概率论与数理统计模拟试题（一）答案

一、（1）$\frac{1}{4}$，　（2）$\frac{2}{3}$，　（3）$\begin{cases} \frac{1}{2y}, & \frac{1}{e} < y < e \\ 0, & 其它 \end{cases}$，　（4）$\frac{5}{12}$，　（5）0.95.

二、（1）B，　（2）C，　（3）C，　（4）B，　（5）C

三、**解**：令 A_i = “第 i 门炮中靶”，$i=1,2,3$，B = “有两弹中靶”，则

$$B = A_1A_2\bar{A}_3 \cup A_1\bar{A}_2A_3 \cup \bar{A}_1A_2A_3$$

由事件独立性得

$$P(B) = P(A_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(A_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(A_3)$$

$$= 0.4\times 0.3\times 0.5 + 0.4\times 0.7\times 0.5 + 0.6\times 0.3\times 0.5 = 0.29$$

$$P(A_1B) = P(A_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(A_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)$$

$$= 0.4\times 0.3\times 0.5 + 0.4\times 0.7\times 0.5 = 0.2$$

于是 $P(A_1 \mid B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{20}{29}$.

四、**解**：设第 i 周的需求量为 X_i，$i=1,2$. 则 X_1, X_2 独立同分布，其概率密度均为

$$f(t) = \begin{cases} te^{-t}, & t>0, \\ 0, & t\le 0. \end{cases}$$

则两周需求量 $Y = X_1 + X_2$ 的概率密度为：

当 $Y>0$ 时，

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(y-t)dt = \int_0^y te^{-t}(y-t)e^{-(y-t)}dt = \frac{y^3}{6}e^{-y}$$

于是

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y^3}{6}e^{-y}, & y>0, \\ 0, & y\le 0. \end{cases}$$

五、**解**：（1）$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\times\frac{1}{3} + (B-1)A$

$$F(2) = P(X\le 2) = 1 - P(X>2) = 1-(B-2)\cdot A = \frac{5}{6}$$

$$\therefore A = \frac{1}{6},\ B = 3.$$

六、解：（1）$EX=\int_{1}^{\theta}x\cdot\frac{2\theta^2}{(\theta^2-1)x^3}dx=\frac{2\theta}{\theta+1}$

$$\theta=\frac{EX}{2-EX}$$

$\therefore$ 矩估计 $\hat{\theta}=\frac{\overline{X}}{2-\overline{X}}$

（2）$L=f(x_1)\cdots f(x_n)$

$$=\frac{(2\theta^2)^n}{(\theta^2-1)^n(x_1\cdots x_n)^3},\ \ x_1,\cdots,x_n\in(1,\ \theta).$$

$$\ln L=n\cdot\ln(2\theta^2)-n\cdot\ln(\theta^2-1)-3\cdot\ln x_1\cdots x_n$$

$$(\ln L)'_\theta=\frac{2n}{\theta}-\frac{2n\theta}{\theta^2-1}\neq 0.$$

因 $L=(\frac{2}{\theta^2-1}+2)^n\frac{1}{(x_1\cdots x_n)^3}$

θ 越小，L 越大.

$\hat{\theta}=\max(x_1,\cdots,x_n)$

七、证：设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且都服从 $N(0,1)$ 分布，则 $Y=\sum_{j=1}^{n}X_j\sim\chi^2(n)$，故 X,Y 同分布，得

$$EX=EY=\sum_{j=1}^{n}EX_j^2=\sum_{j=1}^{n}DX_j=n$$

$$EX=DY=\sum_{j=1}^{n}DX_j^2=\sum_{j=1}^{n}[EX_j^4-(EX_j^2)^2]$$

$$=n[\int_{-\infty}^{\infty}x^4\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx-1]=2n$$

概率论与数理统计模拟试题（二）答案

一、（1）$\frac{3}{8}$，（2）$1-e^{-3}$，（3）$\begin{cases}\frac{1}{4}, & -1<y<1 \\ \frac{1}{8}, & -5<y<-1 \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，（4）$\frac{1}{6}$，（5）$(39.51, 40.49)$

二、（1）A，（2）B，（3）C，（4）B，（5）A.

三、**解**：设 $A_i=$ “其中恰有 i 个次品”，$i=1,2$，则

$$P(A_1)=C_4^1\times 0.01\times 0.99^3=0.0388$$

$$P(A_2)=C_4^2\times 0.01^2\times 0.99=0.0006$$

四、、**解**：$f(x,z-x)=\begin{cases}\lambda^2 e^{-\lambda x}, & x<z<2x \\ 0\quad, & \text{其它}\end{cases}$

当 $z<0$, $f_Z(z)=0$

当 $z\ge 0$, $f_Z(z)=\int_{\frac{z}{2}}^{z}\lambda^2 e^{-\lambda x}dx=\lambda(e^{-\frac{\lambda z}{2}}-e^{-\lambda z})$

