个黑球，3 个白球；丙袋中有 3 个黑球，1 个白球. 从甲袋中任取一个球放入乙袋中，再从乙袋中任取一个球放入丙袋中，最后从丙袋中任取一球. 求最后取到白球的概率.

心得 体会 拓广 疑问

年　月　日

四、(10 分) 设二维随机向量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} xe^{-y}, & 0<x<y \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求：

(1)$Z=X+Y$的概率密度；

(2)$M=\max(X,Y)$的概率密度.

心得 体会 拓广 疑问

年　月　日

五、(10分) 设系统由元件 A, B 并联而成，以 X, Y 分别表示元件 A, B 的寿命，并设 X, Y 相互独立且均服从参数为 λ 的指数分布，求系统寿命 Z 的数学期望.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

六、(14 分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\theta^2}, & 0\leqslant x\leqslant\theta,\theta>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是该总体的一个样本值.

(1) 试求 θ 的最大似然估计.

(2) 问 $\hat{\theta}$ 是否是 θ 的无偏估计？并说明理由.

(3) 试构造 θ 的一个无偏估计量.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

七、(6分) 一个碗中放有10个筹码，其中8个筹码标有2元，2个筹码标有5元. 今某人从此碗中随机地无放回地抽取3个筹码，若他获得的奖金等于所抽取3个筹码的数字之和，试求他获奖金的数学期望及方差.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

概率论与数理统计
综合训练试题(十五)

班级：________________________

学号：________________________

姓名：________________________

心得 体会 拓广 疑问

一、填空题(每小题 3 分,共 5 小题,满分 15 分)

1. 设事件 A,B 满足 $P(B \mid A)=P(\overline{B} \mid \overline{A})=\dfrac{1}{5}$, $P(A)=\dfrac{1}{3}$,则 $P(B)=$________.

2. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2\mathrm{e}^{-|x|}\ (x\in\mathbf{R})$,则 $Y=X^2$ 的概率密度为________.

3. 设 X,Y 为随机变量,已知 $D(X)=9$, $D(Y)=4$, $\rho_{XY}=-\dfrac{1}{6}$,则 $D(X-Y+4)=$________.

4. 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$,利用切比雪夫不等式估计概率 $P(0<X<6)>$________.

5. 为估计制造某种产品所需的单件平均工时(单位:h),现制造 5 件,记录工时 $\overline{x}=11.6$, $s^2=0.995$. 设制造单件产品所需工时服从正态分布,给定置信度为 0.95,则平均工时的置信区间为________, $t_{0.025}(4)=2.7764$.

二、选择题(每小题 3 分,共 5 小题,满分 15 分)

(每小题给出的四个选项中,只有一个是符合题目要求的,把所选项的字母填在题后的括号内)

1. 对于任意两事件 A 和 B,与 $A\cup B=B$ 不等价的是(　　).

A. $A\subset B$　　B. $\overline{B}\subset\overline{A}$　　C. $A\overline{B}=\varnothing$　　D. $\overline{A}B=\varnothing$

2. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,对于非负常数 k,概率 $P(|X-\mu|\leqslant k\sigma)$(　　).

A. 只与 k 有关　　B. 只与 μ 有关

C. 只与 σ 有关　　D. 与 μ,σ,k 均有关

3. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$,则 $P\{|X-E(X)|\geqslant 2\sqrt{D(X)}\}$ 等于(　　).

A. $\dfrac{9-8\sqrt{2}}{9}$　　B. $\dfrac{6+4\sqrt{2}}{9}$　　C. $\dfrac{6-4\sqrt{2}}{9}$　　D. $\dfrac{9+8\sqrt{2}}{9}$

年　月　日

4. 设随机变量 X,Y 的相关系数为 ρ，且 $D(X)=4, D(Y)=1$，$D(X-Y)=4$，则 $\rho=$(　　).

A. 1　　　　B. 0.25　　　　C. 0.5　　　　D. -0.25

5. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 $X \sim N(0,1)$ 的一个样本，统计量 $Y=\dfrac{\sqrt{n-1}X_1}{\sqrt{\sum\limits_{i=2}^{n} X_i^2}}$，则(　　).

A. $Y \sim \chi^2(n-1)$　　　　B. $Y \sim t(n-1)$

C. $Y \sim F(n,1)$　　　　D. $Y \sim F(1,n-1)$

三、(10 分) 在一天中进入斯大林公园的游客人数服从参数为 μ 的泊松分布，而进入公园的每个人过江去太阳岛的概率为 p，若游客是否过江相互独立，求一天中恰有 m 个游客过江去太阳岛的概率.

心得 体会 拓广 疑问

年　月　日

四、(10 分) 设随机变量 X,Y 相互独立，$X \sim B(2,\frac{1}{3})$，$Y \sim U[0,1]$，设 $Z=X+Y$，求 Z 的分布函数 $F_Z(z)$，数学期望 $E(Z)$，方差 $D(Z)$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

五、(10分) 某箱装有100件产品,其中一、二、三等品分别为80件,10件,10件,现在随机抽取一件,记 $X_i=\begin{cases}1, & \text{若抽到 } i \text{ 等品}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$,$i=1,2,3$,求:

(1)X_1 和 X_2 的联合分布;

(2)X_1 和 X_2 的相关系数 $\rho_{X_1X_2}$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

六、(14 分) 设总体 X 具有概率密度 $f(x;\theta)=\begin{cases}\theta c^{\theta}x^{-(\theta+1)}, & x>c\\ 0, & x\leqslant c\end{cases}$，

其中 $c>0$ 为已知参数，$\theta>1$ 为未知参数. 由样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，求 θ 的矩估计和最大似然估计.

心得 体会 拓广 疑问

年　月　日

七、(6 分) 掷一颗六面体匀质骰子，一直到出现 5 点为止，问平均需掷多少次？

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

2015年秋季学期概率论与数理统计综合训练试题

班级：______________________

学号：______________________

姓名：______________________

心得 体会 拓广 疑问

一、填空题(每小题 3 分,共 5 小题,满分 15 分)

1. 设 $P(A)+P(B)=0.7$,且 A,B 只发生一个的概率为 0.5,则 A,B 都发生的概率为________.

2. 设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\leqslant 0 \end{cases}$,则 $Y=e^X$ 的概率密度为 $f_Y(y)=$________.

3. 设随机变量 X,Y 的相关系数为 0.5,$EX=EY=0$,$EX^2=EY^2=2$,则 $E(X+Y)^2=$________.

4. 生产一个零件所需时间 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,观察 25 个零件的生产时间得 $\bar{x}=5.5$ s,样本标准差 $s=1.73$ s,则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是________.

$t_{0.05}(24)=1.7109$,$t_{0.025}(24)=2.0639$,$t_{0.025}(25)=2.0595$;

$\Phi(1.96)=0.975$,$\Phi(1.645)=0.95$.

5. 设随机变量 X,Y 相互独立,且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布,则 $P\{\max(X,Y)\leqslant 1\}=$________.

二、选择题(每小题 3 分,共 5 小题,满分 15 分)

1. 设 $0<P(B)<1$,$P(A\mid B)+P(\bar{A}\mid \bar{B})=1$,则(　　).

A. A,B 互不相容　　B. A,B 互为对立事件

C. A,B 相互独立　　D. A,B 不独立

2. 下列函数可作为随机变量分布函数的是(　　).

A. $F(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$,$-\infty<x<+\infty$

B. $F(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1+x}, & x\geqslant 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$

C. $F(x)=e^{-x}$,$-\infty<x<+\infty$

D. $F(x)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2\pi}\arctan x$,$-\infty<x<+\infty$

3. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $N(1,2^2)$ 的一个样本,其中 $\bar{X}$ 为样本均值,则下面结论正确的是(　　).

年　月　日

A. $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2}{4} \sim \chi^2(n)$　　B. $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2}{4} \sim F(n,1)$

C. $\dfrac{(\overline{X}-1)\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$　　D. $\dfrac{(\overline{X}-1)\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \sim t(n)$

4. 设随机变量 $X \sim U[0,6]$, $Y \sim B\left(12,\dfrac{1}{4}\right)$，且 X,Y 相互独立，则根据切比雪夫不等式有 $P(X-3<Y<X+3) \geqslant$（　　）.

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{3}{5}$　　C. $\dfrac{3}{4}$　　D. $\dfrac{5}{12}$

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 与 S^2 分别为样本均值和样本方差，则下列结论正确的是（　　）.

A. $2X_2-X_1 \sim N(\mu,\sigma^2)$　　B. $\dfrac{n(\overline{X}-\mu)^2}{S^2} \sim F(1,n-1)$

C. $\dfrac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$　　D. $\dfrac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n-1}}{S} \sim t(n-1)$

三、(9 分) 某人外出可以乘飞机、火车、轮船、汽车四种交通工具，其概率依次为 0.05, 0.15, 0.30, 0.5，而乘坐这几种交通工具能如期到达的概率依次为 0.80, 0.70, 0.60, 0.90，求：

(1) 该人如期到达的概率；

(2) 已知该人误期到达，求他是乘坐火车的概率.

心得 体会 拓广 疑问

年　月　日

四、(9 分) 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{6}e^{-\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)}, & x\geqslant 0,y\geqslant 0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求:(1)(X,Y)的边缘概率密度$f_X(x)$,$f_Y(y)$,并问X,Y是否相互独立?为什么?

(2)$Z=X+Y$的概率密度$f_Z(z)$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

五、(9分) 设随机变量(X,Y)服从区域$G=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2\}$上的二维均匀分布. $U=|X-Y|$,求:

(1)U 的概率密度 $f_U(u)$;

(2)U 的期望 EU 和方差 DU.

心得 体会 拓广 疑问

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

六、(9分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中 θ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本. 求：

(1) θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$ 和最大似然估计量 $\hat{\theta}_2$；

(2) 讨论 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$ 的无偏性.

年　月　日

七、(4分) 设某商店每月销售某种商品的数量服从参数为6的泊松分布，问在月初要库存多少此种商品才能保证当月不脱销的概率为0.991 17?（泊松分布表见下表）

心得 体会 拓广 疑问

$$\sum_{k=m}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

m \ λ	4	5	6	7	8
11	0.002 84	0.013 7	0.043 62	0.098 52	0.018 411
12	0.000 92	0.005 45	0.020 09	0.053 35	0.111 92
13	0.000 27	0.002 02	0.008 83	0.027	0.063 8

年 月 日

2016年秋季学期概率论与数理统计综合训练试题

班级：______________________

学号：______________________

姓名：______________________

心得 体会 拓广 疑问

一、填空题(每小题 3 分,共 5 小题,满分 15 分)

1. 设事件 A,B 满足 $P(B \mid A)=\frac{1}{5}$,$P(\bar{B} \mid \bar{A})=\frac{2}{5}$,$P(A)=\frac{1}{3}$,则 $P(B)=$________.

2. 设随机变量 $X \sim U(-1,1)$,则 $Y=\mathrm{e}^X$ 的概率密度 $f_Y(y)=$________.

3. 设随机变量 X,Y 的相关系数为 0.5,若 $Z=X-0.4$,则 Y 与 Z 的相关系数为________.

4. 设一批零件的长度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,其中 μ,σ^2 均未知,现从中随机抽取 16 个零件,测得样本均值为 20(cm),样本标准差为 1(cm),则 μ 的置信度为 0.90 的置信区间为________.

5. 设随机变量 X,Y 的联合概率密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-(x+y)}, & x>0,y>0 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$,则 $D(2X-Y)=$________.

可选用的部分数值:$t_{0.025}(16)=2.119\,9$,$t_{0.05}(15)=1.753\,1$,$t_{0.025}(14)=2.144\,8$,$t_{0.05}(14)=1.761\,3$,$\Phi(1.96)=0.975$,$\Phi(1.645)=0.95$.

二、选择题(每小题 3 分,共 5 小题,满分 15 分)

1. 设随机变量 X 和 Y 独立,且均服从正态分布 $N(0,1)$,则下面错误的是(　　).

A. $\mathrm{Cov}(X+Y,X-Y)=0$　B. $\frac{(X+Y)^2}{(X-Y)^2}$ 服从 F 分布

C. $X+Y$ 和 $(X-Y)^2$ 独立　D. $(X+Y)^2+(X-Y)^2$ 服从 $\chi^2(1)$ 分布

2. 设 X 为连续型随机变量,方差存在,则对任意常数 C 和 ε,必有(　　).

A. $P(|X-C| \geqslant \varepsilon) \geqslant 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}$

B. $P(|X-C| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{E|X-C|^2}{\varepsilon^2}$

C. $P(|X-C| \geqslant \varepsilon) \geqslant \frac{1-E|X-C|^2}{\varepsilon^2}$

D. $P(|X-C| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{DX}{\varepsilon^2}$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

3. 下列函数可作为随机变量的概率密度函数的是(　　).

A. $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},x\in\mathbf{R}$　　B. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$

C. $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan x,x\in\mathbf{R}$　D. $f(x)=\frac{1}{1+x^2},x\in\mathbf{R}$

4. 设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样本,$\overline{X}$ 为样本均值,则 $E\overline{X}^2=$(　　).

A. $\frac{\lambda}{n}$　　B. λ^2

C. $\frac{\lambda}{n}+\lambda^2$　　D. $\frac{\lambda^2}{n}+\lambda$

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本,其中 $\overline{X}$ 为样本均值,S^2 为样本方差,S^{*2} 为样本的二阶中心矩,则(　　).

A. $\frac{\sqrt{n}(X_n-\mu)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}(X_i-\mu)^2}}\sim t(n-1)$　　B. $\frac{\overline{X}-\mu}{S^*}\sqrt{n-1}\sim t(n-1)$

C. $\frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)\sum_{i=1}^{2}X_i^2}{\sum_{i=3}^{n}X_i^2}\sim F(2,n-2)$　　D. $\frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n-1}\sim t(n-1)$

三、(9分) 假设有两箱同种零件,第一箱内装50件,其中有10件一等品;第二箱内装30件,其中有18件一等品.现从两箱中任挑一箱,然后从该箱中先后取出两个零件(不放回),试求:

(1) 先取出的零件是一等品的概率;

(2) 在先取出的零件是一等品的条件下,第二次取出的仍然是一等品的概率.

年　月　日

四、(9 分) 设总体 X 服从区间 $[1,\theta]$ 上的均匀分布，$\theta > 1$，X_1，$X_2,\cdots,X_n$ 是总体 X 的样本.

(1) 求统计量 $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 的概率密度函数；

(2) 求 $X_{(n)}$ 的期望和方差.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

五、(9 分) 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}xe^{-y}, & 0<x<y\\0, & \text{其他}\end{cases}$$

求：

(1)$M=\max(X,Y)$ 的概率密度；

(2)$Z=\max(X,Y)+\min(X,Y)$ 的概率密度；

(3)$P(X+Y<1)$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

六、(9 分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda^2 x e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中参数 $\lambda(\lambda>0)$ 未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求参数 λ 的矩估计量；

(2) 求参数 λ 的最大似然估计量.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

七、**(4分)** 设某商场在任意的$[t_0,t_0+t]$$(t>0)$的时间间隔内顾客人数$N(t)$服从参数为$\lambda t$的泊松分布，求：

(1) 相邻到来的两位顾客之间的等待时间X的分布(分布函数或者概率密度)；

(2) 已经一个小时没有顾客的情况下，接下来的一个小时仍然没有顾客光临的概率？

心得 体会 拓广 疑问

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

概率论与数理统计综合训练试题答案

概率论与数理统计综合训练试题(一)

一、1. $\frac{1}{4}$　2. $\frac{2}{3}$　3. $\begin{cases}\frac{1}{2y}, & \frac{1}{e}<y<e \\ 0, & 其他\end{cases}$　4. $\frac{5}{12}$　5. 0.95

二、1. B　2. C　3. C　4. B　5. C

三、解:令 $A_i=$"第 i 门炮中靶",$i=1,2,3$;$B=$"有两弹中靶",则

$$B=A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3$$

由事件独立性得

$$\begin{aligned}P(B)=&P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)+P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)+\\&P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3)=\\&0.4\times0.3\times0.5+0.4\times0.7\times0.5+\\&0.6\times0.3\times0.5=0.29\end{aligned}$$

$$P(A_1B)=P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)+P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)=$$
$$0.4\times0.3\times0.5+0.4\times0.7\times0.5=0.2$$

于是 $P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{20}{29}$.

四、解:设第 i 周的需求量为 X_i,$i=1,2$,则 X_1,X_2 独立同分布,其概率密度均为

$$f(t)=\begin{cases}te^{-t}, & t>0\\0, & t\leqslant0\end{cases}$$

则两周需求量 $Y=X_1+X_2$ 的概率密度为:

当 $Y>0$ 时

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)f(y-t)\mathrm{d}t=\int_0^y te^{-t}(y-t)e^{-(y-t)}\mathrm{d}t=\frac{y^3}{6}e^{-y}$$

于是

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{y^3}{6}e^{-y}, & y>0\\0, & y\leqslant0\end{cases}$$

五、解:(1) $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=2\times\frac{1}{3}+(B-1)A$

$$F(2)=P(X\leqslant2)=1-P(X>2)=1-(B-2)A=\frac{5}{6}$$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

所以 $A=\frac{1}{6}, B=3$.

$$(2)F(2,3)=P(X\leqslant 2,|X|\leqslant 3)=P(-3\leqslant X\leqslant 2)=$$
$$P(-2\leqslant X\leqslant 2)=$$
$$\int_{-2}^{0}\frac{1}{3}\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}\frac{1}{6}\mathrm{d}x=\frac{5}{6}$$

六、解:(1)$E(X)=\int_{1}^{\theta}x\cdot\frac{2\theta^2}{(\theta^2-1)x^3}\mathrm{d}x=\frac{2\theta}{\theta+1}$

$$\theta=\frac{E(X)}{2-E(X)}$$

所以矩估计 $\hat{\theta}=\frac{\overline{X}}{2-\overline{X}}$.

$$(2)L=f(x_1)\cdots f(x_n)=\frac{(2\theta^2)^n}{(\theta^2-1)^n(x_1\cdots x_n)^3}, x_1,\cdots,x_n\in(1,\theta)$$

$$\ln L=n\cdot\ln(2\theta^2)-n\cdot\ln(\theta^2-1)-3\cdot\ln(x_1\cdots x_n)$$

$$(\ln L)'_{\theta}=\frac{2n}{\theta}-\frac{2n\theta}{\theta^2-1}\neq 0$$

因为 $L=\left(\frac{2}{\theta^2-1}+2\right)^n\frac{1}{(x_1\cdots x_n)^3}$, θ 越小, L 越大. 所以最大似然估计 $\hat{\theta}=\max(x_1,\cdots,x_n)$.

七、证:设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且都服从 $N(0,1)$ 分布,则 $Y=\sum_{j=1}^{n}X_j^2\sim\chi^2(n)$,故 X,Y 同分布,得

$$E(X)=E(Y)=\sum_{j=1}^{n}E(X_j^2)=\sum_{j=1}^{n}D(X_j)=n$$

$$E(X)=D(Y)=\sum_{j=1}^{n}D(X_j^2)=\sum_{j=1}^{n}[E(X_j^4)-(E(X_j^2))^2]=$$
$$n\left[\int_{-\infty}^{+\infty}x^4\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x-1\right]=2n$$

概率论与数理统计综合训练试题(二)

一、1. $\frac{3}{8}$ 2. $1-\mathrm{e}^{-3}$ 3. $\begin{cases}\frac{1}{4}, & -1<y<1\\ \frac{1}{8}, & -5<y<-1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 4. $\frac{1}{6}$

5. (39.51,40.49)

二、1. A 2. B 3. C 4. B 5. A

三、解:设 A_i="其中恰有 i 个次品", $i=1,2$,则

$$P(A_1)=C_4^1\times 0.01\times 0.99^3=0.038\ 8$$
$$P(A_2)=C_4^2\times 0.01^2\times 0.99=0.000\ 6$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

四、解：$f_2(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x, f(x,z-x)=\begin{cases}\lambda^2 e^{-\lambda z}, & x<z<2x \\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$

当 $z<0, f_Z(z)=0$；

当 $z\geqslant 0, f_Z(z)=\int_{\frac{z}{2}}^{z}\lambda^2 e^{-\lambda z}\mathrm{d}x=\lambda(e^{-\frac{\lambda z}{2}}-e^{-\lambda z}).$

五、解：$E(XY)=P(X=1,Y=1)=\frac{5}{8}.$

(1) $P(X+Y\leqslant 1)=1-P(X+Y>1)=1-P(X=1,Y=1)=\frac{3}{8}.$

(2) $E(\max(X,Y))=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{5}{8}=\frac{7}{8}.$

Y \ X	0	1	
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	

六、解：设 Y 为三次射击中命中的次数，则 $Y\sim B(3,0.4)$，于是

$$P(X=0)=P(Y=0)=C_3^0\times(0.4)^0\times(0.6)^3=\frac{27}{125}$$

$$P(X=5)=P(Y=1)=C_3^1\times 0.4\times(0.6)^2=\frac{54}{125}$$

类似地可求出 X 的分布为

X	0	5	10	20
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

所以 X 的数学期望为

$$E(X)=0\times\frac{27}{125}+5\times\frac{54}{125}+10\times\frac{36}{125}+20\times\frac{8}{125}=6.32$$

七、解：(1) 参数 λ 的矩估计

$$\mu_1=E(X)=\int_0^{+\infty} x\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}x}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty} x\mathrm{d}(e^{-\frac{1}{\lambda}x})=$$

$$\left[-xe^{-\frac{1}{\lambda}x}\Big|_0^{+\infty}+(-\lambda)e^{-\frac{1}{\lambda}x}\Big|_0^{+\infty}\right]=\lambda$$

所以参数 λ 的矩估计 $\hat{\lambda}=\overline{X}$.

参数 λ 的最大似然估计：似然函数为

$$L(x_1,\cdots,x_n;\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}x_i}\right)=\frac{1}{\lambda^n}\exp\left\{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i\right\}$$

求对数

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$\ln L(\lambda) = -n\ln\lambda - \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

求导数，令其为零，得似然方程

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{n}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

解似然方程得

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

故参数 λ 的最大似然估计量为 $\hat{\lambda} = \bar{X}$.

(2) 因为 $E(\bar{X}) = E(X) = \lambda$，所以 $\hat{\lambda} = \bar{X}$ 是 λ 的无偏估计.

概率论与数理统计综合训练试题(三)

一、1. 0.8　2. $1-\mathrm{e}^{-2}$　3. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}$　4. -1　5. (4.804, 5.196)

二、1. A　2. A　3. A　4. C　5. C

三、解：B，W 表示从甲中取出的是黑球，白球的事件，S 表示放入乙袋的球与从乙袋取出的球同色

$$P(S) = P(B)P(S \mid B) + P(W)P(S \mid W) =$$

$$\frac{3}{5}\times\frac{3}{6} + \frac{2}{5}\times\frac{4}{6} = \frac{17}{30}$$

$$P(B \mid S) = \frac{P(BS)}{P(S)} = \frac{\frac{3}{5}\times\frac{3}{6}}{\frac{17}{30}} = \frac{9}{17}$$

四、解：(1) $1 = K\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x-3y}\mathrm{d}y = \frac{K}{6}$，$K = 6$.

(2) $P(X + 2Y \leqslant 1) = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\frac{1-x}{2}} 6\mathrm{e}^{-2x-3y}\mathrm{d}y = 3\mathrm{e}^{-2} - 4\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} + 1$.

五、解：$Y = |X|$ 的分布函数

$$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(|X| \leqslant y) = \begin{cases} P(\varnothing) = 0, & y < 0 \\ P(-y \leqslant X \leqslant y), & y \geqslant 0 \end{cases}$$

而当 $y \geqslant 0$ 时

$$F_Y(y) = P(-y \leqslant X \leqslant y) = \Phi(y) - \Phi(-y) = 2\Phi(y) - 1$$

所以 $Y = |X|$ 的分布函数

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 2\Phi(y) - 1, & y \geqslant 0 \end{cases}$$

从而 $Y = |X|$ 的概率密度

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant 0 \\ 2\varphi(y), & y > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & y \leqslant 0 \\ \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}, & y > 0 \end{cases}$$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

六、解：(1) 矩估计

$$\mu_1 = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x;\alpha)\mathrm{d}x = \int_0^1 (\alpha+1)x^{\alpha+1}\mathrm{d}x = \frac{\alpha+1}{\alpha+2}$$

解出 $\alpha = \dfrac{2\mu_1 - 1}{1-\mu_1}$，于是 α 的矩估计为 $\hat{\alpha} = \dfrac{2\bar{x}-1}{1-\bar{x}}$.

(2) 最大似然估计似然函数为

$$L(\alpha) = \prod_{i=1}^{n}(\alpha+1)x_i^{\alpha} = (\alpha+1)^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}$$

$$\ln L(\alpha) = n\ln(\alpha+1) + \sum_{i=1}^{n}\alpha \ln x_i$$

令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{n}{\alpha+1} + \sum_{i=1}^{n}\ln x_i = 0$$

得 α 的最大似然估计为 $\hat{\alpha} = -\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i} - 1$.

七、证：设 $Y \sim N(0,1)$，$Z \sim \chi^2(n)$，且 Y, Z 相互独立，则

$$W = \frac{Y}{\sqrt{\dfrac{Z}{n}}} \sim t(n)$$

故 X, W 同分布，从而 X^2 与 W^2 同分布，注意到 $Y^2 \sim \chi^2(1)$，Y^2, Z 相互独立，所以

$$W^2 = \frac{Y^2}{\dfrac{Z}{n}} \sim F(1,n)$$

可知 $X^2 \sim F(1,n)$.

概率论与数理统计综合训练试题(四)

一、1. $\dfrac{1}{2}$　2. $\dfrac{17}{25}$　3. $\dfrac{1}{8}$　4. $\geqslant 0.6$　5. $(4.412, 5.588)$

二、1. C　2. D　3. B　4. C　5. B

三、解：A_i = 第 i 次取到的是次品

$$P(A_3) = \frac{2}{10}$$

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3) = \frac{8}{10}\times\frac{7}{9}\times\frac{2}{8} = \frac{7}{45}$$

所以

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2 \mid A_3) = \frac{P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)}{P(A_3)} = \frac{7}{9}$$

四、解：$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y$，将

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & |y|\leqslant\pi\\ 0, & |y|>\pi\end{cases}$$

代入上式并作变量代换 $x=z-y$,得

$$f_Z(z)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}f_X(z-y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2\pi}\int_{z-\pi}^{z+\pi}f_X(x)\mathrm{d}x=$$

$$\frac{1}{2\pi}[F_X(z+\pi)-F_X(z-\pi)]=$$

$$\frac{1}{2\pi}\left[\Phi\left(\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

五、解:$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^2 x\,\frac{1}{8}(x+y)\mathrm{d}y=\frac{7}{6}$.

由密度函数中 x,y 对称性知 $E(Y)=E(X)=\frac{7}{6}$

$$E(XY)=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^2\frac{1}{8}xy(x+y)\mathrm{d}y=\frac{4}{3}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{4}{3}-\frac{49}{36}=-\frac{1}{36}$$

$$E(X^2)=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^2\frac{1}{8}x^2(x+y)\mathrm{d}y=\frac{5}{3}$$

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{5}{3}-\frac{49}{36}=\frac{11}{36}$$

$$D(Y)=D(X)=\frac{11}{36}$$

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}}=\frac{\frac{-1}{36}}{\frac{11}{36}}=-\frac{1}{11}$$

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{11}{36}+\frac{11}{36}-\frac{2}{36}=\frac{5}{9}$$

六、解:(1) 矩估计

$$\begin{cases}\mu_1=E(X)=\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}\\ \mu_2=E(X)^2=D(X)+[E(X)]^2=\dfrac{(\theta_2-\theta_1)^2}{12}+\mu_1^2\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}\theta_1+\theta_2=2\mu_1\\ \theta_2-\theta_1=2\sqrt{3(\mu_2-\mu_1^2)}\end{cases}$$

$$\theta_1=\mu_1-\sqrt{3(\mu_2-\mu_1^2)},\theta_2=\mu_1+\sqrt{3(\mu_2-\mu_1^2)}$$

于是 θ_1,θ_2 的矩估计为

$$\hat{\theta}_1=\overline{X}-\sqrt{3}S^*,\quad \hat{\theta}_2=\overline{X}+\sqrt{3}S^*$$

其中 $S^*=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$.

年 月 日

(2) 最大似然估计：X 的概率密度为

$$f(x;\theta_1,\theta_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta_2-\theta_1}, & \theta_1\leqslant x\leqslant\theta_2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

令

$$x_{(1)}=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\},x_{(n)}=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$$

则似然函数为

$$L=\begin{cases}\dfrac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n}, & \theta_1\leqslant x_{(1)}\leqslant x_{(n)}\leqslant\theta_2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

显然 $\theta_2-\theta_1$ 越小，L 越大. 但 $\theta_2-\theta_1\geqslant x_{(n)}-x_{(1)}$，所以 θ_1,θ_2 的最大似然估计分别为

$$\hat{\theta}_1=X_{(1)},\quad \hat{\theta}_2=X_{(n)}$$

七、解：$P=C_3^2\times0.1^2\times0.9+C_3^3\times0.1^3=0.028$.

$X\sim B(4,0.028)$.

$E(X)=0.112$.

概率论与数理统计综合训练试题(五)

一、1. 0.9　2. $\dfrac{1}{3}$　3. 1　4. $\dfrac{3}{2}$　5. 36

二、1. D　2. C　3. C　4. C　5. C

三、解：设 B＝“取出的一个球是白球”，再设 A_i＝“取到了第 i 箱”，$i=1,2,3$，则由全概率公式有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{6}+\frac{5}{8}\right)=\frac{53}{120}$$

四、解：(1) 因为 $1=F(+\infty,+\infty)=C-0-0+0$，所以 $C=1$.

(2) 先求边缘分布函数

$$F_X(x)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-0.5x}, & x\geqslant0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

$$F_Y(y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-0.5y}, & y\geqslant0\\ 0, & y<0\end{cases}$$

因为 $F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$，所以 X,Y 独立.

(3)
$$\begin{aligned}P(X>1,Y>1)&=P(X>1)P(Y>1)=\\&[1-P(X\leqslant1)][1-P(Y\leqslant1)]=\\&e^{-0.5}\times e^{-0.5}=e^{-1}\end{aligned}$$

五、解：(1)
$$E(Z)=\frac{1}{3}E(X)+\frac{1}{2}E(Y)=\frac{1}{3}$$

$$D(Z)=\frac{1}{9}D(X)+\frac{1}{4}D(Y)+2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\mathrm{Cov}(X,Y)=3$$

心得 体会 拓广 疑问

(2)$E(XZ)=E\left(\frac{X^2}{3}+\frac{XY}{2}\right)=$

$$\frac{1}{3}[D(X)+(E(X))^2]+\frac{1}{2}[\mathrm{Cov}(X,Y)+E(X)E(Y)]=$$

$$\frac{1}{3}\times(9+1)+\frac{1}{2}(\rho_{XY}\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}+0)=$$

$$\frac{10}{3}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times3\times4=\frac{1}{3}$$

于是 $\mathrm{Cov}(X,Z)=E(XZ)-E(X)E(Z)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0$

故 $\rho_{XZ}=0$.

六、解:(1)$E(X)=1,E(X^2)=1+2\theta$

$$\theta=\frac{1}{2}(E(X^2)-1)$$

$$\hat{\theta}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-1\right)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1^2\times4+2^2\times4}{10}-1\right)=\frac{1}{2}$$

(2)$L=P(X=0)^2\cdot P(X=0)^4\cdot P(X=2)^4=\theta^2(1-2\theta)^4\theta^4$

$$\ln L=6\ln\theta+4\ln(1-2\theta)$$

$$(\ln L)'_\theta=\frac{6}{\theta}+\frac{-8}{1-2\theta}=0,\ \hat{\theta}=\frac{3}{10}$$

七、解:令 $X_i=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 次开门能把门打开}\\ 0, & \text{第 } i \text{ 次开门不能把门打开}\end{cases}$ $(i=1,2,\cdots,n)$

$$P(X_i=1)=\frac{1}{n}$$

$$E(X_i)=\frac{1}{n}$$

开门次数 $X=X_1+2X_2+\cdots+nX_n$

$$E(X)=E(X_1+2X_2+\cdots+nX_n)=\frac{1}{n}(1+2+\cdots+n)=\frac{n+1}{2}$$

概率论与数理统计综合训练试题(六)

一、1. 0.45 2. $F(x)=\begin{cases}1-(2x^2+2x+1)e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$

3. $D(Y)=46$ 4. $\frac{5}{2\sqrt{13}}$ 5. (7.4,21.1)

二、1. D 2. A 3. D 4. C 5. D

三、解:设 A="零件是合格品";B_i="零件是第 i 台机床加工的",$i=1,2,3$,则

$$A=B_1A+B_2A$$

从而由全概率公式

年 月 日

$$P(A)=P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)=$$
$$\frac{2}{3}\times(1-0.03)+\frac{1}{3}\times(1-0.02)=\frac{73}{75}$$

四、解：设 Z 的分布函数为 $F_Z(z)$，则

$$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P(|X-Y|\leqslant z)=\iint\limits_{|x-y|\leqslant z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

当 $z\leqslant 0$ 时

$$F_Z(z)=0$$

当 $0<z<1$ 时

$$F_Z(z)=\iint\limits_{\substack{|x-y|\leqslant z\\ 0\leqslant x,y\leqslant 1}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1-(1-z)^2=2z-z^2$$

当 $z>1$ 时，$F_Z(z)=1$，所以

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0\\ 2z-z^2, & 0<z<1,\\ 1, & z\geqslant 1\end{cases}\quad f_Z(z)=\begin{cases}2-2z, & 0<z<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

五、解：(1) 设 $A=\{$他通过路考$\}$；$B_i=\{$他第 i 次通过路考$\}$，$i=1,2$

$$P(A)=P(B_1+\bar{B}_1B_2)=P(B_1)+P(\bar{B}_1)P(B_2\mid\bar{B}_1)=$$
$$p+(1-p)\frac{p}{2}=\frac{1}{2}p(3-p)$$

(2) $P(B_1\mid A)=\dfrac{P(AB_1)}{P(A)}=\dfrac{2}{3-p}$.

六、解：(1) 因为 X 与 Y 独立，所以

$$Z=X-Y\sim N(\mu-\mu,\sigma^2+2\sigma^2)=N(0,3\sigma^2)$$

故 Z 的概率密度为

$$f(z;\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{6\sigma^2}}, -\infty<z<+\infty$$

(2) 似然函数为

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(z_i;\sigma^2)=(6\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{6\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}z_i^2}$$

$$\ln L(\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(6\pi\sigma^2)-\frac{1}{6\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}(\sigma^2)}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{6\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}z_i^2=0$$

解得

$$\sigma^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}z_i^2$$

故 σ^2 的最大似然估计量为

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2$$

(3) 因

$$E\hat{\sigma}^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}EZ_i^2=\frac{1}{3}EZ^2=\frac{1}{3}DZ=\sigma^2$$

所以 $\hat{\sigma}^2$ 是 σ^2 的无偏估计量.

七、解:引进随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$,$X_i=\begin{cases}1, & 第\ i\ 堆恰成一副\\ 0, & 第\ i\ 堆没成一副\end{cases}$,$i=1,2,\cdots,n$,则有 $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$,且 $E(X)_i=P\{X_i=1\}=P\{$第 i 堆恰成一副$\}$

$$P\{第\ i\ 堆恰成一副\}=\frac{2n(2n-2)!}{(2n)!}=\frac{1}{2n-1}$$

故
$$E(X_i)=\frac{1}{2n-1},i=1,2,\cdots,n$$

$$E(X)=E(X_1)+\cdots+E(X_n)=\frac{n}{2n-1}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

其中

$$E(X^2)=E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)+\sum_{i,j=1}^{n}E(X_iX_j)$$

右端和式中分为两部分:

一部分 $i=j$ 对应的项,由于 X_i 只取 1,0,故 $X_i^2=X_i$,所以

$$E(X_i^2)=E(X_i)=\frac{1}{2n-1}$$

另一部分 $i\neq j$,因为 X_i,X_j 只取 1,0 两值

$$E(X_iX_j)=P\{X_i=1,X_j=1\},i\neq j$$

$$P(X_i=1,X_j=1)=\frac{2n(2n-2)(2n-4)!}{(2n)!}=\frac{1}{(2n-1)(2n-3)}$$

又因 $i\neq j$ 的项共有 $n(n-1)$ 个,因此

$$E(X^2)=\frac{n}{2n-1}+\frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)}$$

故
$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{4n(n-1)^2}{(2n-1)^2(2n-3)}$$

概率论与数理统计综合训练试题(七)

一、1. $\frac{19}{20}$ 2. $f_X(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ 3. $N(0,5)$ 4. $1-\frac{9}{\varepsilon^2}$

5. $(480.4,519.6)$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

二、1. B　2. D　3. C　4. D　5. C

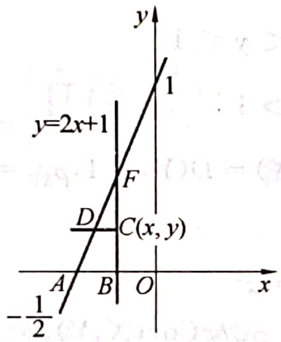
三、解：设 A = 挑选的人是色盲，B = 挑选的人是男人.

(1) $P(A)=P(B)P(A\mid B)+P(\overline{B})P(A\mid \overline{B})=$

$$\frac{1}{2}\times(0.05+0.002\,5)=0.026\,25.$$

(2) $P(B\mid \overline{A})=\dfrac{P(B)P(\overline{A}\mid B)}{1-P(A)}=\dfrac{\frac{1}{2}\times 0.95}{0.973\,75}=0.487\,8.$

四、解：(ξ,η) 的密度函数 $\varphi(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S(B)}, & (x,y)\in B\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，$S(B)$ 为区域 B 的面积，$S(B)=\dfrac{1}{4}$. 所以 $\varphi(x,y)=\begin{cases}4, & (x,y)\in B\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.



因为当 $x\leqslant -\dfrac{1}{2}$ 或 $y\leqslant 0$ 时，$\varphi(x,y)=0$，所以

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\varphi(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=0$$

因为当 $-\dfrac{1}{2}<x\leqslant 0$ 且 $0<y\leqslant 2x+1$ 时，$\varphi(x,y)=4S_{ABCD}$，又梯形

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\times(\text{上底}+\text{下底})\times\text{高}=\frac{1}{2}\left[\left(x-\frac{y-1}{2}\right)+\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]y=\frac{y}{2}\left(2x-\frac{y}{2}+1\right)$$

所以

$$F(x,y)=\int_{0}^{y}\mathrm{d}v\int_{\frac{y-1}{2}}^{x}4\,\mathrm{d}u=4S_{ABCD}=2y\left(2x-\frac{y}{2}+1\right)$$

所以当 $-\dfrac{1}{2}<x\leqslant 0$ 且 $y>2x+1$ 时，$\varphi(x,y)=4$，又

$$S_{\triangle FAB}=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x+1)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2}$$

所以 $F(x,y)=4\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^{2}=(2x+1)^{2}$.