五、**解**：$EXY=P(X=1,\ Y=1)=\frac{5}{8}$

Y \ X	0	1	
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	

（1）$P(X+Y\le 1)=1-P(X+Y>1)$

$=1-P(X=1,\ Y=1)$

$=\frac{3}{8}.$

（2）$E\max(X,Y)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{5}{8}=\frac{7}{8}.$

六、**解**：设 Y 为三次射击中命中的次数，则 $Y\sim B(3,0.4)$，于是，

$$P(X=0)=P(Y=0)=C_3^0(0.4)^0(0.6)^3=\frac{27}{125}$$

$$P(X=5)=P(Y=1)=C_3^1 0.4\times(0.6)^2=\frac{54}{125}$$

类似地可求出 X 的分布为

X	0	5	10	20
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

所以 X 的数学期望为

$$EX = 0\times\frac{27}{125} + 5\times\frac{54}{125} + 10\times\frac{36}{125} + 20\times\frac{8}{125} = 6.32\text{。}$$

七、解：(1)参数 λ 的矩估计:

$$\mu_1 = EX = \int_0^{+\infty} x\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}x}dx = -\int_0^{+\infty} xd\left(e^{-\frac{1}{\lambda}x}\right)$$

$$= \left[-xe^{-\frac{1}{\lambda}x}\Big|_0^{+\infty} + (-\lambda)e^{-\frac{1}{\lambda}x}\Big|_0^{+\infty}\right] = \lambda,$$

所以参数 λ 的矩估计 $\hat{\lambda} = \overline{X}$ 。

参数 λ 的极大似然估计:似然函数为

$$L(x_1,\cdots,x_n;\lambda) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}x_i}\right) = \frac{1}{\lambda^n}\exp\left\{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i\right\}$$

求对数

$$\ln L(\lambda) = -n\ln\lambda - \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

求导数，令其为零，得似然方程

$$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{n}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}x_i \triangleq 0$$

解似然方程得

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i = \overline{x}$$

故参数 λ 的极大似然估计为 $\hat{\lambda} = \overline{X}$ 。

(2)因为 $E\overline{X} = EX = \lambda$ ，所以 $\hat{\lambda} = \overline{X}$ 是 λ 的无偏估计。

概率论与数理统计模拟试题（三）答案

一、（1）0.8，　（2）$1-e^{-2}$，　（3）$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$，　（4）$-1$，　（5）$(4.804,\ 5.196)$

二、（1）A，　（2）A，　（3）A，　（4）C，　（5）C.

三、**解：** B,W 表示从甲中取出的是黑球，白球的事件. S 表示放入乙袋的球与从乙袋取出的球同色

$$P(S)=P(B)P(S\mid B)+P(W)P(S\mid W)$$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{3}{6}+\frac{2}{5}\times\frac{4}{6}=\frac{17}{30}$$

$$P(B\mid S)=\frac{P(BS)}{P(S)}=\frac{\frac{3}{5}\times\frac{3}{6}}{\frac{17}{30}}=\frac{9}{17}.$$

四、**解：**（1）$1=K\int_0^{\infty}dx\int_0^{\infty}e^{-2x-3y}dy$

$$=\frac{K}{6},\quad K=6$$

（2）$P(X+2Y\le 1)=\int_0^1 dx\int_0^{\frac{1-x}{2}}6\cdot e^{-2x-3y}dy$

$$=3e^{-2}-4e^{-\frac{3}{2}}+1$$

五、**解：** $Y=|X|$的分布函数

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(|X|\le y)$$

$$=\begin{cases} P(\varnothing)=0, & y<0 \\ P(-y\le X\le y), & y\ge 0\end{cases}，$$

而当 $y\ge 0$ 时，

$$F_Y(y)=P(-y\le X\le y)=\Phi(y)-\Phi(-y)=2\Phi(y)-1，$$

所以$Y=|X|$的分布函数

$$F_Y(y)=\begin{cases} 0, & y<0 \\ 2\Phi(y)-1, & y\ge 0\end{cases}$$

从而$Y=|X|$的概率密度

$$f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ 2\varphi(y), & y>0\end{cases}=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, & y>0\end{cases}。$$

六、解：（1）矩估计

$$\mu_1=EX=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x;\alpha)dx=\int_0^1(\alpha+1)x^{\alpha+1}dx=\frac{\alpha+1}{\alpha+2}$$

解出 $\alpha=\dfrac{2\mu_1-1}{1-\mu_1}$，于是 α 的矩估计为 $\hat{\alpha}=\dfrac{2\overline{x}-1}{1-\overline{x}}$

（2）极大似然估计似然函数为

$$L(\alpha)=\prod_{i=1}^{n}(\alpha+1)x_i^{\alpha}=(\alpha+1)^n\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}$$

$$\ln L(\alpha)=n\ln(\alpha+1)+\sum_{i=1}^{n}\alpha\ln x_i\text{，}$$

令 $$\frac{d\ln L(\alpha)}{d\alpha}=\frac{n}{\alpha+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$$

得 α 的极大似然估计为 $\hat{\alpha}=-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}-1$.