因为当 $x>0$，且 $0<y\leqslant 1$ 时

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

$$F(x,y)=4S_{ABCD}=4\times\frac{1}{2}y\left(\frac{2-y}{2}\right)$$

所以 $F(x,y)=2y\left(1-\frac{y}{2}\right)$.

当 $x>0$ 且 $y>1$ 时

$$\varphi(x,y)=4,S=\frac{1}{4}$$

所以 $F(x,y)=1$

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x\leqslant-\frac{1}{2}\text{ 或 }y\leqslant 0\\ 2y\left(2x-\frac{y}{2}+1\right), & -\frac{1}{2}<x\leqslant 0\text{ 且 }0<y\leqslant 2x+1\\ (2x+1)^2, & -\frac{1}{2}<x\leqslant 0\text{ 且 }y>2x+1\\ 2y\left(1-\frac{y}{2}\right), & x>0\text{ 且 }0<y\leqslant 1\\ 1, & x>0\text{ 且 }y>1\end{cases}$$

五、解：由题意可知，$E(X)=E(Y)=0,D(X)=D(Y)=1,\rho_{XY}=\frac{1}{2}$，于是

$$DZ_1=D(aX)=a^2D(X)=a^2$$

$$DZ_2=D(bX+cY)=b^2D(X)+c^2D(Y)+2bc\mathrm{Cov}(X,Y)=$$

$$b^2+c^2+2bc\times1\times1\times\frac{1}{2}=b^2+c^2+bc$$

$$\mathrm{Cov}(Z_1,Z_2)=\mathrm{Cov}(aX,bX+cY)=ab\mathrm{Cov}(X,X)+ac\mathrm{Cov}(X,Y)=$$

$$ab+\frac{1}{2}ac$$

再由题意有 $a^2=1,b^2+c^2+bc=1,ab+\frac{1}{2}ac=0$，解得 $a=\pm1,b=\frac{1}{\sqrt{3}},c=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ 或 $a=\pm1,b=-\frac{1}{\sqrt{3}},c=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

六、解：设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，概率密度为 $f(x)$，再设 A_i 表示事件“产品取自第 i 盒”，$i=1,2,\cdots,n$，B 表示事件“$X\leqslant x(x\in R)$”，则

$$F(x)=P(X\leqslant x)=P(B)\xlongequal{\text{全概率公式}}\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)=$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}P(B\mid A_i)$$

而 $P(B\mid A_i)=P(X\leqslant x\mid A_i)=F_i(x)$，其中 $F_i(x)$ 为参数为 $\lambda_i(\lambda_i>0,i=1,2,\cdots,n)$ 的指数分布的分布函数. 因此

$$P(B\mid A_i)=F_i(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda_i x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

从而 X 的分布密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i e^{-\lambda_i x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

X 的数学期望

$$E(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{+\infty}x\lambda_i e^{-\lambda_i x}\,dx=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}$$

七、解：矩估计

$$\mu_1=E(X)=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}\,dx=\frac{\sqrt{2\pi}\,\theta}{2}$$

$\theta=\dfrac{2\mu_1}{\sqrt{2\pi}}$，用 $\overline{X}$ 估计 μ_1 得 $\hat{\theta}=\dfrac{2\overline{X}}{\sqrt{2\pi}}$ 为矩估计.

最大似然估计

$$L(\theta)=\begin{cases}\prod\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{x_i}{\theta^2}e^{-\frac{x_i^2}{2\theta^2}}\right), & x_i>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

在 $L(\theta)>0$ 时

$$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-2\ln\theta-\frac{x_i^2}{2\theta^2}=\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-2n\ln\theta-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}{2\theta^2}$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{2n}{\theta}+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}{\theta^3}\overset{令}{=}0$$

得 $\hat{\theta}=\sqrt{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}{2n}}$ 为最大似然估计.

概率论与数理统计综合训练试题(八)

一、1. $1-P$　2. $f_Y(y)=\begin{cases}0, & y<3\\ \left(\dfrac{y-3}{2}\right)^3 e^{-\left(\frac{y-3}{2}\right)^2}, & y\geqslant 3\end{cases}$　3. $\dfrac{7}{8}$

4. $\dfrac{11}{12}$　5. $(-1.8172, 4.2172)$

二、1. A　2. C　3. C　4. C　5. C

三、解：设 B=“取 4 次球，1 次出现白球，3 次出现黑球”，H_i=“罐子中有 i 个白球”($i=0,1,2,3,4,5$)，由古典概率得

$$P(H_0)=P(H_5)=\frac{1}{2^5},P(H_1)=P(H_4)=\frac{5}{2^5},P(H_2)=P(H_3)=\frac{10}{2^5}$$

由伯努利公式

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

$$P(B\mid H_0)=0,P(B\mid H_1)=C_4^1\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^3$$

$$P(B\mid H_2)=C_4^2\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^3,P(B\mid H_3)=C_4^1\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^3$$

$$P(B\mid H_4)=C_4^1\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^3,P(B\mid H_5)=0$$

由全概率公式

$$P(B)=\sum_{i=0}^{5}P(H_i)P(B\mid H_i)=\frac{5}{32}C_4^1\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^3+\frac{10}{32}C_4^1\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^3+$$

$$\frac{10}{32}C_4^1\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^3+\frac{5}{32}C_4^1\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^3=0.224$$

由贝叶斯公式

$$P(H_0\mid B)=0,P(H_1\mid B)=0.185\ 7$$

$$P(H_2\mid B)=0.482\ 1,P(H_3\mid B)=0.214\ 3$$

$$P(H_4\mid B)=0.017\ 9,P(H_5\mid B)=0$$

四、解：(1) 当 $x\geqslant 0$ 时

$$f_X(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{12}e^{-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}}dy=\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}$$

所以

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}, & x\geqslant 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

当 $y\geqslant 0$ 时 $f_Y(y)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{12}e^{-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}}dx=\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}$，所以

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-\frac{y}{4}}, & y\geqslant 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

由于 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，故 X 与 Y 相互独立.

(2) 由于 X 与 Y 相互独立，故可利用卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=\begin{cases}\int_0^{+\infty}\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}\frac{1}{4}e^{-\frac{z-x}{4}}dx, & z\geqslant 0\\ 0, & z<0\end{cases}=$$

$$\begin{cases}e^{-\frac{z}{4}}-e^{-\frac{z}{3}}, & z\geqslant 0\\ 0, & z<0\end{cases}$$

五、解：(1) $y\leqslant 1,F_Y(y)=0$

$y\geqslant 2,F_Y(y)=1$

$1<y<2$

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(X^2+1\leqslant y)=P(-\sqrt{y-1}\leqslant X\leqslant\sqrt{y-1})=$$

$$F_X(\sqrt{y-1})-F_X(-\sqrt{y-1})$$

$$F'_Y(y)=f_X(\sqrt{y-1})\frac{1}{2\sqrt{y-1}}+f_X(-\sqrt{y-1})\frac{1}{2\sqrt{y-1}}=$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$\frac{1}{\sqrt{y-1}}-1$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{y-1}}-1, & 1<y<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(2)$E(X^2+1)=E(X^2)+1=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x^2(1-x)\mathrm{d}x+1=$

$\frac{1}{6}+1=\frac{7}{6}$

六、解:设 X 为 10 000 个投保人出险人数,则 $x\sim B(10^4,p)$.

(1) 已知 $P(X\geqslant 1)=1-0.999^{10^4}$,则

$$P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)=1-(1-p)^{10^4}=1-0.999^{10^4}$$

所以 $1-p=0.999$,从而 $p=0.001$.

(2) 设每位投保人交纳的保费为 a 元,Y 为所得盈利,则

$$Y=10\,000a-(10\,000X+50\,000)$$

$$E(Y)=10\,000a-10\,000E(X)-50\,000=$$
$$10^4a-10^4\times10^4\times10^{-3}-5\times10^4=$$
$$10^4(a-15)\geqslant 0$$

$a\geqslant 15$,所以每位投保人应交纳的最低保费是 15 元.

七、解:(1) 总体 X 的分布函数

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\leqslant\theta\end{cases}$$

(2) 统计量 $\hat\theta$ 分布函数

$$F_{\hat\theta}(x)=P(\hat\theta\leqslant x)=P(\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)\leqslant x)=$$
$$1-P(\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)>x)=$$
$$1-P(X_1>x,X_2>x,\cdots,X_n>x)=$$
$$1-P(X_1>x)P(X_2>x)\cdots P(X_n>x)=$$
$$1-[1-F(x)]^n=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2n(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\leqslant\theta\end{cases}$$

(3)$\hat\theta$ 的概率密度为

$$f_{\hat\theta}(x)=F'_{\hat\theta}(x)=\begin{cases}2n\mathrm{e}^{-2n(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\leqslant\theta\end{cases}$$

因为

$$E\hat\theta=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{\hat\theta}(x)\mathrm{d}x=\int_{\theta}^{+\infty}2nx\mathrm{e}^{-2n(x-\theta)}\mathrm{d}x=$$
$$\int_{\theta}^{+\infty}2n(x-\theta)\mathrm{e}^{-2n(x-\theta)}\mathrm{d}x+\theta\int_{\theta}^{+\infty}2n\mathrm{e}^{-2n(x-\theta)}\mathrm{d}x=$$
$$\frac{1}{2n}+\theta\neq\theta$$

所以 $\hat\theta$ 作为 θ 的估计量不具有无偏性.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

概率论与数理统计综合训练试题(九)

一、1. $1-p-q$　2. $\dfrac{2e^y}{\pi(1+e^{2y})}$　3. $\dfrac{1}{3}$　4. $1-e^{-4}$　5. (0.833 5，0.834 5)

二、1. C　2. B　3. B　4. B　5. D

三、解：记 $A_i=\{$抽到第 i 箱$\}(i=1,2)$；$B_i=\{$第 i 次抽到一等品$\}(i=1,2)$. 依提意，要求 $P(B_2 \mid B_1)$

$$P(B_1)=P(B_1A_1 \cup B_1A_2)=P(A_1)P(B_1 \mid A_1)+P(A_1)P(B_1 \mid A_2)=$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{10}{50}+\frac{1}{2}\times\frac{12}{30}=\frac{3}{10}$$

$$P(B_1B_2)=P(B_1B_2 \mid A_1)+P(A_2)P(B_1B_2 \mid A_2)=$$

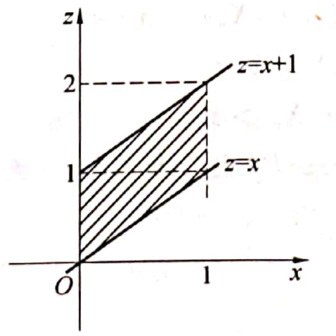
$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{10}{50}\right)^2+\frac{1}{2}\times\left(\frac{12}{30}\right)^2=\frac{1}{10}$$

故
$$P(B_2 \mid B_1)=\frac{P(B_1B_2)}{P(B_1)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}}=\frac{1}{3}$$

四、解
$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x$$

若 $f(x,z-x)>0$，必有

$$\begin{cases}0<x<1\\0<z-x<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<x<1\\x<z<x+1\end{cases}$$



$$f(x,z-x)=\begin{cases}4x(z-x), & 0<z<1,0<x<z\\4x(z-x), & 1\leqslant z<2,z-1<x<1\\0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}z^3, & 0<z<1\\-\dfrac{2}{3}z^3+4z-\dfrac{8}{3}, & 1\leqslant z<2\\0, & \text{其他}\end{cases}$$

五、解：(1) $P(X=2Y)=P(X=0,Y=0)+P(X=2,Y=1)=\dfrac{1}{4}$.

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

(2) $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)=\mathrm{Cov}(X,Y)-\mathrm{Cov}(Y,Y)=\mathrm{Cov}(X,Y)-DY$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=\left(1\cdot 1\cdot \frac{1}{3}+2\cdot 2\cdot \frac{1}{12}\right)-\frac{2}{3}\cdot 1=0$$

$$EY=1, EY^2=\frac{5}{3}, DY=EY^2-(EY)^2=\frac{2}{3}$$

故

$$\mathrm{Cov}(X-Y,Y)=0-DY=-\frac{2}{3}$$

(3) $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=0.$

六、解：(1) 似然函数

$$L(\alpha^2)=\left(\frac{4}{\sqrt{\pi}\alpha^3}\right)^n\prod_{i=1}^n x_i^2 e^{-\frac{1}{\alpha^2}\sum_{i=1}^n x_i^2}, x_i>0, i=1,2,\cdots,n$$

$$\ln L(\alpha^2)=n\ln\left(\frac{4}{\sqrt{\pi}}\right)-\frac{3n}{2}\ln\alpha^2+\sum_{i=1}^n\ln x_i^2-\frac{1}{\alpha^2}\sum_{i=1}^n x_i^2$$

令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\alpha^2)}{\mathrm{d}(\alpha^2)}=-\frac{3n}{2}\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^4}\sum_{i=1}^n x_i^2=0$$

解得 $\hat{\alpha}^2=\dfrac{2}{3n}\sum_{i=1}^n X_i^2$.

(2) $E(\hat{\alpha}^2)=\dfrac{2}{3n}\sum_{i=1}^n E(X_i^2)=\dfrac{2}{3}E(X_1^2)=\dfrac{2}{3}\int_0^{+\infty}\dfrac{4}{\sqrt{\pi}\alpha^3}x^4 e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}\mathrm{d}x=$

$\dfrac{2}{3}\times\dfrac{4\alpha^2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}t^4 e^{-t^2}\mathrm{d}t=\alpha^2$

所以 $\hat{\alpha}^2$ 是 α^2 的无偏估计量.

七、解：因为 $P(X>90)=\dfrac{12}{526}\approx 0.022\ 8$

$$P(X\leqslant 90)=0.977\ 2$$

又因为

$$P(X<60)=\frac{84}{526}\approx 0.159\ 2$$

所以

$$P(X\leqslant 90)=\Phi\left(\frac{90-\mu}{\sigma}\right)=0.977\ 2$$

$$P(X<60)=\Phi\left(\frac{60-\mu}{\sigma}\right)=0.159\ 7$$

查表：$\dfrac{90-\mu}{\sigma}\approx 2.0$，$\dfrac{60-\mu}{\sigma}\approx -1.0$. 解得 $\sigma=10$，$\mu=70$，所以 $X\sim N(70,10^2)$.

已知录用率为 $\dfrac{155}{526}\approx 0.294\ 7$，因为

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$P(X>78)=1-\Phi\left(\frac{78-70}{10}\right)=1-\Phi(0.8)=1-0.7881=0.2119$$

因为 $0.2119<0.2947$,所以此人在被录用之列.

概率论与数理统计综合训练试题(十)

一、1. $\frac{1}{6}$ 2. $\frac{(a-2b)^2}{a^2}$ 3. $\frac{147}{512}$ 4. $\geqslant 0.73$ 5. -0.02

二、1. A 2. B 3. B 4. C 5. C

三、解:设 $A=\{$最后取出白球$\}$;$B_i=\{$从第 i 个盒子中取出白球$\}$,$i=1,2$.

(1) $P(A)=(B_1B_2)P(A\mid B_1B_2)+P(B_1\overline{B_2})P(A\mid B_1\overline{B_2})+P(\overline{B_1}B_2)P(A\mid\overline{B_1}B_2)=\frac{9}{20}$.

(2) $P(B_1\mid A)=\frac{P(B_1A)}{P(A)}=\frac{13}{15}$.

四、解:设 $F_Y(y)$ 为 Y 的分布函数,则由全概率公式知 $U=X+Y$ 的分布函数为

$$\begin{aligned}G_U(u)=P(U\leqslant u)=P(X+Y\leqslant u)=&\\ 0.3P(X+Y\leqslant u\mid X=1)+0.7P(X+Y\leqslant u\mid X=2)=&\\ 0.3P(Y\leqslant u-1\mid X=1)+0.7P(Y\leqslant u-2\mid X=2)&\end{aligned}$$

由 X 与 Y 相互独立,可见

$$\begin{aligned}G_U(u)=0.3P(Y\leqslant u-1\mid X=1)+0.7P(Y\leqslant u-2\mid X=2)=&\\ 0.3F_Y(u-1)+0.7F_Y(u-2)&\end{aligned}$$

由此,得 $U=X+Y$ 的概率密度

$$\begin{aligned}g(u)=G'_U(u)=0.3F'_Y(u-1)\times 1+0.7F'_Y(u-2)\times 1=&\\ 0.3f_Y(u-1)+0.7f_Y(u-2)&\end{aligned}$$

五、解:(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_x^{+\infty}xe^{-y}\mathrm{d}y, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}=\begin{cases}xe^{-x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$.

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^y xe^{-y}\mathrm{d}x, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}y^2e^{-y}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}.$$

(2) $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=$

$$\begin{cases}0, & x\leqslant 0 \text{ 或 } y\leqslant 0\\ \int_0^y\mathrm{d}v\int_0^v ue^{-v}\mathrm{d}u, & 0<y<x<+\infty\\ \int_0^x\mathrm{d}u\int_u^y ue^{-v}\mathrm{d}v, & 0<x<y<+\infty\end{cases}=$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$\begin{cases}0, & x\leqslant 0 \text{ 或 } y\leqslant 0\\ 1-\left(\frac{1}{2}y^2+y+1\right)e^{-y}, & 0<y<x<+\infty\\ 1-(x+1)e^{-x}-\frac{1}{2}x^2e^{-y}, & 0<x<y<+\infty\end{cases}$$

(3) $P(X+Y\leqslant 1)=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}xe^{-y}dy=1-e^{-\frac{1}{2}}-e^{-1}$.

六、解：(1) 矩估计

$$E(X)=\int_{\theta-\frac{1}{2}}^{\theta+\frac{1}{2}}x\,dx=\frac{1}{2}x^2\Big|_{\theta-\frac{1}{2}}^{\theta+\frac{1}{2}}=\theta$$
$$\overline{X}=E(X)=\theta$$

$\hat{\theta}_1=\overline{X}$ 为矩估计.

(2) 最大似然估计：似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\begin{cases}1, & \theta-\frac{1}{2}\leqslant x_1,\cdots,x_n\leqslant\theta+\frac{1}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=$$

$$\begin{cases}1, & \theta-\frac{1}{2}\leqslant\min(x_1,\cdots,x_n)\leqslant x_1,\cdots,x_n\leqslant\max(x_1,\cdots,x_n)\leqslant\theta+\frac{1}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

记 $X_1^*=\min(X_1,\cdots,X_n)$，$X_n^*=\max(X_1,\cdots,X_n)$. 由最大似然估计定义，得

$$\begin{cases}\hat{\theta}-\frac{1}{2}=X_1^*\\ \hat{\theta}+\frac{1}{2}=X_n^*\end{cases}$$

所以 $\hat{\theta}_2=\frac{1}{2}[X_1^*+X_n^*]$.

(2) $E(\hat{\theta}_1)=E(\overline{X})=E(X)=\theta$，$\hat{\theta}_1$ 为 θ 的无偏估计

$$f_{x_1^*}(x)=\begin{cases}n\left(\frac{1}{2}+\theta-x\right)^{n-1}, & \theta-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\theta+\frac{1}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_{x_n^*}(x)=\begin{cases}n\left(x+\frac{1}{2}-\theta\right)^{n-1}, & \theta-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\theta+\frac{1}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$E(X_1^*)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{x_1^*}(x)dx=\int_{\theta-\frac{1}{2}}^{\theta+\frac{1}{2}}xn\left(\frac{1}{2}+\theta-x\right)^{n-1}dx=$$
$$\theta-\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}$$

$$E(X_n^*)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{x_n^*}(x)dx=\int_{\theta-\frac{1}{2}}^{\theta+\frac{1}{2}}x_n\left(x+\frac{1}{2}-\theta\right)^{n-1}dx=$$
$$\theta+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

所以

$$E\left(\frac{X_1^*+X_n^*}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\theta-\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}+\theta+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)=\theta$$

故$\frac{1}{2}[\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}X_i+\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}X_i]$也是$\theta$的无偏估计.

七、解 $P(Y=m)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(X=i)P(Y=m\mid X=i)=$

$$\sum_{i=1}^{m-1}P(X=i)P(Y=m\mid X=i)+$$

$$\sum_{i=m}^{n}P(X=i)P(Y=m\mid X=i)=$$

$$\sum_{i=m}^{n}\frac{1}{n}\times\frac{1}{i},m=1,2,\cdots,n$$

$$E(Y)=\sum_{m=1}^{n}mP(Y=m)=\sum_{m=1}^{n}m\left(\frac{1}{n}\sum_{i=m}^{n}\frac{1}{i}\right)=$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{i}\left(\sum_{m=1}^{i}m\right)\right]=\frac{n+3}{4}$$

概率论与数理统计综合训练试题(十一)

一、1. $\frac{4}{15}$ 2. $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y\ln 10}e^{-\frac{(\ln y-\mu\ln 10)^2}{2(\sigma\ln 10)^2}}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$ 3. $\frac{25}{16}$

4. $\frac{1}{2}$ 5. (7.4,21.1)

二、1. C 2. B 3. A 4. A 5. D

三、解:(1)$P\{Y=m\mid X=n\}=C_n^m p^m(1-p)^{n-m},0\leqslant m\leqslant n,n=0,1,2,\cdots$.

(2)$P(X=n,Y=m)=P(X=n)P(Y=m\mid X=n)=\frac{\lambda^n}{n!}e^{\lambda}C_n^m p^m\cdot(1-p)^{n-m},0\leqslant m\leqslant n,n=0,1,2,\cdots$.

四、解 $F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P(X-Y\leqslant z)$

当$z>0$时

$$F_Z(z)=\int_0^z dx\int_0^{+\infty}e^{-(x+y)}dy+\int_z^{+\infty}dx\int_{x-z}^{+\infty}e^{-(x+y)}dy=$$

$$\int_0^z e^{-x}dx\int_0^{+\infty}e^{-y}dy+\int_z^{+\infty}e^{-x}dx\int_{x-z}^{+\infty}e^{-y}dy=$$

$$1-e^{-z}+e^{z}\int_z^{+\infty}e^{-2x}dx=1-e^{-z}+\frac{1}{2}e^{-z}=$$

$$1-\frac{1}{2}e^{-z}$$

当$z\leqslant 0$时

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$F_Z(z)=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{x-z}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^z\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^z$$

所以

$$F_Z(z)=\begin{cases}1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-z}, & z>0\\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^z, & z\leqslant 0\end{cases}$$

所以

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-z}, & z>0\\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^z, & z\leqslant 0\end{cases}$$

五、解：三角形区域 $G=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,x+y\geqslant 1\}$，随机变量 X 和 Y 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 若(x,y)\in G\\ 0, & 若(x,y)\notin G\end{cases}$$

以 $f_1(x)$ 表示 X 的概率密度，则当 $x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 1$ 时，$f_1(x)=0$；当 $0<x<1$ 时，有

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{1-x}^{1}2\mathrm{d}y=2x$$

所以

$$E(X)=\int_0^1 2x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3},\quad E(X^2)=\int_0^1 2x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$$

同理可得

$$E(Y)=\frac{2}{3},\quad D(Y)=\frac{1}{18}$$

$$E(XY)=\iint_G 2xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_{1-x}^1 y\mathrm{d}y=\frac{5}{12}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=\frac{5}{12}-\frac{4}{9}=-\frac{1}{36}$$

于是

$$D(V)=D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{1}{18}+\frac{1}{18}-\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

六、解：设 $X_1,\cdots,X_n$ 为取的点，则它们相互独立同分布 $U(0,1)$

$$X=\max\{X_1,\cdots,X_n\}-\min\{X_1,\cdots,X_n\}$$

$$F_{\max}(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ x^n, & 0<x<1\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases},F_{\min}(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ 1-(1-x)^n, & 0<x<1\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}$$

$$f_{\max}(x)=\begin{cases}nx^{n-1}, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases},f_{\min}(x)=\begin{cases}n(1-x)^{n-1}, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

年 月 日

$$E_{\max}=\int_0^1 nx^n\mathrm{d}x=\frac{n}{n+1},E_{\min}=\int_0^1 n(1-x)^{n-1}x\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}$$

$$E(X)=E_{\max}-E_{\min}=\frac{n-1}{n+1}$$

七、解：(1) $L(X_1,\cdots,X_n;\theta_1,\theta_2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta_2}e^{-\frac{x_i-\theta_1}{\theta_2}},x_i\geqslant\theta_1,i=1,2,\cdots,n$

$$\ln L=-n\ln\theta_2-\frac{1}{\theta_2}(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\theta_1)$$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\theta_1}=\frac{n}{\theta_2}\neq 0$$

由最大似然估计的定义，得 θ_1 的最大似然估计为

$$\hat{\theta}_1=x_{(1)}$$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\theta_2}=-\frac{n}{\theta_2}+\frac{1}{\theta_2^2}(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\theta_1)=0$$

解似然方程得 θ_2 的最大似然估计

$$\hat{\theta}_2=\bar{x}-x_{(1)}$$

(2)

$$\mu_1=E(X)=\theta_1+\theta_2$$

$$\mu_2=E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=\theta_2^2+(\theta_1+\theta_2)^2$$

解方程组 $\begin{cases}\mu_1=\theta_1+\theta_2\\ \mu_2=\theta_2^2+(\theta_1+\theta_2)^2\end{cases}$，得

$$\theta_2^2=\mu_2-\mu_1^2,\theta_1=\mu_1-\sqrt{\mu_2-\mu_1^2}$$

故 θ_1,θ_2 的矩估计为

$$\hat{\theta}_1=\bar{X}-S^*,\hat{\theta}_2=\sqrt{S^{*2}}=S^*$$

其中

$$S^*=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$$

概率论与数理统计综合训练试题(十二)

一、1. 0.7　2. $f_Y(y)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$　3. 6　4. $\frac{1}{162}$

5. (2.690, 2.720)

二、1. D　2. B　3. B　4. C　5. D

三、解：设两次比赛为一轮，$A_i=\{$在一轮比赛中甲得 i 分$\}$，$i=0,1,2$，$B=\{$甲获胜$\}$. 又因为若甲在一轮比赛中得一分，则与下轮比赛中是否获胜无任何关系，即

$$P(B\mid A_1)=P(B)\text{ 且 }P(B\mid A_0)=0,P(B\mid A_2)=1$$

又有

心得 体会 拓广 疑问

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

$$P(A_0)=\beta^2,P(A_1)=\alpha\beta+\beta\alpha=2\alpha\beta,P(A_2)=\alpha^2$$

由全概率公式

$$P(B)=\sum_{i=0}^{2}P(A_i)P(B\mid A_i)=0+P(B)2\alpha\beta+\alpha^2\times 1$$

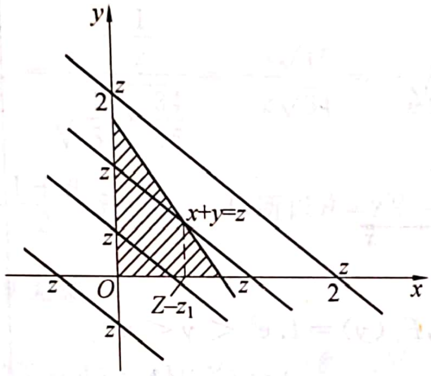
所以

$$P(B)=\frac{\alpha^2}{1-2\alpha\beta}$$

同理
$$P(\bar{B})=\frac{\beta^2}{1-2\alpha\beta}$$

四、解:解法 1. 如图所示,因为

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}=\iint\limits_{x+y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



当 $z<0$ 时,$F_Z(z)=0$.

当 $0\leqslant z<1$ 时

$$F_Z(z)=\int_0^z\mathrm{d}x\int_0^{z-x}1\mathrm{d}y=\int_0^z(z-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}z^2$$

当 $1\leqslant z<2$ 时

$$F_Z(z)=\int_0^{2-z}\mathrm{d}x\int_0^{z-x}\mathrm{d}y+\int_{2-z}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{2(1-x)}\mathrm{d}y=$$

$$z(2-z)-\frac{1}{2}(2-z)^2+(z-1)^2$$

当 $z\geqslant 2$ 时,$F_Z(z)=1$.

所以 $Z=X+Y$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \frac{1}{2}z^2, & 0\leqslant z<1\\ z(2-z)-\frac{1}{2}(2-z)^2+(z-1)^2, & 1\leqslant z<2\\ 1, & z\geqslant 2\end{cases}$$

从而 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=F'_Z(z)=\begin{cases}z, & 0\leqslant z<1\\ 2-z, & 1\leqslant z<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

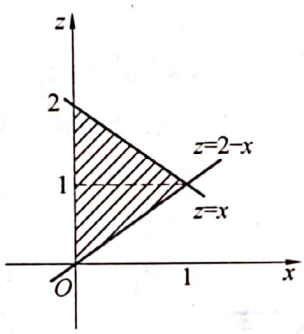
年 月 日

解法 2. 如图所示，$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x$. 若 $f(x,z-x)>0$，必有

$$\begin{cases}0<x<1\\0<z-x<2-2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<x<1\\x<z<2-x\end{cases}$$

$$f(x,z-x)=\begin{cases}1, & 0<z<1,0<x<z\\1, & 1\leqslant z<2,0<x<2-z\\0, & 其他\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}z, & 0<z<1\\2-z, & 1\leqslant z<2\\0, & 其他\end{cases}$$



五、解：(1) $y\leqslant e^2$，$F_Y(y)=0$；$y\geqslant e^4$，$F_Y(y)=1$. $e^2<y<e^4$

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(e^{2X}\leqslant y)=P\left(X\leqslant\frac{1}{2}\ln y\right)=F_X\left(\frac{1}{2}\ln y\right)$$

$$F'_Y(y)=f_X\left(\frac{1}{2}\ln y\right)\cdot\frac{1}{2y}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2y}, & e^2<y<e^4\\0, & 其他\end{cases}$$

(2) $Ee^{2X}=\int_1^2 e^{2x}\times 1\mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_1^2=\frac{1}{2}(e^4-e^2)$.

六、解：(1) 分布函数法：

当 $y<-2$ 时，$F_Y(y)=0$；

当 $-2\leqslant y<1$ 时，$F_Y(y)=\sqrt{3+y}-1$；

当 $y\geqslant 1$ 时，$F_Y(y)=1$.

故
$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{3+y}}, & -2\leqslant y<1\\0, & 其他\end{cases}$$

解密度函数法：

因为 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，函数 $y=x^2-4x+1$ 为单调函数

$$h(y)=2-(y+3)^{\frac{1}{2}}，|h'(y)|=\frac{1}{2}(y+3)^{-\frac{1}{2}}$$

心得 体会 拓广 疑问

故 $$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{3+y}}, & -2\leqslant y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(2) $\text{Cov}(2X,Y)=2\text{Cov}(X,Y)=2(E(X^3-4X^2+X)-E(X)E(X^2-4X+1))=-\dfrac{1}{2}$

$$E(Y)=-\frac{2}{3},D(X)=\frac{1}{12},D(2X)=4\times\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$$

$$E(Y^2)=\int_{-2}^{1}\frac{y^2}{2\sqrt{3+y}}\mathrm{d}y=\frac{31}{5}-5$$

$$D(Y)=\frac{34}{45}$$

$$\rho_{2X,Y}=\frac{-\dfrac{1}{2}}{\sqrt{\dfrac{1}{3}\times\dfrac{34}{45}}}=-\frac{3\sqrt{15}}{2\sqrt{34}}=-\sqrt{\frac{135}{136}}$$

七、解：(1) $\mu_1=\dfrac{1+\theta}{2},\theta=2\mu_1-1$，所以 $\hat{\theta}=2\overline{X}-1$. $E(\hat{\theta})=2E(\overline{X})-1=2\times\dfrac{\theta+1}{2}-1=\theta$ 无偏.

(2) $D(\hat{\theta})=D(2\overline{X}-1)=4D(\overline{X})=4\dfrac{(\theta-1)^2}{12n}=\dfrac{(\theta-1)^2}{3n}$.

概率论与数理统计综合训练试题(十三)

一、1. $\dfrac{6}{7}$（答案：$A=$"至少有一个女孩"，$B=$"至少有一个男孩"，$P(A)=\dfrac{7}{8}=P(B),P(AB)=\dfrac{6}{8};P(B\mid A)=\dfrac{6}{7}$） 2. $y\mathrm{e}^{-y}$ 3. 0.6 4. $\dfrac{5}{8}$ 5. (1.042, 1.058)

二、1. A 2. C 3. D 4. C 5. B

三、解：设 $A_i=\{$有 i 个零件出故障$\}$，$i=1,2,3$；$B=\{$仪器不能正常工作$\}$；$C_i=\{$第 i 个零件出故障$\}$，$i=1,2,3$，则由贝叶斯公式得

$$P(A_2\mid B)=\frac{P(A_2)P(B\mid A_2)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)}$$

而 $$P(A_1)=P(C_1\overline{C}_2\overline{C}_3)+P(\overline{C}_1C_2\overline{C}_3)+P(\overline{C}_1\overline{C}_2C_3)=$$
$$P(C_1)P(\overline{C}_2)P(\overline{C}_3)+P(\overline{C}_1)P(C_2)P(\overline{C}_3)+$$
$$P(\overline{C}_1)P(\overline{C}_2)P(C_3)=$$
$$0.2\times0.6\times0.4+0.8\times0.4\times0.4+0.8\times0.6\times0.6=$$
$$0.464$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$P(A_2)=P(C_1C_2\overline{C}_3)+P(C_1\overline{C}_2C_3)+P(\overline{C}_1C_2C_3)=$$
$$P(C_1)P(C_2)P(\overline{C}_3)+P(C_1)P(\overline{C}_2)P(C_3)+$$
$$P(\overline{C}_1)P(C_2)P(C_3)=$$
$$0.2\times0.4\times0.4+0.2\times0.6\times0.6+0.8\times0.4\times0.6=$$
$$0.296$$

$$P(A_3)=P(C_1C_2C_3)=P(C_1)P(C_2)P(C_3)=0.2\times0.4\times0.6=0.048$$

所以

$$P(A_2\mid B)=\frac{0.296\times0.65}{0.464\times0.3+0.296\times0.65+0.048\times0.85}=0.516\ 6$$

四、解：解法 1.

$$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P(2X-Y\leqslant z)=\iint\limits_{2x-y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

当 $z\leqslant0$ 时

$$F_Z(z)=0$$

当 $z\geqslant2$ 时

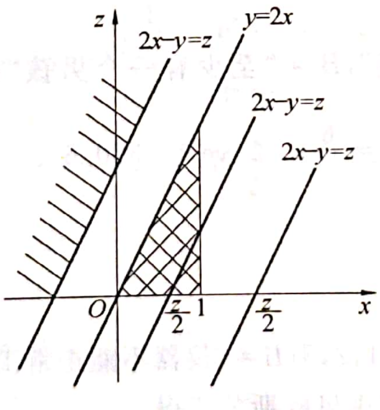
$$F_Z(z)=1$$

当 $0<z<2$ 时

$$F_Z(z)=1-\int_{\frac{z}{2}}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{2x-z}\mathrm{d}y=z-\frac{z^2}{4}$$

故

$$f_Z(z)=F'_Z(z)=\begin{cases}1-\dfrac{z}{2}, & 0<z<2\\ 0, & 其他\end{cases}$$



解法 2.

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,2x-z)\mathrm{d}x$$

$$f(x,2x-z)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<z<2x\\ 0, & 其他\end{cases}$$

当 $z\leqslant0$ 或 $z\geqslant2$ 时，$f_Z(z)=0$.

当 $0<z<2$ 时

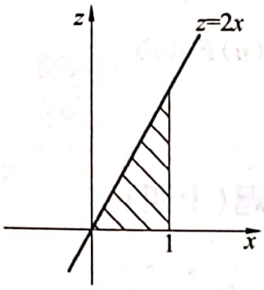
$$f_Z(z)=\int_{\frac{z}{2}}^{1}\mathrm{d}x=1-\frac{z}{2}$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

故

$$f_Z(z)=\begin{cases}1-\dfrac{z}{2}, & 0<z<2\\ 0, & 其他\end{cases}$$



五、解：(1) $X=1,2,\cdots,m-1$

$$P(x=1)=\frac{2}{m},P(x=2)=\frac{m-2}{m}\times\frac{2}{m-1},\cdots$$

$$P(x=k)=\frac{2(m-k)}{m(m-1)},\quad k=1,2,\cdots,m-1$$

(2) $$E(X)=\sum_{k=1}^{m-1}k\frac{2(m-k)}{m(m-1)}=\frac{2}{m(m-1)}\sum_{k=1}^{m-1}(mk-k^2)=\frac{m+1}{3},$$

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{m-1}k^2\frac{2(m-k)}{m(m-1)}=\frac{2}{m(m-1)}\sum_{k=1}^{m-1}(mk^2-k^3)=$$

$$\frac{1}{6}m(m+1).$$

六、解：矩估计 $E(X)=kp$

$$D(X)=kp(1-p)$$

用 $\overline{X}$ 估计 $E(X)$，$S^{*2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2$ 来估计 $D(X)$，得

$$\hat{p}=1-\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\overline{X}},\hat{k}=\frac{\overline{X}}{\hat{p}}$$

再求最大似然估计

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n}p(X_i=x_i)=\prod_{i=1}^{n}C_k^{x_i}p^{x_i}(1-p)^{k-x_i}=$$

$$(\prod_{i=1}^{n}C_k^{x_i})p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{nk-\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

$$\ln L(p)=\ln(\prod_{i=1}^{n}C_k^{x_i})+(\sum_{i=1}^{n}x_i)\ln p+(nk-\sum_{i=1}^{n}x_i)\ln(1-p)$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(p)}{\mathrm{d}p}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{p}-\frac{nk-\sum_{i=1}^{n}x_i}{1-p}=0$$

$$\hat{p}=\frac{\overline{X}}{k}$$

七、证：$F(u,v)=P(U\leqslant u,V\leqslant v)=P(2X+1\leqslant u,\mathrm{e}^Y\leqslant v)=$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$P\left(X \leqslant \frac{u-1}{2}, Y \leqslant \ln v\right)=$$

$$P\left(X \leqslant \frac{u-1}{2}\right) P(Y \leqslant \ln v)=$$

$$P(2X+1 \leqslant u) P(e^{Y} \leqslant v)=$$

$$P(U \leqslant u) P(V \leqslant v)=F_{U}(u) F_{V}(v)$$

故 U,V 独立.

概率论与数理统计综合训练试题(十四)

一、1. $\frac{3}{16}$ 2. $F(x)=\begin{cases}1-(2x^{2}+2x+1)e^{-2x}, & x>0 \\ 0, & x \leqslant 0\end{cases}$ 3. 305

4. $\frac{1}{4}$ 5. $\frac{1}{3}$

二、1. C 2. D 3. D 4. C 5. D

三、解:设 A,B,C 分别表示从甲、乙、丙袋中取到白球.