七、证：设 $Y\sim N(0,1)$，$Z\sim\chi^2(n)$，且 Y,Z 相互独立，则

$$W=\frac{Y}{\sqrt{Z/n}}\sim t(n)$$

故 X,W 同分布，从而 X^2 与 W^2 同分布，注意到 $Y^2\sim\chi^2(1)$，Y^2,Z 相互独立，所以

$$W^2=\frac{Y^2}{Z/n}\sim F(1,n)\text{，}$$

可知 $X^2\sim F(1,n)$

概率论与数理统计模拟试题（四）答案

一、（1）$\frac{1}{2}$， （2）$\frac{17}{25}$， （3）$\frac{1}{8}$， （4）≥ 0.6， （5）$(4.412,\ 5.588)$

二、（1）C， （2）D， （3）B， （4）C， （5）B.

三、解：$A_i=$第i次取到的是次品

$$P(A_3)=\frac{2}{10}$$

$$P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=\frac{8}{10}\times\frac{7}{9}\times\frac{2}{8}=\frac{7}{45}$$

$$\therefore P(\bar{A}_1\bar{A}_2\mid A_3)=\frac{P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)}{P(A_3)}=\frac{7}{9}.$$

四、解：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy$，将

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & |y|\leq\pi\\ 0\ , & |y|>\pi\end{cases}$$

代入上式并作变量代换$x=z-y$，得

$$f_Z(z)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}f_Z(z-y)dy=\frac{1}{2\pi}\int_{z-\pi}^{z+\pi}f_Z(x)dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}[F_X(z+\pi)-F_X(z-\pi)]$$

$$=\frac{1}{2\pi}[\Phi(\frac{z+\pi-\mu}{\sigma})-\Phi(\frac{z-\pi-\mu}{\sigma})]$$

五、解：$EX=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^2dx\int_0^2x\frac{1}{8}(x+y)dy=\frac{7}{6}$

由密度函数中x,y对称性知$EY=EX=\frac{7}{6}$

$$E(XY)=\int_0^2dx\int_0^2\frac{1}{8}xy(x+y)dy=\frac{4}{3}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EXEY=\frac{4}{3}-\frac{49}{36}=-\frac{1}{36}$$

$$EX^2=\int_0^2dx\int_0^2\frac{1}{8}x^2(x+y)dy=\frac{5}{3}$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{5}{3}-\frac{49}{36}=\frac{11}{36}$$

$$DY = DX = \frac{11}{36}$$

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX \cdot DY}} = \frac{-1/36}{11/36} = -\frac{1}{11}$$

$$D(X+Y) = DX + DY + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$= \frac{11}{36} + \frac{11}{36} - \frac{2}{36} = \frac{5}{9}$$

六、解：（1）矩估计

$$\begin{cases} \mu_1 = EX = \dfrac{\theta_1+\theta_2}{2} \\ \mu_2 = EX^2 = DX + (EX)^2 = \dfrac{(\theta_2-\theta_1)^2}{12} + \mu_1 \end{cases}$$

得 $$\begin{cases} \theta_1 + \theta_2 = 2\mu_1 \\ \theta_2 - \theta_1 = 2\sqrt{3(\mu_2 - \mu_1^2)} \end{cases}$$

$$\theta_1 = \mu_1 - \sqrt{3(\mu_2-\mu_1^2)},\quad \theta_2 = \mu_1 + \sqrt{3(\mu_2-\mu_1^2)}$$

于是 θ_1, θ_2 的矩估计为

$$\hat{\theta}_1 = \bar{x} - \sqrt{3}S^*,\quad \hat{\theta}_2 = \bar{x} + \sqrt{3}S^*$$

其中 $S^* = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$

（2）极大似然估计

X 的概率密度为 $f(x;\theta_1,\theta_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta_2-\theta_1}, & \theta_1 \le x \le \theta_2 \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

令 $x_{(1)} = \min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，$x_{(n)} = \max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$

则似然函数为

$$L = \begin{cases} \dfrac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n}, & \theta_1 \le x_{(1)} \le x_{(n)} \le \theta_2 \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

显然 $\theta_2 - \theta_1$ 越小，L 越大. 但 $\theta_2 - \theta_1 \ge x_{(n)} - x_{(1)}$，

所以 θ_1, θ_2 的极大似然估计分别为

$$\hat{\theta}_1 = x_{(1)}.\quad \hat{\theta}_2 = x_{(n)}$$

七、解： $P = C_3^2(0.1)^2 \times 0.9 + C_3^3(0.1)^3 = 0.028$

$X \sim B(4, 0.028)$

$EX = 0.112$

概率论与数理统计模拟试题（五）答案

一、（1）0.9，　（2）$\frac{1}{3}$，　（3）1，　（4）$\frac{3}{2}$，　（5）36.

二、（1）D，　（2）C ，　（3）C，　（4）C，　（5）C.

三、**解**：设 $B=$“取出的一个球是白球”，再设 A_i = “取到了第 i 箱”，$i = 1,2,3$，则由全概率公式有

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B \mid A_i) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5} + \frac{3}{6} + \frac{5}{8}\right) = \frac{53}{120}$$

四、解：(1)因为 $1 = F(+\infty, +\infty) = C - 0 - 0 + 0$，所以 $C = 1$。

(2)先求边缘分布函数：

$$F_X(x) = \lim_{y \to +\infty} F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-0.5x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \lim_{x \to +\infty} F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-0.5y}, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

因为 $F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$，所以 X, Y 独立。

(3) $P(X > 1, Y > 1) = P(X > 1)P(Y > 1) = [1 - P(X \leq 1)][1 - P(Y \leq 1)]$

$$= e^{-0.5} \cdot e^{-0.5} = e^{-1}\text{。}$$

五、**解**：（1）$EZ = \frac{1}{3}EX + \frac{1}{2}EY = \frac{1}{3}$

$$EZ = \frac{1}{9}DX + \frac{1}{4}DY + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\mathrm{Cov}(X, Y) = 3$$

（2）$E(EZ) = E\left(\frac{X^2}{3} + \frac{XY}{2}\right)$

$$= \frac{1}{3}[DX + (EX)^2] + \frac{1}{2}[\mathrm{Cov}(X, Y) + EXEY]$$

$$=\frac{1}{3}(9+1)+\frac{1}{2}(\rho_{XY}\sqrt{DX\cdot DY}+0)$$

$$=\frac{10}{3}+\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot 3\cdot 4$$

$$=\frac{1}{3}$$

于是 $\quad \mathrm{Cov}(X,Z)=E(XZ)-EXEZ=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0$

故 $\quad \rho_{XZ}=0$

六、解：（1） $EX=1,\ EX^2=1+2\theta$

$$\theta=\frac{1}{2}(EX^2-1)$$

$$\hat{\theta}=\frac{1}{2}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-1)=\frac{1}{2}(\frac{1^2\times 4+2^2\times 4}{10}-1)$$

$$=\frac{1}{2}$$

（2） $L=P(X=0)^2\cdot P(X=0)^4\cdot P(X=2)^4$

$$=\theta^2(1-2\theta)^4\theta^4$$

$$\ln L=6\ln\theta+4\ln(1-2\theta)$$

$$(\ln L)'_\theta=\frac{6}{\theta}+\frac{-8}{1-2\theta}=0\ .\quad \hat{\theta}=\frac{3}{10}\ .$$

七、解：令 $X_i=\begin{cases}1, \\ 0, \end{cases}\qquad (i=1,2,\cdots,n)\ .$

$$P(X_i=1)=\frac{1}{n}$$

$$EX_i=\frac{1}{n}$$

开门次数 $\quad X=X_1+2X_2+\cdots+nX_n$

$$EX=E(X_1+2X_2+\cdots+nX_n)$$

$$=\frac{1}{n}(1+2+\cdots+n)=\frac{n+1}{2}$$

概率论与数理统计模拟试题（六）答案

一、（1）0.45，　（2）$F(x)=\begin{cases}1-(2x^2+2x+1)e^{-2x}, & x>0\\ 0 & ,x\le 0\end{cases}$，　（3）$DY=46$，

（4）$\dfrac{5}{2\sqrt{13}}$，　（5）$(7.4,\ 21.1)$

二、（1）D，　（2）A，　（3）D，　（4）C，　（5）D.

三、**解**：设 $A=$“零件是合格品”

B_i ＝“零件是第 i 台机床加工的”，$i=1,2,3.$

则　$A=B_1A+B_2A$

从而由全概率公式

$$P(A)=P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)$$
$$=\frac{2}{3}(1-0.03)+\frac{1}{3}(1-0.02)=\frac{73}{75}.$$

四、**解**：设 Z 的分布函数为 $F_Z(z)$，则

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(|X-Y|\le z)=\iint\limits_{|x-y|\le z} f(x,y)dxdy$$

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

当 $z\le 0$ 时，$F_Z(z)=0$；

当 $0<z<1$ 时，$F_Z(z)=\iint\limits_{\substack{|x-y|\le z\\ 0\le x,y\le 1}} dxdy=1-(1-z)^2=2z-z^2$

当 $z>1$ 时，$F_Z(z)=1$

$$\therefore\ F_Z(z)=\begin{cases}0 & , & z\le 0\\ 2z-z^2 & , & 0<z<1\\ 1 & , & z\ge 1\end{cases}\qquad f_Z(z)=\begin{cases}2-2z, & 0<z<1\\ 0 & , \quad \text{其它}\end{cases}$$

五、**解**：先将阴性反应的人编号 $1,2,\cdots,46$，引进随机变量 X_k

$$X_k=\begin{cases}1 & \text{若第}k\text{号阴性反应者在第一个阳性反应者}\\ 0 & \text{否}\quad k=1,2,\cdots,46\end{cases}$$