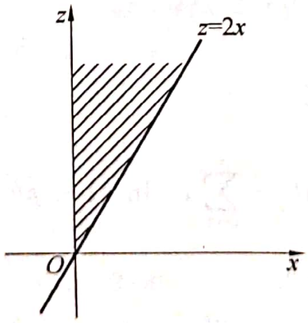
$P(B)=P(A)P(B \mid A)+P(\bar{A})P(B \mid \bar{A})=\frac{18}{25}$, $P(\bar{B})=\frac{7}{25}$, $P(C)=P(B)P(C \mid B)+P(\bar{B})P(C \mid \bar{B})=\frac{43}{125}$.

四、解:(1) $f_{Z}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) \mathrm{d} x$, $f(x, z-x)>0$,必有

$$\begin{cases}x>0 \\ z-x>x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x>0 \\ z>2x\end{cases}$$

$$f(x, z-x)=\begin{cases}x e^{-(z-x)}, & z>0,0<x<\frac{z}{2} \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_{Z}(z)=\begin{cases}\left(\frac{z}{2} e^{\frac{z}{2}}-e^{\frac{z}{2}}+1\right) e^{-z}, & z>0 \\ 0, & z \leqslant 0\end{cases}$$

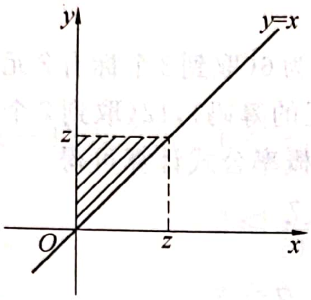


(2) $F_{M}(z)=P(\max (X, Y) \leqslant z)=P(Z \leqslant z, Y \leqslant z)=$

$$\iint_{\substack{x \leqslant z \\ y \leqslant z}} f(x, y) \mathrm{d} x \mathrm{d} y=$$

年 月 日

$$\begin{cases}\int_0^z\left[\int_0^y x\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\int_0^z\frac{1}{2}y^2\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y, & z>0\\ 0, & z\leqslant 0\end{cases}$$



$$f_M(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}z^2\mathrm{e}^{-z}, & z>0\\ 0, & z\leqslant 0\end{cases}$$

五、解：$Z=\max(X,Y)$. X,Y 独立同分布 $\sim E(\lambda)$

$$F(t)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda t}, & t>0\\ 0, & t\leqslant 0\end{cases}$$

$$F_Z(z)=F(z)^2=\begin{cases}1-2\mathrm{e}^{-\lambda z}+\mathrm{e}^{-2\lambda z}, & z>0\\ 0, & z\leqslant 0\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}2\lambda(\mathrm{e}^{-\lambda z}-\mathrm{e}^{-2\lambda z}), & z>0\\ 0, & z\leqslant 0\end{cases}$$

$$E(Z)=2\lambda\int_0^{+\infty}z(\mathrm{e}^{-\lambda z}-\mathrm{e}^{-2\lambda z})\mathrm{d}z=\frac{2}{\lambda}-\frac{1}{2\lambda}=\frac{3}{2\lambda}$$

六、解：(1) 样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的似然函数为

$$L(\theta)=\begin{cases}\theta^{-2n}2^n\prod_{i=1}^n x_i, & 0\leqslant\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}\leqslant\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$\ln L(\theta)=-2n\ln\theta+n\ln 2+\sum_{i=1}^n\ln x_i$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{2n}{\theta}\neq 0$$

取 $\hat{\theta}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}$，由定义知 $\hat{\theta}$ 为 θ 的最大似然估计.

(2) $\hat{\theta}$ 的概率密度 $g(y)=G'(y)=nF^{n-1}(y)f(y)$

$$X\sim F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{x^2}{\theta^2}, & 0\leqslant x<\theta\\ 1, & x\geqslant\theta\end{cases}$$

所以
$$\hat{\theta}\sim g(y)=\begin{cases}n\left(\frac{y^2}{\theta^2}\right)^{n-1}\frac{2y}{\theta^2}, & 0\leqslant y<\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$E(\hat{\theta})=\int_{-\infty}^{+\infty}yg(y)\mathrm{d}y=\int_0^\theta ny\left(\frac{y^2}{\theta^2}\right)^{n-1}\frac{2y}{\theta^2}\mathrm{d}y=\frac{2n}{2n+1}\theta\neq\theta$$

心得 体会 拓广 疑问

$\hat{\theta}$不是θ的无偏估计.

(3) 若取$\hat{\theta}_1=\frac{2n+1}{2n}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}=\frac{2n+1}{2n}\hat{\theta}$,因为$E(\hat{\theta}_1)=\frac{2n+1}{2n}E(\hat{\theta})=\theta$,所以$\hat{\theta}_1$为$\theta$的无偏估计量.

七、解:设$X=\{$该人获奖的数额$\}$,可能取值为6(取到3个标有2元的筹码),9(取到2个标有2元的筹码,1个标有5元的筹码),12(取到2个标有5元的筹码,1个标有2元的筹码),故由古典概率公式计算可得

$$P(X=6)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{56}{120}=\frac{7}{15}$$

$$P(X=9)=\frac{C_8^2C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{56}{120}=\frac{7}{15}$$

$$P(X=12)=\frac{C_8^1C_2^2}{C_{10}^3}=\frac{8}{120}=\frac{1}{15}$$

$$E(X)=6\times\frac{7}{15}+9\times\frac{7}{15}+12\times\frac{1}{15}=\frac{117}{15}=7.8$$

$$E(X^2)=6^2\times\frac{7}{15}+9^2\times\frac{7}{15}+12^2\times\frac{1}{15}=\frac{963}{15}=64.2$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=64.2-7.8^2=3.36$$

概率论与数理统计综合训练试题(十五)

一、1. $\frac{3}{5}$ 2. $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{4}\sqrt{y}\,e^{-\sqrt{y}}, & y\geqslant 0\\ 0, & y<0\end{cases}$ 3. 15 4. $\frac{2}{3}$

5. (10.359,12.841)

二、1. D 2. A 3. C 4. B 5. B

三、解:设X表示入园人数,Y表示过江去太阳岛人数,则$X\sim P(\mu)$

$$P(Y=m)=\sum_{k=m}^{\infty}P(x=k)P(Y=m\mid x=k)=$$

$$\sum_{k=m}^{\infty}\frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}C_k^m p^m(1-p)^{k-m}=$$

$$\frac{e^{-\mu}(p\mu)^m}{k!}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{[\mu(1-p)]^{k-m}}{(k-m)!}=$$

$$\frac{(\mu p)^m e^{-\mu p}}{m!}$$

四、解:$X\sim B\left(2,\frac{1}{3}\right)\ Y\sim U[0,1]$

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ x, & 0\leqslant y<1\\ 1, & y\geqslant 1\end{cases}$$

$$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P(X+Y\leqslant z)=$$
$$P(X=0)P(Y\leqslant z)+P(X=1)P(Y\leqslant z-1)+$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$P(X=2)P(Y\leqslant z-2)=$

$\frac{4}{9}F_Y(z)+\frac{4}{9}F_Y(z-1)+\frac{1}{9}F_Y(z-2)=$

$$\begin{cases}0, & z<0\\ \frac{4}{9}z, & 0\leqslant z<1\\ \frac{4}{9}+\frac{4}{9}(z-1)=\frac{4}{9}z, & 1\leqslant z<2=\\ \frac{1}{9}z+\frac{2}{3}, & 2\leqslant z<3\\ 1, & z\geqslant 3\end{cases}$$

$$\begin{cases}0, & z<0\\ \frac{4}{9}z, & 0\leqslant z<2\\ \frac{1}{9}z+\frac{2}{3}, & 2\leqslant z<3\\ 1, & z\geqslant 3\end{cases}$$

$$E(Z)=E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$$

$$D(Z)=D(X+Y)=D(X)+D(Y)=2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{12}=\frac{19}{36}$$

五、解：$P(X_1=1)=0.8,P(X_2=1)=0.1,P(X_3=1)=0.1.$

(1)

X_2 \ X_1	0	1	
0	0.1	0.8	0.9
1	0.1	0	0.1
	0.2	0.8	1

(2)$E(X_1)=0.8,E(X_2)=0.1,D(X_1)=0.16,D(X_2)=0.09,$ $E(X_1X_2)=0,\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=-0.08$

$$\rho_{X_1,X_2}=\frac{\mathrm{Cov}(X_1,X_2)}{\sqrt{D(X_1)}\sqrt{D(X_2)}}=-\frac{2}{3}$$

六、解：矩估计

$$\mu_1=E(X)=\int_c^{+\infty}x\theta c^\theta x^{-(\theta+1)}\,\mathrm{d}x=\frac{c\theta}{\theta-1}$$

$$\theta=\frac{\mu_1}{\mu_1-c}$$

用 $\overline{X}$ 估计 μ_1 得 $\hat{\theta}=\frac{\overline{X}}{\overline{X}-c}$ 为矩估计.

最大似然估计

$$L(\theta)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}(\theta c^\theta x_i^{-(\theta+1)}), & x_i>c,i=1,2,\cdots,n\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

年 月 日

当 $L(\theta)>0$ 时

$$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}[\ln\theta+\theta\ln c-(\theta+1)\ln x_i]=$$

$$n\ln\theta+n\theta\ln c-(\theta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{\theta}+n\ln c-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\xlongequal{令}0\Rightarrow$$

$$\hat{\theta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-n\ln c}$$

为最大似然估计.

七、解:设 X 表示首次掷得5点的次数,则 X 的所有可能值为 $1,2,\cdots$.

$\{X=1\}$ 表示第 1 次掷得 5 点,则 $P\{X=1\}=\frac{1}{6}$;

$\{X=2\}$ 表示第 1 次未掷得 5 点,第二次掷得 5 点,则 $P\{X=2\}=\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}$;

$\vdots$

$\{X=k\}$ 表示第 1 次,第 2 次,…,第 $k-1$ 次都未掷得 5 点,第 k 次掷得 5 点,则 $P\{X=k\}=\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\times\frac{1}{6}$,所以 X 的分布律为

$$P(X=k)=\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\times\frac{1}{6},k=1,2,\cdots$$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$$

又
$$\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{1}{1-x},\ |x|<1$$

于是

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}x^k\right)'=\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},\ |x|<1$$

所以

$$E(X)=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}=\frac{1}{6}\times\frac{1}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^2}=6$$

2015 年秋季学期概率论与数理统计综合训练试题

一、1. 0.1　2. $f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 1\\ \frac{1}{y^2}, & y>1\end{cases}$　3. 6　4. (4.786,6.214)　5. $\frac{1}{9}$

二、1. C　2. B　3. A　4. D　5. B

三、解:(1) 设 A_1,A_2,A_3,A_4 分别表示乘坐飞机、火车、轮船、汽车四

心得 体会 拓广 疑问

种交通工具,B 表示如期到达事件.

利用全概率公式

$$P(B)=\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)=0.05\times0.80+0.15\times0.7+0.3\times0.6+0.5\times0.9=0.775$$

(2) 利用贝叶斯公式

$$P(A_2\mid\overline{B})=\frac{P(A_2)P(\overline{B}\mid A_2)}{P(\overline{B})}=\frac{0.15\times(1-0.7)}{1-0.775}=\frac{0.045}{0.225}=0.2$$

四、解:(1) 当 $x\geqslant 0$ 时

$$f_X(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{6}e^{-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}}dy=\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$$

所以

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, & x\geqslant 0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

当 $y\geqslant 0$ 时

$$f_Y(y)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{6}e^{-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}}dx=\frac{1}{3}e^{-\frac{y}{3}}$$

所以

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{3}e^{-\frac{y}{3}}, & y\geqslant 0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

由于 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$,故 X 与 Y 相互独立.

(2) 由于 X 与 Y 相互独立,故可利用卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=$$

$$\begin{cases}\int_0^z\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\frac{1}{3}e^{-\frac{z-x}{3}}dx, & z\geqslant 0\\ 0, & z<0\end{cases}=$$

$$\begin{cases}e^{-\frac{z}{3}}-e^{-\frac{z}{2}}, & z\geqslant 0\\ 0, & z<0\end{cases}$$

五、解:(1) 令 U 的分布函數為 $F(u)$

$$\forall u\in\mathbf{R},F(u)=P(U\leqslant u)=P(|X-Y|\leqslant u)$$

当 $u\leqslant 0$ 时,$F(u)=0$,$u\geqslant 2$ 时 $F(u)=1$,(X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4} & ,0\leqslant x,y\leqslant 2\\ 0 & ,其他\end{cases}$$

当 $0<u<2$ 时

$$F(u)=P(|X-Y|\leqslant u)=\frac{1}{4}[4-(2-u)^2]$$

所以

年 月 日

$$f(u)=F'(u)=\begin{cases}\frac{1}{2}(2-u), & 0<u<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(2) $EU=\int_0^2 u\times\frac{1}{2}(2-u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\left[u^2-\frac{1}{3}u^3\right]\Big|_0^2=$

$$\frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{3}\times 8\right)=\frac{2}{3}$$

$$EU^2=\int_0^2 u^2\times\frac{1}{2}(2-u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^3-\frac{1}{4}u^4\right]\Big|_0^2=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\times 8-\frac{1}{4}\times 16\right)=\frac{2}{3}$$

$$DU=EU^2-(EU)^2=\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$$

六、解:(1)1) 矩估计

$$EX=\int_0^1\frac{x}{1-\theta}\mathrm{d}x=\frac{1}{1-\theta}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1+\theta}{2}$$

令

$$\frac{1+\hat{\theta}}{2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i=\overline{X}$$

所以 θ 的矩估计为

$$\hat{\theta}_1=2\overline{X}-1$$

2) 最大似然估计

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_i;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{(1-\theta)^n}, & \theta\leqslant x_i\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=$$

$$\begin{cases}\frac{1}{(1-\theta)^n}, & \theta\leqslant x_{(1)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(n)}\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

利用最大似然估计的定义可得,所以 θ 的最大似然估计为

$$\hat{\theta}_2=\min(X_1,\cdots,X_n)$$

(2) 因为

$$E\hat{\theta}_1=E(2\overline{X}-1)=2E\overline{X}-1=2\times\frac{1+\theta}{2}-1=\theta$$

所以 $\hat{\theta}_1$ 是 θ 的无偏估计.

令总体 X 的分布函数

$$F_X(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant\theta\\ \frac{z-\theta}{1-\theta}, & \theta<z<1\\ 1, & z\geqslant 1\end{cases}$$

而 $\hat{\theta}_2=\min(X_1,\cdots,X_n)=X_{(1)}$ 的分布函数为 $F_{X_{(1)}}(z)$,因为 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立且与总体 X 同分布,所以

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$F_{X_{(1)}}(z)=1-(1-F_X(z))^n=\begin{cases}0, & z\leqslant\theta\\ 1-\left(1-\dfrac{z-\theta}{1-\theta}\right)^n, & \theta<z<1\\ 1, & z\geqslant 1\end{cases}$$

$$F_{X_{(1)}}(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant\theta\\ 1-\left(\dfrac{1-z}{1-\theta}\right)^n, & \theta<z<1\\ 1, & z\geqslant 1\end{cases}$$

则其概率密度为

$$f_{X_{(1)}}(z)=\begin{cases}n\dfrac{1}{(1-\theta)^n}(1-z)^{n-1}, & \theta<z<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$E\hat{\theta}_2=\int_\theta^1 z\times n\times\frac{1}{(1-\theta)^n}(1-z)^{n-1}\mathrm{d}z=$$

$$\int_\theta^1(1+z-1)\times n\times\frac{1}{(1-\theta)^n}(1-z)^{n-1}\mathrm{d}z=$$

$$n\int_\theta^1\frac{1}{(1-\theta)^n}\times(1-z)^{n-1}\mathrm{d}z-$$

$$\int_\theta^1 n\frac{1}{(1-\theta)^n}\times(1-z)^n\mathrm{d}z=$$

$$\frac{n}{n-1+1}\times\frac{-1}{(1-\theta)^n}\times(1-z)^n\Big|_\theta^1-$$

$$\frac{n}{n+1}\times\frac{-1}{(1-\theta)^n}\times(1-z)^{n+1}\Big|_\theta^1=$$

$$1-\frac{n}{n+1}\times\frac{1}{(1-\theta)^n}\times(1-\theta)^{n+1}=$$

$$1-\frac{n}{n+1}\times(1-\theta)=$$

$$\frac{n}{n+1}\theta+1-\frac{n}{n+1}=$$

$$\frac{n}{n+1}\theta+\frac{1}{n+1}\neq\theta$$

所以 $\hat{\theta}_2$ 不是无偏估计，但为渐近无偏估计.

七、解：令月初可储存此种商品为 m 件. 由题设可得

$$P(X\leqslant m)=0.991\ 17$$

于是有

$$1-P(X>m)=0.991\ 17$$

即

$$P(X\geqslant m+1)=0.008\ 83$$

查表可得 $m+1=13$. 所以 $m=12$，即月初可储存此种商品 12 件才能保证当日不脱销的概率为 0.991 17.

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

2016年秋季学期概率论与数理统计综合训练试题

一、1. $\frac{7}{15}$　2. $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2y}, & e^{-1}<y<e\\ 0, & 其他\end{cases}$　3. 0.5　4. (19.561 7, 20.438 3)　5. 5

二、1. D　2. B　3. A　4. C　5. B,C

三、解：设 $A=$"先取出的为一等品"，$B=$"后取出的为一等品"，$C_i=$"取出的为第 i 箱"，$i=1,2$.

(1) $P(A)=P(A\mid C_1)P(C_1)+P(A\mid C_2)P(C_2)=\frac{1}{2}\left(\frac{10}{50}+\frac{18}{30}\right)=\frac{2}{5}$.

(2) $P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(AB\mid C_1)P(C_1)+P(AB\mid C_2)P(C_2)}{P(A)}=$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{10}{50}\times\frac{9}{49}+\frac{18}{30}\times\frac{17}{29}\right)\Big/\frac{2}{5}=\frac{690}{1\ 421}=0.485\ 57.$$

四、解：(1) 总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta-1}, & 1\leqslant x\leqslant\theta\\ 0, & 其他\end{cases}$$

分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \frac{x-1}{\theta-1}, & 1\leqslant x\leqslant\theta\\ 1, & x>\theta\end{cases}$$

$X_{(n)}$ 的分布函数为

$$F_{X_{(n)}}(x)=[F(x)]^n$$

故

$$f_{X_{(n)}}(x)=n[F(x)]^{n-1}f(x)=\begin{cases}\frac{n(x-1)^{n-1}}{(\theta-1)^n}, & 1\leqslant x\leqslant\theta\\ 0, & 其他\end{cases}$$

(2) $EX_{(n)}=\int_1^\theta x\frac{n(x-1)^{n-1}}{(\theta-1)^n}\mathrm{d}x=$

$$\frac{n}{(\theta-1)^n}\left[\int_1^\theta(x-1)^n\mathrm{d}x+\int_1^\theta(x-1)^{n-1}\mathrm{d}x\right]=$$

$$\frac{n}{(\theta-1)^n}\left[\frac{(\theta-1)^{n+1}}{n+1}+\frac{(\theta-1)^n}{n}\right]=$$

$$\frac{n(\theta-1)}{n+1}+1=\frac{n}{n+1}\theta+\frac{1}{n+1}$$

$$EX_{(n)}^2=\int_1^\theta x^2\frac{n(x-1)^{n-1}}{(\theta-1)^n}\mathrm{d}x=$$

年　月　日

$$\frac{n}{(\theta-1)^n}\left[\int_1^\theta (x-1)^{n+1}\mathrm{d}x+\int_1^\theta 2x\ (x-1)^{n-1}\mathrm{d}x-\right.$$

$$\left.\int_1^\theta (x-1)^{n-1}\mathrm{d}x\right]=$$

$$\frac{n}{(\theta-1)^n}\left[\frac{(\theta-1)^{n+2}}{n+2}\right]+\frac{2n(\theta-1)}{n+1}+2-1=$$

$$\frac{n\ (\theta-1)^2}{n+2}+\frac{2n(\theta-1)}{n+1}+1$$

$$DX_{(n)}^2=EX_{(n)}^2-(EX_{(n)})^2=$$

$$\frac{n\ (\theta-1)^2}{n+2}+\frac{2n(\theta-1)}{n+1}+1-\left(\frac{n(\theta-1)}{n+1}+1\right)^2=$$

$$\frac{n\ (\theta-1)^2}{n+2}-\frac{n^2\ (\theta-1)^2}{(n+1)^2}=$$

$$\frac{n}{(n+2)\ (n+1)^2}\ (\theta-1)^2$$

5.解：(1) 因 $\max(X,Y)=Y$，故

$$f_M(y)=f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^y x\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}=$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}y^2\mathrm{e}^{-y}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$$

另解：令 M 的分布函数 $F_M(z)$

$$F_M(z)=P(\max(X,Y)\leqslant z)$$

当 $z\leqslant 0$ 时，$F_M(z)=0$.

当 $z>0$ 时

$$F_M(z)=P(X\leqslant z,Y\leqslant z)=\int_0^z\left(\int_x^z x\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=$$

$$1-\mathrm{e}^{-z}-z\mathrm{e}^{-z}-\frac{z^2\mathrm{e}^{-z}}{2}$$

故

$$f_M(z)=F'_M(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}z^2\mathrm{e}^{-z}, & z>0\\ 0, & z\leqslant 0\end{cases}$$

(2) 因为

$$Z=\max(X,Y)+\min(X,Y)=X+Y$$

故

$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x$$

使 $f(x,z-x)$ 不为 0 的区域为

$$0<x<z-x\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ z>2x\end{cases}$$

心得 体会 拓广 疑问

当 $z \leqslant 0$ 时

$$f_z(z)=0$$

当 $z>0$ 时

$$f_z(z)=\int_0^{\frac{z}{2}} x\mathrm{e}^{-(z-x)}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-z}+\frac{z}{2}\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}-\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}$$

故

$$f_z(z)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-z}+(\frac{z}{2}-1)\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}, & z>0\\ 0, & z\leqslant 0\end{cases}$$

另解

$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,z-y)\mathrm{d}y$$

不为零的区域

$$0<z-y<y\Rightarrow\begin{cases}z>y\\ z<2y\end{cases}$$

(3) $P(X+Y\leqslant 1)=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{1-x} x\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}-\mathrm{e}^{-1}$.

六、解:(1) 矩估计:由

$$EX=\int_0^{\infty}\lambda^2x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x=\frac{2}{\lambda}$$

解得 $\lambda=\frac{2}{EX}$.

故参数 λ 的矩估计量为:$\hat{\lambda}_1=\frac{2}{\overline{X}}$.

(2) 最大似然估计:似然函数为

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\lambda)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\lambda^2x_i\mathrm{e}^{-\lambda x_i}(x_i>0)=$$
$$\lambda^{2n}\mathrm{e}^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i}\prod_{i=1}^{n}x_i$$

对数似然

$$\ln L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\lambda)=2n\ln\lambda+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i$$

令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{2n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0$$

故参数 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}_2=\frac{2}{\overline{X}}$.

七、解:(1) 设 X 的分布函数为 $F_X(x)$,即 $F_X(x)=P(X\leqslant x)$,则:
当 $x\leqslant 0$ 时

$$F_X(x)=0$$

当 $x>0$ 时

年 月 日

$$F_X(x)=P(X\leqslant x)=1-P(X>x)=1-P(N(t)=0)=$$
$$1-\frac{(\lambda x)^0}{0!}e^{-\lambda x}=1-e^{-\lambda x}$$

故 X 的分布函数为

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

X 的概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

即 X 服从参数为 λ 的指数分布.

(2) $P(x>2\mid x>1)=P(x>1)=1-F_X(1)=e^{-\lambda}$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

综(一)

一、填空题

1. $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$$=3P(A)-3P^2(A)=\frac{9}{16}$$

$$P^2(A)-P(A)+\frac{3}{16}=0$$

$$(P-\frac{1}{4})(P-\frac{3}{4})=0 \Rightarrow P=\frac{1}{4} \text{ 或 } \frac{3}{4}(\text{舍})$$

2. 由题目条件 $P(A\bar{B})=P(\bar{A}B)$

$$P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB)$$

$$\Rightarrow P(A)=P(B)$$

A, B独立 $P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})=(1-P(A))^2=\frac{1}{9}$

$$P(A)=\frac{2}{3}$$

3. $Y=e^X$ 单调递增，所以存在反函数

$x=\ln y$ $\quad x\in(-1,1)$ $\quad y=e^x\in(e^{-1},e)$

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

于是，由公式法 $f_Y(y)=f_X(h(y))|h'(y)|$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\frac{1}{y}, & e^{-1}<y<e\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

4. $P(X-3<Y<X+3) = P(|X-Y|<3)$

由切比雪夫不等式

$$P(|X-EX|<\varepsilon) \geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

$E(X-Y) = E(X)-E(Y) = 3-3 = 0$

$D(X-Y) = DX+DY = \frac{(6-0)^2}{12} + 12\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4} = 3+\frac{9}{4} = \frac{21}{4}$

代入得

$$P(|X-Y|<3) \geq 1-\frac{\frac{21}{4}}{9} = 1-\frac{7}{12} = \frac{5}{12}$$

5. $u = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

$\Rightarrow$ μ的置信区间为 $(\bar{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

即 $(1.416-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{0.2}{4}, 1.416+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{0.2}{4})$

$u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{0.2}{4} = 0.098 \Rightarrow u_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ $\frac{\alpha}{2} = 1-\Phi(u_{\frac{\alpha}{2}})$

$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 1-\Phi(1.96) = 1-0.975 = 0.025$

$\Rightarrow \alpha = 0.05$

所以置信度 $1-\alpha = 0.95$

二、选择题

1. $p(\bar{B}\bar{C}\cap\bar{C}) = p(\bar{B}\bar{C}) = p(\bar{B})p(\bar{C}) > p(\bar{B}\bar{C})p(\bar{C})$

所以 $\bar{B}\bar{C}$ 与 $\bar{C}$ 不独立

2. $Y = 2X$ 单调递增，$X = \frac{1}{2}Y$.

由公式

$$f_Y(y) = f_X(h(y))\,|h'(y)| = \frac{1}{\pi(1+(\frac{y}{2})^2)} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2}{\pi(4+y^2)}$$

3. 分布函数需满足的条件

① $0 \le F(x) \le 1$　② 单调不减 $\Leftrightarrow f(x) \geq 0$

③ $F(-\infty) = 0$，$F(+\infty) = 1$

④ 右连续

C选项. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \not\Rightarrow f(x) \geq 0$

4. $Cov(X,Y) = Cov(X, X^7) = EX\cdot X^7 - EXEX^7$

$$= EX^8 - EXEX^7$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}x^8\,dx - \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}x\,dx \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}x^7\,dx$$

$$= \frac{1}{9} \neq 0$$

所以 X与Y 相关，不独立

5、 X分布未知

A. 若 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 为总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，则样本均值 $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

B.D 若 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 为总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，则样本方差 S^2 与样本均值 $\bar{X}$ 相互独立，且 $\frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2(n-1)$

C. $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$

$$ES^2 = E\left[\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} EX_i^2 - n E\bar{X}^2\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[n(DX_i + E^2X_i) - n(D\bar{X} + E^2\bar{X})\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[n(\sigma^2 + \mu^2) - n\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n-1} \cdot (n-1)\sigma^2 = \sigma^2$$

即 S^2 是 σ^2 的无偏估计

综（二）

一、填空题

1、 $P(AB)=0 \Rightarrow P(ABC)=0$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$$

$$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=1-P(A\cup B\cup C)=\frac{3}{8}$$

2、 $X\sim P(\lambda)$， $EX=\lambda$， $DX=\lambda$

$$EX^2=DX+E^2X=\lambda^2+\lambda=12$$

$\Rightarrow \lambda=3$ 或 -4（舍）

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}=1-e^{-3}$$

3. $Y=1-2X$ 单调递减，所以存在反函数

$x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}y$ $\qquad |h'(y)|=\frac{1}{2}$

$x\in(0,1)$， $y\in(-1,1)$

$x\in(1,3)$， $y\in(-5,-1)$

$$f_Y(y)=f_X(h(y))|h'(y)|=\begin{cases}\frac{1}{4}, & -1<y<1\\ \frac{1}{8}, & -5<y<-1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

4. $EX=\int_{-1}^{0} x(1+x)dx+\int_{0}^{1} x(1-x)dx=0$

$$EX^2=\int_{-1}^{0} x^2(1+x)dx+\int_{0}^{1} x^2(1-x)dx$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

$DX=EX^2-E^2X=\frac{1}{6}$

5. $\sigma^2=1$ 已知，$U=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\sim N(0,1)$

$$\Rightarrow \quad \bar{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{\alpha}{2}=1-\Phi(u_{\frac{\alpha}{2}})=0.025$$

$$\Phi(u_{\frac{\alpha}{2}})=0.975 \Rightarrow u_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$$

$$u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1.96\times\frac{1}{4}=0.49$$

$\Rightarrow$ μ的置信区间为 $(39.51,\ 40.49)$

二、选择题

1. A. $P(ABC)=P(A)P(BC)=P(A)P(B)P(C)$

$\Leftrightarrow$ A、B、C 相互独立

n个事件相互独立，任意 $2\le m\le n$ 个事件独立，

共有 $C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n-n-1$ 个等式

2. 概率密度函数条件 ① $f(x)\geq 0$

② $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$

A. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2$ C. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\frac{1}{2}$

D. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2$

B. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\arctan x\Big|_{-\infty}^{+\infty} =1$

3. $X+Y\sim N(2\mu,1)$

$2\mu=1 \Rightarrow \mu=\frac{1}{2}$

4. $X+Y=n$, $Y=n-X$

$Cov(X,Y)=Cov(X,n-X)= -DX$

$$\rho=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\ \sqrt{DY}} = \frac{-DX}{DX} = -1$$

若X, Y具有非零方差, 如果存在常数a, b, 使得

$P(Y=aX+b)=1$, 则X, Y的相关系数为 $\frac{a}{|a|}$

即 $a>0$, $\rho=1$, 正相关

$a<0$, $\rho=-1$, 负相关

本题 $P(X+Y=n)=1 \Leftrightarrow P(Y=-X+n)=1 \Leftrightarrow \rho=-1$

5. $X \sim \chi^2(n)$, $EX = n$ $DX = 2n$

$E\bar{X} = EX = n$ $D\bar{X} = \frac{DX}{n} = 2$

综(三)

一、填空题

1. $P(\bar{A})=1-P(A)=0.5$

$$P(B|\bar{A})=\frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})} \Rightarrow P(\bar{A}B)=0.5\times 0.6=0.3$$

$$P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB) \Rightarrow P(AB)=0.3$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.8$$

2. $X\sim P(\lambda)$ $\quad EX=DX=\lambda$ $\quad \boxed{\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}}$

$$EX^2=DX+E^2X=\lambda^2+\lambda=6$$

$$\Rightarrow \lambda=2 \text{ 或 } -3\text{(舍)}$$

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\frac{2^0}{0!}e^{-2}=1-e^{-2}$$

3. X,Y 相互独立 $\Rightarrow$ $Z=X+Y\sim N(0,1)$

$$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$$

4. $E[(X-1)(X+2)]=E(X^2+X-2)$

$$=EX^2+EX-2$$

$$=DX+(EX)^2+EX-2$$

$$=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{3})^2}{12}+0^2+0-2=-1$$

5、 $\sigma^2=1$ $\bar{X}=5$

$$u=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\sim N(0,1)$$

$\Rightarrow$ μ的置信区间 $(\bar{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

$$\frac{\alpha}{2}=1-\Phi(u_{\frac{\alpha}{2}})=0.025$$

$$\Phi(u_{\frac{\alpha}{2}})=0.975 \qquad \Phi(1.96)=0.975$$

$$u_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$$

$$u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1.96\times\frac{1}{10}=0.196$$

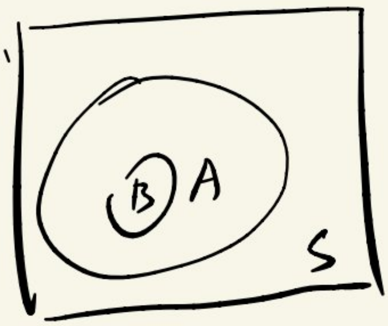
$\therefore$ μ的置信区间为 $(3.804, 5.196)$

二、选择题

1、 $P(A|\bar{B})=\dfrac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\dfrac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}=P(B)$

$\Rightarrow P(AB)=\frac{1}{4}$

2、



A. $P(A\cup B)=P(A)$

B. $P(AB)=P(B)$

C. $P(B-A)=P(B)-P(AB)=0$

D. $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(B)}{P(A)}$

3. 分布函数需满足的条件

① $0 \le F(x) \le 1$　② 单调不减 $\Leftrightarrow f(x) \geq 0$

③ $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$

④ 右连续

B. $F(+\infty)=3>1$

C. 取 $F_1(a)=\frac{1}{4}$　$F_2(a)=\frac{1}{3}$　$F(x)$ 有可能小于零

$F(a)=2F_1(a)-3F_2(a)=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}<0$

D. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt=1 \not\Rightarrow f(t) \geq 0$

4. $P(|X-c|\geq \varepsilon)=\int_{|x-c|\geq\varepsilon} f(x)\,dx$

$\leq \int_{|x-c|\geq\varepsilon} \frac{|x-c|}{\varepsilon} f(x)\,dx$　$\leq \int_{|x-c|\geq\varepsilon} \frac{|x-c|^2}{\varepsilon^2} f(x)\,dx$

$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x-c|}{\varepsilon} f(x)\,dx$　$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x-c|^2}{\varepsilon^2} f(x)\,dx$

$=\frac{1}{\varepsilon} E|X-c|$　$=\frac{1}{\varepsilon^2} E|X-c|^2$

$\downarrow$

C 正确

下证 $E|X-c|^2 \geq E|X-EX|^2 = DX$

$$E|X-C|^2 \geq E|X-EX|^2 = D(X)$$

证明: $E|X-C|^2 = E(X^2-2CX+C^2)$

$$= EX^2 - 2CEX + C^2$$

令 $h(c) = EX^2 - 2cEX + c^2$

$h'(c) = 2c - 2EX$

令 $h'(c_0) = 0 \Rightarrow c_0 = EX$

$h''(c) = 2 > 0$

$\therefore c_0$ 为 $h(c)$ 的极小值点

即 $h(c) \geq h(c_0) = D(X)$

5、 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

$$D\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right] = 2(n-1)$$

$$\Rightarrow DS^2 = \frac{\sigma^4}{(n-1)^2} \cdot 2(n-1) = \frac{2\sigma^4}{n-1} = \frac{2}{5}\sigma^4$$

综(四)

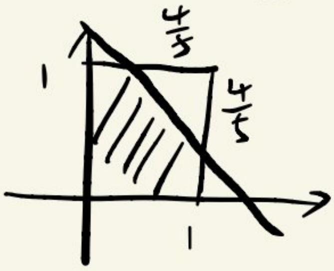
一、填空题

1、 $P(B|A)=P(\bar{B}|A)=1-P(B|A) \Rightarrow P(B|A)=\frac{1}{2}$

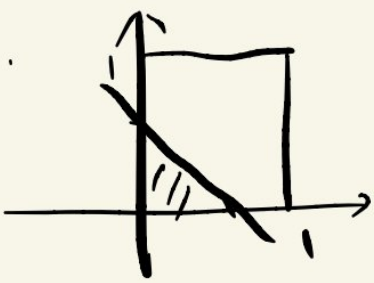
2. $X,Y \sim U(0,1)$

$X+Y \leq \frac{6}{5}$

$$P=\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2 \times \frac{1}{2}}{1}=\frac{17}{25}$$



3.



$$P=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{8}$$

4、 X,Y独同分布 $\therefore EXY=EX\,EY=4$，

由题意有 $P(|XY-EXY|<1)=0.7-0.3=0.4$

$$P(|XY-EXY|<1)\geq 1-\frac{D(XY)}{1^2}$$

$$0.4 \geq 1-D(XY)$$

$$D(XY)\geq 0.6$$

5、 $\sigma^2 = 0.9^2$　$\bar{x} = 5$

$$u = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

$\Rightarrow \mu$的置信区间 $\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\frac{\alpha}{2}},\ \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\frac{\alpha}{2}}\right)$

$\alpha = 1 - 0.95 = 0.05$

$\boxed{\frac{\alpha}{2} = 1 - \Phi(u_{\frac{\alpha}{2}})} \Rightarrow \Phi(u_{\frac{\alpha}{2}}) = 0.975 \Rightarrow u_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{0.9}{\sqrt{9}} \times 1.96 = 0.3 \times 1.96 = 0.588$$

$\Rightarrow (4.412, 5.588)$

二、选择题

1. $P(A \mid A \cup C) + P(C \mid A \cup C)$

$$= \frac{P(A) + P(C)}{P(A \cup C)} = 1 \Rightarrow P(AC) = 0$$

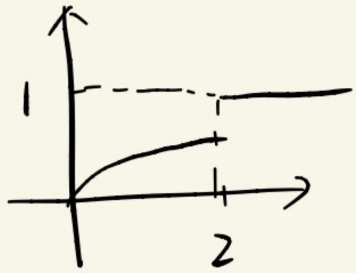
概率为零的事件与任意事件独立

设 $P(A) = 0$，$\forall B$

则 $0 \le P(AB) \le P(A) = 0 \Rightarrow P(AB) = P(A)P(B) = 0$

2、X服从指数分布 $E(\lambda)$，$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \int_0^y \lambda e^{-\lambda x}, & 0<y\le 2\\ 1, & y>2\end{cases}=\begin{cases}0, & y\le 0\\ 1-e^{-\lambda y}, & 0<y\le 2\\ 1, & y>2\end{cases}$$



易知恰好有一个间断点

3、$\rho_{XY}=0 \Leftrightarrow EXY=EXEY \Leftrightarrow D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

$\Uparrow \not\Downarrow$

X,Y独立

4、$P(|X-EX|<\varepsilon)\geq 1-\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$

$\therefore P(|X-EX|<10)\geq 1-\dfrac{25}{10^2}=0.75$

5、$E\bar{X}=EX=\lambda \quad ES^2=\sigma^2=\lambda$

$E(a\bar{X}+(3-2a)S^2)=(a+3-2a)\lambda=\lambda \Rightarrow a=2$

$\bar{x}$，S^2 分别是 EX，σ^2 的无偏估计量

综(五)

一、填空题

1. $P(\bar{A}\cup B) = P(\bar{A})+P(B)-P(\bar{A}B) = P(\bar{A}\bar{B})+P(\bar{A}B)+P(AB)$

$$\Rightarrow P(AB)=0.1$$

$\therefore P(\bar{A}\cup\bar{B}) = 1-P(AB) = 0.9$

2、 $1-(1-p)^3 = \frac{19}{27} \Rightarrow p = \frac{1}{3}$

3、 $EXY = \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx \int_0^{+\infty} ye^{-y}dy = 1$

矩形域，$h(x)g(y)$. $\Rightarrow$ X、Y独立 $\Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$

$X\sim E(1)$ $\quad EX = \frac{1}{1} = 1$

同理 $EY=1$

$\Rightarrow EXY = EXEY = 1$

4、 $E\bar{X} = EX = \frac{1}{\lambda}$, $ES^2 = \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