X_k 同分布，且 $X=\sum\limits_{k=1}^{46}X_k$

$$EX = E(\sum_{k=1}^{46} X_k) = 46EX_k = 46P(X_1 = 1)$$

$$= 46\sum_{k=1}^{46} 4C_{45}^{k-1} k!\frac{(49-k)!}{50!} = \frac{4\times 46}{50}\sum_{k=1}^{46}\frac{C_{45}^{k-1}}{C_{49}^{k}} = 9.2$$

$$EX^2 = E(\sum_{k=1}^{46} X_i)^2 = \sum_{k=1}^{46} EX_k^2 + 2\sum_{1\le i<j\le 46} E(X_i X_j)$$

$$= 46EX_1^2 + 2\times(1+2+\cdots+45)E(X_1X_2)$$

$$= 46EX_1 = 2\times\frac{45(1+45)}{2}E(X_1X_2)$$

$$= 46EX_1 + 46\times 45P(X_1 = 1,\ X_2 = 1)$$

$$= 9.2 + 46\times 45\sum_{k=2}^{46} 4C_{44}^{k-2} k!\frac{(49-k)!}{50!}$$

$$= 147.2$$

$$DX = 147.2 - 9.2^2 = 62.56$$

六、解：（1）(μ,σ^2) 的似然函数为

$$L(\mu,\sigma^2) = f(x_1;\mu,\sigma^2)\cdots f(x_n;\mu,\sigma^2)$$

$$= (\frac{1}{2\pi\sigma^2})^{\frac{n}{2}}\frac{1}{X_1\cdots X_n}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\ln X_i - \mu)^2\}$$

$$\ln L(\mu,\sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{n}{2}\ln(2\pi) - \sum_{i=1}^{n}\ln X_i - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\ln X_i - \mu)^2$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\ln X_i - \mu) = 0$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(\ln X_i - \mu)^2 = 0$$

其解为 μ 和 σ^2 的最大似然估计量

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i = \overline{\ln X_i} \qquad \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln X_i - \overline{\ln X_i})^2$$

（2）为求矩估计量，注意到

$EX = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}$ 　　用样本均值 $\overline{X}$ 代替 EX，得 μ 和 σ^2

$DX = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$ 　　用样本方差 S^2 代替 DX 的矩估计

$$\begin{cases} \overline{X} = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2} \\ S^2 = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1) = \overline{X}^2(e^{\sigma^2}-1) \end{cases}$$

由此得σ^2的矩估计量$\hat{\sigma}^2=\ln(1+\frac{S^2}{\overline{X}^2})$，将其代入方程组的第二式得

$$S^2=e^{2\mu}e^{\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)=e^{2\mu}(1+\frac{S^2}{\overline{X}^2}\cdot\frac{S^2}{\overline{x}^2})\qquad e^{2\mu}=\frac{\overline{X}^4}{S_n^2+\overline{X}^2}$$

于是μ的矩估计量为$\hat{\mu}=\ln\frac{\overline{X}^2}{\sqrt{S^2+\overline{X}^2}}$.

七、解： 引进随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$，则有$X=X_1+X_2+\cdots+X_n$，且$EX_i=P\{X_i=1\}=P\{$第i堆恰成一副$\}$

$$P\{\text{第}i\text{堆恰成一副}\}=2n(2n-2)!/(2n)!=\frac{1}{2n-1}$$

故 $$EX_i=\frac{1}{2n-1}\ (i=1,2,\cdots,n)$$

$$EX=EX_1+\cdots+EX_n=\frac{n}{2n-1}$$

$$DX=EX^2-E^2X$$

其中 $$EX^2=E(\sum_{i=1}^n X_i)^2=\sum_{i,j=1}^n E(X_iX_j)$$

右端和式中分为两部分

一部分$i=j$对应的项，由于X_i只取$1,0$，故$X_i^2=X_i$，所以

$$EX_i^2=EX_i=\frac{1}{2n-1}$$

另一部分$i\neq j$，因为X_i,X_j只取$1,0$两值

$$E(X_iX_j)=P\{X_i=1,X_j=1\}\ (i\neq j)$$

$$P(X_i=1,\ X_j=1)=2n(2n-2)(2n-4)!/(2n)!$$
$$=1/\left[(2n-1)(2n-3)\right]$$

因$i\neq j$的项共有$n(n-1)$个，因此

$$EX^2=\frac{n}{2n-1}+\frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)}$$

故 $$DX=EX^2-E^2X=\frac{4n(n-1)^2}{(2n-1)^2(2n-3)}$$

概率论与数理统计模拟试题（七）答案

一、（1）$\frac{19}{20}$，（2）$f_X(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$，（3）$N(0,5)$，（4）$1-\frac{9}{\varepsilon^2}$，（5）$(480.4,\ 519.6)$

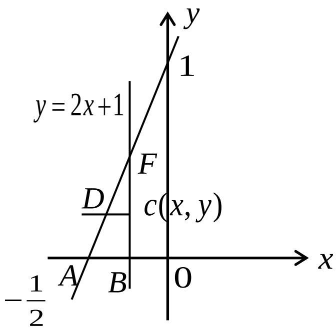
二、（1）B，　（2）D，　（3）C，　（4）D，　（5）C.