$E(\bar{X}+(3-2a)\lambda S^2) = \frac{1}{\lambda}+(3-2a)\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$

5、 $u = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

置信区间 $(\bar{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

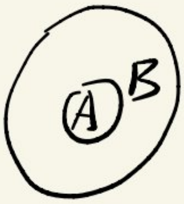
$u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.98$, $u_{0.025} = 1.96$, $\sigma = 3$

$$\sqrt{n} = \frac{1.96 \times 3}{0.98} = 6$$

$\Rightarrow n = 36$

二、选择题

1、



$\bar{A}B = B - AB = B - A = \emptyset$

仅当 $B=A$ 时等号成立

2、 $D(XY) = E(X^2Y^2) - (EXY)^2$

$= EX^2EY^2 - (EX)^2(EY)^2$

$DXDY = (EX^2 - E^2X)(EY^2 - E^2Y)$

$= EX^2EY^2 - EX^2E^2Y - E^2XEY^2 + E^2XE^2Y$

$DXY - DXDY = EX^2E^2Y + E^2XEY^2 - 2E^2XE^2Y$

$= (EX^2E^2Y - E^2XE^2Y) + (E^2XEY^2 - E^2XE^2Y)$

$= DXE^2Y + E^2XDY \geq 0$

于是 $DXY - DXDY \geq 0$

若 X,Y 相互独立，则

$DXY = DXDY + DXE^2Y + E^2XEY$

3、 $Cov(X,Y) = EXY - EXEY = 6 - 2\times 2 = 2$

$D(X-Y) = DX - 2Cov(X,Y) + DY = 4 - 4 + 5 = 5$

$D(X+Y) = DX + 2Cov(X,Y) + DY$

$$D(aX+bY) = D(aX) + 2Cov(aX,bY) + D(bY)$$
$$= a^2DX + 2ab\,Cov(X,Y) + b^2DY$$

$$D(X+Y+Z) = D(X+Y) + 2Cov(X+Y,Z) + DZ$$
$$= DX+DY+DZ+2Cov(X,Y)+2Cov(X,Z)+2Cov(Y,Z)$$

4、 X,Y不相关, $\rho_{XY} = 0$, $D(X+Y) = DX+DY$

$Cov(X,Y) = Cov(X, X+Y) = DX$

$$\rho = \frac{Cov(X,X+Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{D(X+Y)}} = \frac{DX}{\sqrt{2}DX} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

5、 $ES^2 = \sigma^2 = 4$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$4S^2 \sim \chi^2(16)$

$D(4S^2) = 32$

$DS^2 = 2$

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \frac{(n-1)}{\sigma^2}a\right) = 0.01$$

$P(\chi^2(16) > 4a) = 0.01$

$4a = 32$

$a = 8$

提有 $E(S^2-a) + D(S^2-a)$

$= ES^2 - a + DS^2 = 4 - 8 + 2 = -2$

综(六)

一、填空题

1、 $P(AB)=P(A)P(B)$, $P(BC)=0$, $P(AC)=0$

$P(A\bar{C})=P(A)-P(AC)=P(A)=0.5$

$P(B\bar{C})=P(B)-P(BC)=P(B)=0.5$

$P(\bar{A}\bar{B}C)+P(AB\bar{C})$

$=1-P(A\cup B\cup\bar{C})+P(AB\bar{C})$

$=1-P(A)-P(B)-P(\bar{C})+P(AB)+P(A\bar{C})+P(B\bar{C})\underline{-P(AB\bar{C})+P(AB\bar{C})}$

$=1-0.5-0.5-0.8+0.25+0.5+0.5$

$=0.45$

2、 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \int_0^x 4t^2e^{-2t}dt, & x>0\end{cases}$

$=\begin{cases}1-(2x^2+2x+1)e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

$\int_0^x 4t^2e^{-2t}dt=-2t^2e^{-2t}\Big|_0^x+4\int_0^x te^{-2t}dt$

$=-2x^2e^{-2x}-2te^{-t}\Big|_0^x+2\int_0^x e^{-2t}dt$

$=-2x^2e^{-2x}-2xe^{-x}-e^{-2t}\Big|_0^x$

$=1-2x^2e^{-2x}-2xe^{-x}-e^{-2x}$

3、$DY = D(X_1 - 2X_2 + 3X_3)$ X_1, X_2, X_3 相互独立

$= DX_1 + 4DX_2 + 9DX_3$

$= \frac{(6-0)^2}{12} + 4\times4 + 9\times3 = 3+16+27 = 46$

4、$Cov(X_1, X_2) = Cov(X-2Y, 2X-Y)$

$= 2DX - Cov(X,Y) - 4Cov(Y,X) + 2DY$

$= 2 - 5 + 8 = 5$

$DX_1 = D(X-2Y) = DX - 4Cov(X,Y) + 4DY$

$= 1 - 4 + 16 = 13$

$DX_2 = D(2X-Y) = 4DX - 4Cov(X,Y) + DY$

$= 4 - 4 + 4 = 4$

$$\rho = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{DX_1}\sqrt{DX_2}} = \frac{5}{\sqrt{13}\sqrt{4}} = \frac{5}{2\sqrt{13}}$$

5、求 σ^2 的置信区间

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$

$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}$

代入 $\alpha = 0.05$

$n = 9$

得 σ 的置信区间

为 $(7.4, 21.1)$

二、选择题

0概率事件与1概率事件与其他事件独立

1. 若 $P(C)=1$.

A项. $P(ABC)=P(AB)P(C)=P(A)P(B)P(C)$

$P(AC)P(BC)=P(A)P(B)P(C)$

B项 $P[(A\cup C)\cap B]=P[AB\cup BC]$

$=P(AB)+P(BC)-P(ABC)$

$=P(B)$

$P(A\cup C)P(B)=[P(A)+\underbrace{P(C)-P(AC)}_{0}]P(B)$

$=P(B)$

C项. $P[(A-C)A]=P[A\cap A-C\cap A]=\underbrace{P(A)-P(AC)}_{0}=0$

$P(A-C)P(A)=[\underbrace{P(A)-P(AC)}_{0}]P(A)=0$

D项. 取 $B=S$, $C=A$,

$P(AC)=P(A)>P(A)P(C)$. A、C不独立

2. 易知A

3. $E(X-C)^2=E(X^2-2CX+C^2)=EX^2-2CEX+C^2$

令 $h(c)=EX^2-2cEX+c^2$

$h'(c) = 2c - 2EX = 0 \Rightarrow c_0 = EX$

$h''(c) = 2 > 0$

$\therefore$ $c_0 = EX$ 为极小值点

即 $E(X-c)^2 \geq E(X-EX)^2 = E(X-\mu)^2$

4. A. $P(|X|<a, X<a) = P(|X|<a) > P(|X|<a)P(X<a)$

B. $F_{|X|}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \int_{-x}^{x} f(t)dt, & x > 0 \end{cases}$

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

C. $f(x)$ 为偶函数，X 为奇，$|X|$ 为偶

有 $EX = 0$ $EX|X| = 0$

$\Rightarrow \mathrm{Cov}(X, |X|) = EX|X| - EXE|X| = 0$

5. $n\left(\frac{\bar{X}-\mu}{S}\right)^2 = \dfrac{\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\right)^2}{\frac{(n-1)S^2}{(n-1)\sigma^2}} \sim F(1, n-1)$

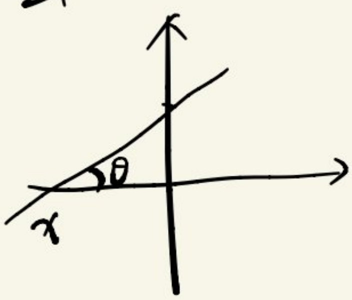
综（七）

一、填空题

1、A、B、C相互独立

$P(\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}) = 1-P(ABC) = 1-P(A)P(B)P(C) = \frac{19}{20}$

2、

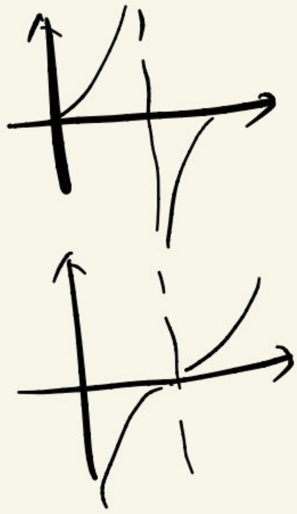


$f_\theta(\theta) = \frac{1}{\pi}$

$x = -\frac{1}{\tan\theta}$ 单调递增

存在反函数

$\theta = -\arctan\frac{1}{x}$



$f_X(x) = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]$

$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}$

3、 X与Y相互独立

$Z = X-2Y+7 \sim N(-3-2\times 2+7,\ 1+2^2\times 1) = N(0,5)$

4、 $ES_9 = E\left(\sum_{i=1}^{9} X_i\right) = 9 \qquad DS_9 = D\left(\sum_{i=1}^{9} X_i\right) = 9$

$\therefore P(|S_9-9|<\varepsilon) \geq 1-\frac{9}{\varepsilon^2}$

5、 σ^2已知

$u = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$，

$\Rightarrow$置信区间 $\left(\bar{x}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$\frac{\alpha}{2} = 1 - \Phi(u_{\frac{\alpha}{2}}) = 0.025 \Rightarrow \Phi(u_{\frac{\alpha}{2}}) = 0.975 \Rightarrow u_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

代入 $\overline{X} = 500$， $\sigma = 50$， $n = 25$

得置信区间为 $(480.4, 519.6)$

二、选择题

1、$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = 1 \Rightarrow P(AB) = P(A)$

$$P(A|\overline{B}) = \frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A) - P(AB)}{P(\overline{B})} = 0$$

C、D项，取 $X \sim U[0,2]$

$A = $ " $0 \leq X < 1$ "
$B = $ " $0 < X \leq 1$ "
$\Rightarrow P(AB) = P(A) = \frac{1}{2}$
但 $A \not\supset B$， $A \not\subset B$

2、密度函数条件 $0 \leq f(x)$， $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

3、代入检验，C

4、$Cov(U,V) = Cov(X+Y, X-Y)$

$$= DX - Cov(X,Y) + Cov(Y,X) - DY = 0$$

5、$X \sim N(0,1)$ $Y \sim N(0,1)$ ρ_{XY} 未知

$D(X+Y) = DX + DY + 2Cov(X,Y) = DX + DY + 2\rho\sqrt{DX}\sqrt{DY} = 2(1+\rho)DX$
若 $\rho = -1$，则 $D(X+Y) = 0$，$E(X+Y) = 0$，$\rightarrow$ A错误
$X^2 \sim \chi^2(1)$ $Y^2 \sim \chi^2(1)$

但 X, Y 不一定独立，$\rightarrow$ B、D错误

综（八）

一、填空题

1、$P(AB) = P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - P(A\cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB)$

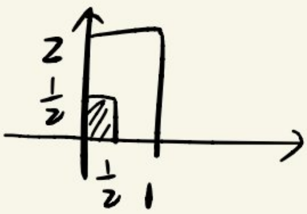
$$\Rightarrow P(B) = 1 - P(A) = 1 - p$$

2、$Y = 2X + 3$ 单调递增，所以存在反函数

$x = \frac{y-3}{2}$ ， $x \in [0, +\infty)$ $y \in [3, +\infty)$

$$\therefore f_Y(y) = \begin{cases} f_X\left(\frac{y-3}{2}\right)\cdot \frac{1}{2}, & y \geq 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} \left(\frac{y-3}{2}\right)^3 e^{-\left(\frac{y-3}{2}\right)^2}, & y \geq 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

3、$P(Z > \frac{1}{2}) = 1 - P(X < \frac{1}{2}, Y < \frac{1}{2}) = 1 - \frac{\frac{1}{4}}{2} = \frac{7}{8}$



4、X 与 Y 独立，$Z = X + Y \Rightarrow EZ = EX + EY = 2.5$

$$DZ = DX + DY = \frac{1}{12} + 4 = \frac{49}{12}$$

$$P(|Z - 2.5| < 7) \geq 1 - \frac{DZ}{7^2} = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

5、σ 未知 $\frac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1)$

$$\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

查得 $(-1.8172, 4.2172)$

二选择题

1、 $B \subset A \Leftrightarrow P(AB)=P(B) \Leftrightarrow \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A|B)=1$

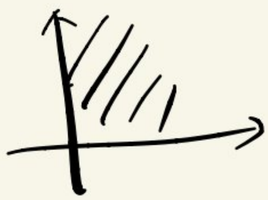
2、分布函数的条件

① $F'(x) \geq 0$　B　④ $F(-\infty)=0,\ F(+\infty)=1$

② $0 \leq F(x) \leq 1$　A

③ $F(x+0)=F(x)$　D　右连续，区间左闭右开

3. $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$



$$= \begin{cases} \int_0^{+\infty} x e^{-x(y+1)}\,dx, & y>0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{(y+1)^2}, & y>0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x(y+1)}\,dx = -\frac{1}{y+1} x e^{-x(y+1)}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{y+1}\int_0^{+\infty} e^{-x(y+1)}\,dx$$

$$= -\frac{1}{(y+1)^2} e^{-x(y+1)}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{(y+1)^2}$$

4. $P(X>u_\alpha)=\alpha$

$$P(|X|<x) = P(X<x) - P(X<-x)$$

$$= 2P(X<x)-1 = \alpha$$

$$P(X<x) = \frac{\alpha+1}{2}$$

$$P(X > x) = 1 - P(X < x) = \frac{1-\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow x = u_{\frac{1-\alpha}{2}}$$

5、 $X = \frac{u}{\sqrt{v/n}}$. $u \sim N(0,1)$, $v \sim \chi^2(n)$, $u^2 \sim \chi^2(1)$

$$Y = \frac{1}{X^2} = \frac{v/n}{u^2} = \frac{v/n}{u^2/1} \sim F(n,1)$$

$X \sim N(0,1)$ 则 $X^2 \sim \chi^2(1)$

练(九)

一、填空题

1. $P(AB)=0$, $P(A)=p$, $P(B)=q$

$P(\bar{A}\bar{B}) = 1-P(A\cup B) = 1-P(A)-P(B)+P(AB) = 1-p-q$

2. $Y=\ln X$ 单调递增，存在反函数 $X=e^y$

$x\in(0,+\infty)$ $\quad y=\ln x\in(-\infty,+\infty)$

$f_Y(y) = f_X(e^y)\cdot(x'_y) = \dfrac{2}{\pi(1+e^{2y})}e^y$, $-\infty<y<+\infty$

3. 归一化 $\quad \sum_{k=1}^{\infty}A\left(\frac{1}{3}\right)^k = A\cdot\dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{A}{2}=1 \Rightarrow A=2$

$P(X>1) = 1-P(X=1) = 1-2\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

4. X、$Y\sim E(\lambda)$

$F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-2x}, & x\geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$ $\quad F_Y(y)=\begin{cases} 1-e^{-2y}, & y\geq 0 \\ 0, & y<0 \end{cases}$

$P(\min(X,Y)\leq 1) = 1-P(X>1, Y>1)$

$= 1-P(X>1)P(Y>1)$

$= 1-[1-F_X(1)][1-F_Y(1)]$

$= 1-(e^{-2})^2 = 1-e^{-4}$

5、σ未知，$\frac{\bar{x}-\mu}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1)$

$\Rightarrow$ 置信区间为 $(\bar{x}-t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x}+t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}})$

查得 $(0.8335, 0.8345)$

二、选择题

1、$P(\bar{A}_1A_2) = P(A_2) - P(A_1A_2) = P(A_2)$

抽签是公平的，$P(A_i) = \frac{1}{5}$

2、$f(x)$为偶函数

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

$$\int_{0}^{-a} f(x)\,dx \xlongequal{t=-x} \int_{0}^{a} f(-t)\,d(-t) = -\int_{0}^{a} f(t)\,dt$$

$$F(-a) = \int_{-\infty}^{-a} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{-a} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx - \int_{0}^{a} f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2} f(x)\,dx - \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

3、 $\rho_{XY}=0 \Leftrightarrow$ 不相关 $\Leftrightarrow Cov(X,Y)=0 \Leftrightarrow D(X+Y)=DX+DY$

$\Updownarrow$

$EXY = EXEY$

$\not\Downarrow \ \Uparrow$

X、Y独立

4、 B. $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \sim (\mu, \frac{\sigma^2}{n}) = (0, \frac{1}{n})$

C. $\frac{\sqrt{n-1}\,X_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}X_i^2}} = \frac{X_n}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n-1}X_i^2}{n-1}}} \sim \frac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{\chi^2(n-1)}{n-1}}} \sim t(n-1)$

D. $\frac{(\frac{n}{2}-1)\sum_{i=1}^{2}X_i^2}{\sum_{i=3}^{n}X_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^{2}X_i^2/2}{\sum_{i=3}^{n}X_i^2/n-2} \sim \frac{\chi^2(2)/2}{\chi^2(n-2)/n-2} \sim F(2, n-2)$

5、A、 $D\bar{X} = \frac{\sigma^2}{n} \neq \sigma^2$

B、C 最值分布与原分布不同

D、最大似然函数

综(十)

一、填空题

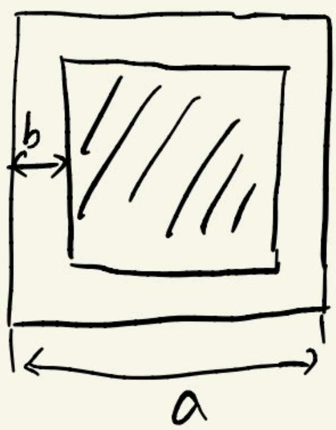
1. $P(A-C \mid AB\cup C)=\dfrac{P[(A-C)\cap(AB\cup C)]}{P(AB\cup C)}$

$$=\frac{P[A\bar{C}\cap(AB\cup C)]}{P(AB)+P(C)-P(ABC)}$$

$$=\frac{P(AB\bar{C})}{P(AB)+P(C)-P(ABC)}$$

$$=\frac{0.4\times0.5\times(1-0.5)}{0.2+0.5-0.1}=\frac{1}{6}$$

2.



$$P=\frac{(a-2b)^2}{a^2}$$

3. $Y\sim B(3,P)$, $P=\int_0^{\frac{1}{2}}3x^2dx=\frac{1}{8}$

$$P(Y=1)=C_3^1P(1-P)^2=3\cdot\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^2=\frac{147}{512}$$

4. $EX = 1\times 0.2 + 2\times 0.3 + 3\times 0.5$

$= 0.2 + 0.6 + 1.5 = 2.3$

$$\begin{array}{r} 2.3 \\ 2.3 \\ \hline 69 \\ 46 \\ \hline 5.29 \end{array}$$

$EX^2 = 1\times 0.2 + 4\times 0.3 + 9\times 0.5$

$= 0.2 + 1.2 + 4.5 = 5.9$

$DX = EX^2 - (EX)^2 = 5.9 - 2.3^2 = 0.61$

$P\{|X-EX| < 1.5\} \geq 1 - \frac{D(X)}{1.5^2} = 1 - \frac{0.61}{1.5^2} \approx 0.73$

$P[|X-EX| \geq \varepsilon] \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$

$P[|X-EX| \leq \varepsilon] \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$

5.