三、**解**：设 $A=$挑选的人是色盲，$B=$挑选的人是男人

（1）$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})=\frac{1}{2}(0.05+0.0025)=0.02625$

（2）$P(B|\bar{A})=\frac{P(B)P(\bar{A}|B)}{1-P(A)}=\frac{\frac{1}{2}\times 0.95}{0.97375}=0.4878$

四、**解**：(ξ,η) 的密度函数 $\varphi(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S(B)} & (x-y)\in B\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，



$S(B)$ 为区域 B 的面积

$S(B)=\frac{1}{4}$

$\therefore \varphi(x,y)=\begin{cases}4 & (x,y)\in B\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

$\because$ 当 $x\le -\frac{1}{2}$ 或 $y\le 0$ 时，$\phi(x,y)=0$，

$\therefore F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\varphi(x,y)dxdy=0$，

$\because$ 当 $-\frac{1}{2}<x\le 0$ 且 $0<y\le 2x+1$ 时，$\varphi(x,y)=4\cdot S_{ABCD}$，

又梯形 $S_{ABCD}=\frac{1}{2}(\text{上底}+\text{下底})\times\text{高}$

$$=\frac{1}{2}[(x-\frac{y-1}{2})+(x-\frac{1}{2})]y=\frac{y}{2}(2x-\frac{y}{2}+1)$$

$\therefore F(x,y)=\int_{-\frac{1}{2}}^{x}\int_{0}^{y}\varphi(x,y)dxdy=\int_{-\frac{1}{2}}^{x}\int_{0}^{y}dxdy=4S_{ABCD}$

$$=2y(2x-\frac{y}{2}+1)$$

$\therefore$ 当 $-\frac{1}{2}<x\le 0$，且 $y>2x+1$ 时，$\varphi(x,y)=4$

又 $S_{\Delta FAB}=\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2})(2x+1)$

$\therefore F(x,y)=(2x+1)^2$

$\because$ 当 $x>0$，且 $0<y\le 1$ 时，$\varphi(x,y)=4S_{ABCD}=4\cdot\frac{1}{2}y(\frac{2-y}{2})$

$\therefore F(x,y)=2y(1-\frac{y}{2})$

当 $x>0$，且 $y>1$ 时，$\phi(x,y)=4$，$S=\frac{1}{4}$

$\therefore F(x,y)=1$

$$\therefore F(x,y)=\begin{cases}0 & x\le -\frac{1}{2}\text{或}y\le 0\\ 2y(2x-\frac{y}{2}+1) & -\frac{1}{2}<x\le 0,\ \text{且}0<y\le 2x+1\\ (2x+1)^2 & -\frac{1}{2}<x\le 0,\ \text{且}y>2x+1\\ 2y(1-\frac{y}{2}) & x>0,\ \text{且}0<y\le 1\\ 1 & x>0,\ \text{且}y>1\end{cases}$$

五、解：由题意设可知，$EX=EY=0$，$DX=DY=1$，$\rho_{XY}=\frac{1}{2}$，于是

$$DZ_1=D(aX)=a^2DX=a^2$$

$$DZ_2=D(bX+cY)=b^2DX+c^2DY+2bc\operatorname{cov}(X,Y)$$

$$=b^2+c^2+2bc\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=b^2+c^2+bc$$

$$\operatorname{cov}(Z_1,Z_2)=\operatorname{cov}(aX,bX+cY)$$

$$=ab\operatorname{cov}(X,X)+ac\operatorname{cov}(X,Y)$$

$$=ab+\frac{1}{2}ac$$

再由题意有 $a^2=1,\ b^2+c^2+bc=1,\ ab+\frac{1}{2}ac=0$

解得 $a=\pm 1,\ b=\frac{1}{\sqrt{3}},\ c=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ 或 $a=\pm 1,\ b=-\frac{1}{\sqrt{3}},\ c=\frac{2}{\sqrt{3}}$

六、解：设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，概率密度为 $f(x)$，再设 A_i 表示事件“产品取自第 i 盒”，$i=1,2,\cdots,n$，B 表示事件“$X\le x(x\in R)$”，则

$$F(x)=P(X\le x)=P(B)\underline{\underline{\text{全概率公式}}}\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}P(B|A_i)$$

而 $P(B|A_i)=P(X\le x|A_i)=F_i(x)$，其中 $F_i(x)$ 为参数为 $\lambda_i(\lambda_i>0,i=1,2,\cdots,n)$ 的指数分布的分布函数。因此

$$P(B|A_i)=F_i(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda_i x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

从而 X 的分布密度 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i e^{-\lambda_i x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

X 的数学期望 $EX=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\int_0^{+\infty}x\lambda_i e^{-\lambda_i x}dx=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\lambda}.$

七、解：矩估计：$\mu_1=EX=\int_0^{+\infty}x\cdot\dfrac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}dx=\sqrt{2\pi}\theta/2$

$\theta=\dfrac{2\mu_1}{\sqrt{2\pi}}$ 用 $\bar{X}$ 估计 μ_1 得 $\hat{\theta}=\dfrac{2\bar{X}}{\sqrt{2\pi}}$ 为矩估计.

极大似然估计：$L(\theta)=\begin{cases}\prod\limits_{i=1}^{n}(\dfrac{x_i}{\theta^2}e^{-\frac{x_i^2}{2\theta^2}}) & x_i>0\\ 0 & 其它\end{cases}$

在 $L(\theta)>0$ 时 $\ln L(\theta)=\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i-2\ln\theta-\dfrac{x_i^2}{2\theta^2}=\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i-2n\ln\theta-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}{2\theta^2}$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{2n}{\theta}+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}{\theta^3}\overset{令}{=}0$$

得 $\hat{\theta}=\sqrt{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}{2n}}$ 为极大似然估计.

概率论与数理统计模拟试题（八）答案

一、（1）$1-P$，　（2）$f_Y(y)=\begin{cases}0 & y<3\\ (\frac{y-3}{2})^3 e^{-(\frac{y-3}{2})^2} & y\ge 3\end{cases}$，　（3）$\frac{7}{8}$，

（4）$\frac{11}{12}$，　（5）$(1.817,\ 4.217)$

二、（1）A，　（2）C，　（3）C，　（4）C，　（5）C.

三、**解：**设 $B=$“取4次球，1次出现白球，3次出现黑球”，$H_i=$“罐子中有 i 个白球” $(i=0,1,2,3,4,5)$，由古典概率得

$$P(H_0)=P(H_5)=\frac{1}{2^5}；\ P(H_1)=P(H_4)=\frac{5}{2^5}；\ P(H_2)=P(H_3)=\frac{10}{2^5}$$

由贝努利公式　$P(B|H_0)=0$　　　$P(B|H_1)=C_4^1(\frac{1}{5})(\frac{4}{5})^3$

$$P(B|H_2)=C_4^2(\frac{2}{5})(\frac{3}{5})^3\qquad P(B|H_3)=C_4^1(\frac{3}{5})(\frac{2}{5})^3$$

$$P(B|H_4)=C_4^1(\frac{4}{5})(\frac{1}{5})^3\qquad P(B|H_5)=0$$

由全概率公式　$P(B)=\sum_{i=0}^{5}P(H_i)P(B|H_i)$

$$=\frac{5}{32}C_4^1(\frac{1}{5})(\frac{4}{5})^3+\frac{10}{32}C_4^1(\frac{2}{5})(\frac{3}{5})^3$$

$$+\frac{10}{32}C_4^1(\frac{3}{5})(\frac{2}{5})^3+\frac{5}{32}C_4^1(\frac{4}{5})(\frac{1}{5})^3$$

$$=0.224$$

由贝叶斯公式　$P(H_0|B)=0$　　　$P(H_1|B)=0.1857$

$$P(H_2|B)=0.4821\qquad P(H_3|B)=0.2143$$

$$P(H_4|B)=0.0179\qquad P(H_5|B)=0$$

四、解：（1）当 $x\ge 0$ 时，$f_X(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{12}e^{-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}}dy=\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}$，所以

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}} & x\ge 0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

当 $y\ge 0$ 时 $f_Y(y)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{12}e^{-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}}dx=\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}$，所以

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-\frac{y}{4}} & y\ge 0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

由于 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，故 X 与 Y 相互独立.

（2）由于 X 与 Y 相互独立，故可利用卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=\begin{cases}\int_0^{+\infty}\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}\frac{1}{4}e^{-\frac{z-x}{4}}dx, & z\ge 0\\ 0 & z<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}e^{-\frac{z}{4}}-e^{-\frac{z}{3}} & z\ge 0\\ 0 & z<0\end{cases}$$

五、解：（1）$y\le 1\quad F_Y(y)=0$

$y\ge 2\quad F_Y(y)=1$

$1<y<2\quad F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2+1\le y)=P(-\sqrt{y-1}\le X\le\sqrt{y-1})$

$$=F_X(\sqrt{y-1})-F_X(-\sqrt{y-1})$$

$$F_Y'(y)=f_X(\sqrt{y-1})\cdot\frac{1}{2\sqrt{y-1}}+f_X(-\sqrt{y-1})\frac{1}{2\sqrt{y-1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{y-1}}-1$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{y-1}}-1 & 1<y<2\\ 0 & 其它\end{cases}$$

（2）$E(X^2+1)=EX^2+1=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)dx+\int_0^1 x^2(1-x)dx+1$

$$=\frac{1}{6}+1=\frac{7}{6}$$

六、解：设 X 为 10000 个投保人出险人数，则 $x\sim B(10^4,p)$

（1）已知 $P(X\ge 1)=1-0.999^{10^4}$ 则

$$P(X\ge 1)=1-P(X=0)=1-(1-p)^{10^4}=1-0.999^{10^4}$$

$$\therefore 1-p=0.999\qquad\therefore p=0.001$$

（2）设每位投保人交纳的保费为 a 元，Y 为所得盈利，则

$Y=10000a-(10000X+50000)$

$$EY = 10000a - 10000EX - 50000 = 10^4 a - 10^4 \cdot 10^4 \cdot 10^{-3} - 5 \cdot 10^4 = 10^4(a-15) \ge 0$$