Y \ X	-1	0	1	$P_{\cdot j}$
0	0.07	0.18	0.15	0.4
1	0.08	0.32	0.20	0.6
$P_{i\cdot}$	0.15	0.5	0.35	1

X^2	0	1
P	0.5	0.5

Y^2	0	1
P	0.4	0.6

X^2Y^2	0	1
P		0.28

$EX^2 = 0.5$ $EY^2 = 0.6$ $EX^2Y^2 = 0.28$

$Cov(X^2, Y^2) = EX^2Y^2 - EX^2EY^2 = 0.28 - 0.3 = -0.02$

二、选择题

1、 $A \subset B \Leftrightarrow \bar{A} \supset \bar{B}$

2、 分布函数条件

① $0 \le F(x) \le 1$

② 右连续 $\to A$

③ 单调不减

④ $F(-\infty)=0, F(+\infty)=1 \to C, D$

3、 $Cov(U, V) = Cov(X+Y, X-Y)$

$= DX - Cov(X,Y) + Cov(Y,X) - DY$

$= DX - DY = 0$

$\Leftrightarrow DX = DY$

4、 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2+y^2 \le 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$

独立 $\Leftrightarrow$ 矩形域, $f(x,y) = h(x)g(y)$

非矩域,不独立

$f(x,y)$ 中 x, y 对称 $\Rightarrow$ 同分布

5.

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{n\,S^{*2}}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

综（十一）

一、填空题

1、设 A = "至少一次朝上"　B："至少三次朝上"

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{C_4^3(\frac{1}{2})^4 + C_4^4(\frac{1}{2})^4}{1-(\frac{1}{2})^4}$$

$$= \frac{4+1}{16-1} = \frac{1}{3}$$

2、$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$Y = 10^X$ 单调递增，存在反函数 $X = \log Y = \frac{\ln y}{\ln 10}$

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{\ln y}{\ln 10}\right)\left(\frac{\ln y}{\ln 10}\right)' = \frac{1}{y\ln 10}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\frac{\ln y}{\ln 10}-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

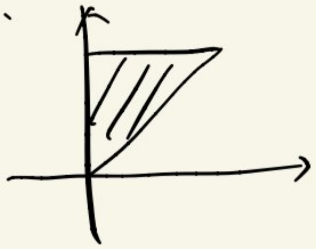
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y\ln 10} e^{-\frac{(\ln y-\mu\ln 10)^2}{2(\sigma\ln 10)^2}}$$

3、$X \sim E(2)$　$Y \sim E(4)$

$DX = \frac{1}{4}$　$DY = \frac{1}{16}$

$D(2X-3Y) = 4DX + 9DY = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$

4、



$$f(x,y)=\begin{cases} 2, & (x,y)\in G \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

$$EX=2\int_0^1 dx\int_x^1 x\,dy=2\int_0^1 x-x^2\,dx=\frac{1}{3}$$

$$EX^2=2\int_0^1 dx\int_x^1 x^2\,dy=2\int_0^1 x^2-x^3\,dx=\frac{1}{6}$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{18}$$

$$EY=2\int_0^1 dy\int_0^y y\,dx=2\int_0^1 y^2\,dy=\frac{2}{3}$$

$$EY^2=2\int_0^1 dy\int_0^y y^2\,dy=2\int_0^1 y^3\,dy=\frac{1}{2}$$

$$DY=EY^2-(EY)^2=\frac{1}{18}$$

$$EXY=2\int_0^1 dy\int_0^y xy\,dx=2\int_0^1 \frac{1}{2}y^3\,dy=\frac{1}{4}$$

$$Cov(X,Y)=EXY-EXEY=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{36}$$

$$\rho=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{18}}=\frac{1}{2}$$

5、求σ^2的置信区间

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} < \chi^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}$$

得置信区间为 $(7.4,\ 21.1)$

二、选择题

1、 $A_1A_2=\phi$ ， $\overline{A_1A_2} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 = S$

2、 概率密度函数条件 $f(x) \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

3、 X与Y独立

$$E(X-2Y+7) = EX-2EY+7 = -3-4+7=0$$

$$D(X-2Y+7) = DX+4DY = 1+4=5$$

4、 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$

$$= \begin{cases} \int_0^x 24y(1-x)\,dy, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 12x^2(1-x), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

5、若 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 为总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，则

样本方差与样本均值X相互独立，

且 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

本题 X 仅 $EX=\mu$，$DX=\sigma^2$，不一定 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

A、B、C 错误

$ES^2=\sigma^2$，∴ S^2 为 σ^2 的无偏估计量

综(十二)

一、填空题

1、 $P(AB)=P(A)P(B|A)=0.4$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.7$

2、 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ P(|X|<y), & y>0\end{cases}$

$=\begin{cases}0, & y\le 0\\ F_X(y)-F_X(-y), & y>0\end{cases}$

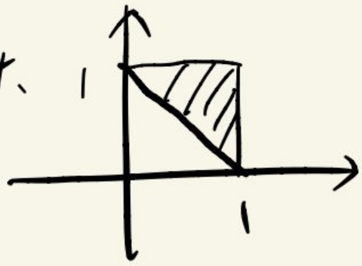
$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ f(y)+f(-y), & y>0\end{cases}$

$=\begin{cases}0, & y\le 0\\ 2\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, & y>0\end{cases}$

$=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}, & y>0\end{cases}$

3. $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \Rightarrow \lambda = 2$

$EX^2 = DX + (EX)^2 = \lambda + \lambda^2 = 6$

4. 

$$f(x,y) = \begin{cases} 2, & (x,y) \in G \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$E(X+Y) = 2\int_0^1 dx \int_{1-x}^1 (x+y)\,dy = \frac{4}{3}$$

$$E(X+Y)^2 = 2\int_0^1 dx \int_{1-x}^1 (x+y)^2\,dy$$

$$= 2\int_0^1 dx \int_{1-x}^1 x^2 + 2xy + y^2\,dy$$

$$= 2\int_0^1 x^3 + x[1-(1-x)^2] + \frac{1}{3}[1-(1-x)^3]\,dx$$

$$= 2\int_0^1 x^3 + x - x + 2x^2 - x^3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(1-x)^3\,dx$$

$$= 2\int_0^1 2x^2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + x - x^2 + \frac{1}{3}x^3\,dx$$

$$= 2\int_0^1 x^2 + x + \frac{1}{3}x^3\,dx$$

$$= 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\right) = \frac{11}{6}$$

$$D(X+Y) = E(X+Y)^2 - E^2(X+Y) = \frac{1}{18}$$

$$P\left(\left|X+Y-\frac{4}{3}\right| \geq 3\right) \leq \frac{D(X+Y)}{3^2} = \frac{1}{162}$$

5、 σ未知，$\frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1)$

$\Rightarrow \quad \bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}} < \mu < \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}$

$\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{0.029}{\sqrt{16}} \times 2.1315 = 0.0154533375 \doteq 0.015$

$\Rightarrow$ μ的置信区间 $(2.690,\ 2.720)$

二、选择题

1、 $P=\frac{C_5^1 C_3^3}{C_8^4}$

2、 $S(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty} C\cdot\lambda^{2n}\cdot\frac{e^{-\lambda}}{(2n)!}$

$S'(\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty} C\ \lambda^{2n-1}\frac{e^{-\lambda}}{(2n-1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} C\lambda^{2n}\frac{e^{-\lambda}}{(2n)!}$

$S(\lambda)+S'(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty} C\lambda^{n}\frac{e^{-\lambda}}{n!} - S(\lambda)$

$S'(\lambda)+2S(\lambda)=C$

$\lambda+2=0 \quad \lambda=-2$

$S=e^{-2\lambda}$

$S^{*}=\frac{C}{2} \quad \Rightarrow \quad S(\lambda)=e^{-2\lambda}+\frac{C}{2}=1 \quad ①$

$P=(X=k)=C\lambda^{k}\frac{e^{-\lambda}}{k!}\ (k=2,4\cdots)>0 \Rightarrow C>0 \quad ②$

$$e^{-2\lambda}=1-\frac{c}{2}<1 \Rightarrow \underline{\lambda>0}$$

$\therefore$ 答案 D

3、$Cov(U,V)=Cov(X+Y,X-Y)$

$=DX-Cov(X,Y)+Cov(Y,X)-DY$

$=DX-DY=0$

$\Leftrightarrow DX=DY$

4、$X、Y$ 不相关 $\Leftrightarrow \rho_{XY}=0$

$\Uparrow \not\Downarrow$

独立

5、$\rho_{XY}=1$，正相关，A、C错误

$EY\neq E(2X-1)$，B错误

综(十三)

一、填空题

1、设 A="至少有一个女孩"

B="至少有一个男孩"

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{C_3^1(\frac{1}{2})^3+C_3^2(\frac{1}{2})^3}{1-(\frac{1}{2})^3}=\frac{6}{7}$$

2. $Y=X^2$ 在 $X\in(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以存在反函数

$X=\sqrt{y}$.

$$f_Y(y)=f_X(\sqrt{y})\cdot(\sqrt{y})'=2(\sqrt{y})^3e^{-(\sqrt{y})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$=ye^{-y^2}$$

3. $Cov(Y,Z)=Cov(Y,5X-0.6)=5Cov(Y,X)$

$DZ=25DX$

$$\rho_{YZ}=\frac{Cov(Y,Z)}{\sqrt{DY}\sqrt{DZ}}=\frac{Cov(Y,X)}{\sqrt{DY}\sqrt{DX}}=\rho_{YX}=0.6$$

4. $\begin{cases} \int_a^b f(x)\,dx = \dfrac{b^2-a^2}{2} = 1 \\ EX^2 = \int_a^b x^2 f(x)\,dx = \dfrac{b^4-a^4}{4} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} b = \sqrt{3} \\ a = 1 \end{matrix}$

$P(|X| < \frac{3}{2}) = \int_1^{\frac{3}{2}} x\,dx = \frac{1}{2}(\frac{9}{4} - 1) = \frac{5}{8}$

5、$\sigma^2 = 0.02$ 已知

$u = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

μ的置信区间 $(\bar{X} - u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

$\frac{\alpha}{2} = 1 - \Phi(u_{\frac{\alpha}{2}}) \Rightarrow u_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

$\Rightarrow$ μ的置信区间 $(1.042, 1.058)$

二、选择题

1、$P(A|C) \geq P(B|C) \Leftrightarrow P(AC) \geq P(BC)$

$P(A|\bar{C}) \geq P(B|\bar{C}) \Leftrightarrow P(A\bar{C}) \geq P(B\bar{C})$

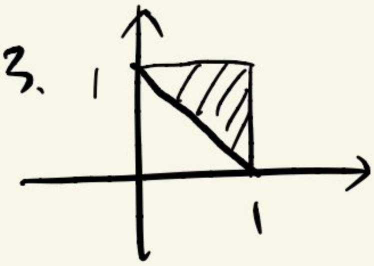
$\begin{matrix} P(A) = P(AC) + P(A\bar{C}) \\ P(B) = P(BC) + P(B\bar{C}) \end{matrix} \Rightarrow P(A) \geq P(B)$

2. 分布函数的条件 ① $0 \le F(x) \le 1$

② $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$

③ 右连续 区间左闭右开

④ 单调不减

3. 

$$f(x,y)=\begin{cases} 2, & (x,y)\in G \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

$$E(X+Y)=2\int_0^1 dx\int_{1-x}^1 (x+y)\,dy=\frac{4}{3}$$

$$E(X+Y)^2=2\int_0^1 dx\int_{1-x}^1 (x+y)^2\,dy$$

$$=2\int_0^1 dx\int_{1-x}^1 x^2+2xy+y^2\,dy$$

$$=2\int_0^1 x^3+x[1-(1-x)^2]+\frac{1}{3}[1-(1-x)^3]\,dx$$

$$=2\int_0^1 x^3+x-x+2x^2-x^3+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1-x)^3\,dx$$

$$=2\int_0^1 2x^2+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+x-x^2+\frac{1}{3}x^3\,dx$$

$$=2\int_0^1 x^2+x+\frac{1}{3}x^3\,dx$$

$$=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\right)=\frac{11}{6}$$

$$D(X+Y)=E(X+Y)^2-E^2(X+Y)=\frac{1}{18}$$

$$P(|X+Y-\frac{4}{3}| \geq 2) \leq \frac{D(X+Y)}{2^2} = \frac{1}{12}$$

4、 $F_Z(z) = P(\min\{X, Y\} < z)$

$= 1 - P(X > z, Y > z)$

$= 1 - P(X > z) P(Y > z)$

$= 1 - (1 - P(X \leq z))(1 - P(Y \leq z))$

$= 1 - (1 - F(z))^2$

5. $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

$\frac{5S_1^2}{4} \sim \chi^2(5)$

$\frac{9S_2^2}{5} \sim \chi^2(9)$

$$\frac{\frac{5S_1^2}{4}/5}{\frac{9S_2^2}{5}/9} = \frac{5S_1^2}{4S_2^2} \sim F(5,9)$$

综(十四)

一、填空题

1. $P(\bar{A}BC)+P(A\bar{B}C)+P(AB\bar{C})$

$=P(BC)-P(ABC)+P(AC)-P(ABC)+P(AB)-P(ABC)$

$=\frac{3}{16}$

2. $B(x)=\int_0^x x^2e^{-2x}\,dx$

$=-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}\Big|_0^x+\int_0^x xe^{-2x}\,dx$

$=-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}-\frac{1}{2}xe^{-2x}\Big|_0^x+\frac{1}{2}\int_0^x e^{-2x}\,dx$

$=-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}\Big|_0^x$

$=-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+\frac{1}{4}$

$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=AB(+\infty)=\frac{A}{4}=1 \Rightarrow A=4$

$$F(x)=\begin{cases}AB(x), & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}=\begin{cases}1-(2x^2+2x+1)e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

3. $Cov(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}=0.4\times5\times6=12$

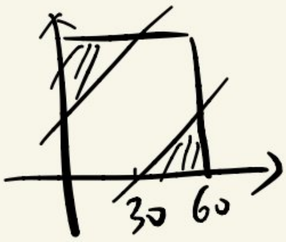
$E(2X-3Y+4)=2EX-3EY+4=4-3+4=5$

$$D(2X-3Y+4) = 4DX - 12Cov(X,Y) + 9DY$$
$$= 100 - 144 + 324$$
$$= 280$$

$$E(2X-3Y+4)^2 = D(2X-3Y+4) + E^2(2X-3Y+4)$$
$$= 305$$

4. $X, Y \sim U(0,60)$

$|X-Y| > 30$



$$p = \frac{30^2}{60^2} = \frac{1}{4}$$

5. X, Y 独立 $E(X-Y) = 0$

$$D(X-Y) = DX + DY = \frac{6^2}{12} + 3 = 6$$

$$P(|X-Y| \le 3) \geq 1 - \frac{D(X-Y)}{3^2} = \frac{1}{3}$$

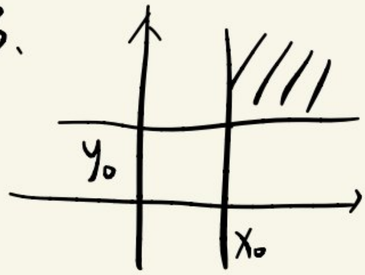
二、选择题

1. $(A \cup B) - B = A - B = A\bar{B} \subset A$

2. A. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) + f_2(x) dx = 2$

B. $\exists f_1, f_2$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2 dx = 1$, $f_1 f_2 = 0$

C. $F_1(+\infty)\ F_2(+\infty)=1$

3. 

$$P(X>x_0,\ Y>y_0)$$
$$=P(x_0<X<+\infty,\ y_0<Y<+\infty)$$
$$=F(+\infty,+\infty)-F(x_0,+\infty)-F(+\infty,y_0)+F(x_0,y_0)$$
$$=1-F_X(x_0)-F_Y(y_0)+F(x_0,y_0)$$

4.

X, Y	0	1
P	$1-p$	p

Z \ X	0	1	$p_{\cdot j}$
0	$(1-p)p$	$p(1-p)$	$2p(1-p)$
1	$(1-p)^2$	p^2	$p^2+(1-p)^2$
$p_{i\cdot}$	$1-p$	p	

相互独立 $(1-p)p = 2p(1-p)\cdot(1-p)$

$$\Rightarrow p=\frac{1}{2}$$

5. $D[kX_1+(1-k)X_2]=[k^2+(1-k)^2]DX$

k越接近$\frac{1}{2}$越有效

综(十五)

一、填空题

1、$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{1}{5} \Rightarrow P(A)=5P(AB),\ P(AB)=\dfrac{1}{15}$

$$P(\bar{B}|\bar{A})=\frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A})}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(A)}=\frac{1-P(A)-P(B)+P(AB)}{1-P(A)}$$

$$P(\bar{B}|\bar{A})=\frac{1}{5} \Rightarrow P(B)=\frac{3}{5}$$

2、
$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ P(X^2<y), & y\geq 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & ,y<0\\ F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y}) & ,y\geq 0\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}0 & ,y<0\\ f(\sqrt{y})\dfrac{1}{2\sqrt{y}}+f(-\sqrt{y})\dfrac{1}{2\sqrt{y}} & ,y\geq 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & ,y<0\\ \dfrac{1}{\sqrt{y}}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot(\sqrt{y})^2e^{-\sqrt{y}} & ,y\geq 0\end{cases}=\begin{cases}0, & y<0\\ \dfrac{1}{4}\sqrt{y}e^{-\sqrt{y}}, & y\geq 0\end{cases}$$

3、 $Cov(X,Y) = \rho\sqrt{DX}\sqrt{DY} = -\frac{1}{6}\times 3\times 2 = -1$

$D(X-Y+4) = DX - 2Cov(X,Y) + DY$

$= 9 + 2 + 4 = 15$

4. 伽玛函数 $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$

结论： $\Gamma(1) = 1$， $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$

$\Gamma(n) = (n-1)! \to \boxed{\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx = n!}$

$EX = \int_0^{+\infty} x\cdot\frac{1}{2}x^2e^{-x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}x^3e^{-x}dx = \frac{3!}{2} = 3$

$EX^2 = \int_0^{+\infty} x^2\cdot\frac{1}{2}x^2e^{-x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}x^4e^{-x}dx = \frac{4!}{2} = 12$

$DX = EX^2 - (EX)^2 = 3$

$P(0<X<6) = P(|X-3|<3) \geq 1 - \frac{D(X)}{3^2} = \frac{2}{3}$

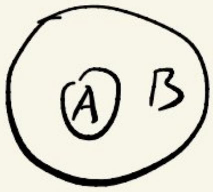
5、 $\frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1)$

$\Rightarrow (\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}})$

代入得 $(10.359, 12.841)$

二、选择题

1、 $\overline{A}B = B - AB = \phi$ 仅当 $A=B$ 时成立



2、 $P(|X-\mu| \le k\sigma) = P\left(\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right| \le k\right)$

$= \Phi(k) - \Phi(-k)$

$= 2\Phi(k) - 1$

3. $EX = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}$

$EX^2 = \int_0^1 2x^3 dx = \frac{1}{2}$

$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$

$P(|X - EX| \geqslant 2\sqrt{DX}) = P\left(\left|X - \frac{2}{3}\right| \geqslant 2\,\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$

$= P\left(x \le \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} \cup X \geqslant \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

$= \int_0^{\frac{2-\sqrt{2}}{3}} 2x\,dx = x^2 \Big|_0^{\frac{2-\sqrt{2}}{3}} = \frac{6-4\sqrt{2}}{9}$

4. $D(X-Y) = DX - 2\rho\sqrt{DX}\sqrt{DY} + DY$

$= 4 - 2\rho \cdot 2 \cdot 1 + 1 = 4$

$\Rightarrow \rho = \frac{1}{4}$

$$5.\quad Y = \frac{\sqrt{n-1}\; X_1}{\sqrt{\sum_{i=2}^{n} X_i^2}} = \frac{X_1}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} X_i^2}} \sim \frac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{\chi^2(n-1)}{n-1}}} \sim t(n-1)$$