$a \ge 15$ $\quad\therefore$ 每位投保人应交纳的最低保费是15元

七、解：（1）总体 X 的分布函数

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 1 - e^{-2(x-\theta)}, & x > \theta, \\ 0, & x \le \theta. \end{cases}$$

（2）统计量 $\hat{\theta}$ 分布函数

$$\begin{aligned} F_{\hat{\theta}}(x) &= P(\hat{\theta} \le x) = P\left(\min(X_1, X_2, \cdots, X_n) \le x\right) \\ &= 1 - P\left(\min(X_1, X_2, \cdots, X_n) > x\right) \\ &= 1 - P\left(X_1 > x, X_2 > x, \cdots, X_n > x\right) \\ &= 1 - P(X_1 > x)P(X_2 > x)\cdots P(X_n > x) \\ &= 1 - \left[1 - F(x)\right]^n \\ &= \begin{cases} 1 - e^{-2n(x-\theta)}, & x > \theta, \\ 0, & x \le \theta. \end{cases} \end{aligned}$$

（3）$\hat{\theta}$ 的概率密度为

$$f_{\hat{\theta}}(x) = F_{\hat{\theta}}(x) = \begin{cases} 2ne^{-2n(x-\theta)}, & x > \theta, \\ 0, & x \le \theta. \end{cases}$$

因为

$$\begin{aligned} E\hat{\theta} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\hat{\theta}}(x)dx = \int_{\theta}^{+\infty} 2nxe^{-2n(x-\theta)}dx \\ &= \int_{\theta}^{+\infty} 2n(x-\theta)e^{-2n(x-\theta)}dx + \theta\int_{\theta}^{+\infty} 2ne^{-2n(x-\theta)}dx \\ &= \frac{1}{2n} + \theta \ne \theta \end{aligned}$$

所以 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量不具有无偏性。

概率论与数理统计模拟试题（九）答案

一、（1）$1-p-q$，　（2）$\dfrac{2e^y}{\pi(1+e^{2y})}$，　（3）$\dfrac{1}{3}$，　（4）$1-e^{-4}$，　（5）$(8.27,\ 8.39)$

二、（1）C，　（2）B，　（3）B，　（4）B，　（5）D

三、**解：** 记 $A_i=\{$抽到第 i 箱$\}$ $(i=1,2)$；$B_i=\{$第 i 次抽到一等品$\}$ $(i=1,2)$.

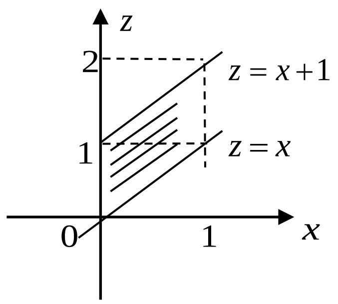
依提意，要求 $P(B_2\mid B_1)$，

$$P(B_1)=P(B_1A_1\cup B_1A_2)=P(A_1)P(B_1\mid A_1)+P(A_1)P(B_1\mid A_2)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{50}+\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{30}=\frac{3}{10}$$
$$P(B_1B_2)=P(B_1B_2\mid A_1)+P(A_2)P(B_1B_2\mid A_2)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot(\frac{10}{50})^2+\frac{1}{2}(\frac{12}{30})^2=\frac{1}{10}$$

故
$$P(B_2\mid B_1)=\frac{P(B_1B_2)}{P(B_1)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}}=\frac{1}{3}$$

四、**解：** $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$

若 $f(x,z-x)>0$，必有 $\begin{cases}0<x<1\\0<z-x<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<x<1\\x<z<x+1\end{cases}$



$$f(x,z-x)=\begin{cases}4x(z-x) & 0<z<1,\ 0<x<z\\4x(z-x) & 1\le z<2,\ z-1<x<1\\0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}z^3 & 0<z<1\\-\dfrac{2}{3}z^3+4z-\dfrac{8}{3} & 1\le z<2\\0 & \text{其它}\end{cases}$$

五、**证明：** 设每年获得的利润为 T，则

$$T(X,S)=\begin{cases} aS, & S\le X \\ aX-b(S-X), & S>X \end{cases}$$
$$=\begin{cases} aS, & S\le X \\ (a+b)X-bS, & S>X \end{cases}$$

从而

$$ET=\int_{-\infty}^{+\infty}T(x,S)f(x)dx$$
$$=\int_{S}^{+\infty}aSf(x)dx+\int_{0}^{S}[(a+b)x-bS)]f(x)dx$$
$$=aS\int_{S}^{+\infty}f(x)dx+(a+b)\int_{0}^{S}xf(x)dx-bS\int_{0}^{S}f(x)dx$$
$$\frac{dET}{dS}=a\int_{S}^{+\infty}f(x)dx-aSf(S)+(a+b)Sf(S)-b\int_{0}^{S}f(x)dx-bSf(S)$$
$$=a\int_{S}^{+\infty}f(x)dx-b\int_{0}^{S}f(x)dx$$
$$=a[1-P(X\le S)]-bP(X\le S)$$

令 $\frac{dET}{dS}=0$ 得

$$P(X\le S)=\frac{a}{a+b}.$$

六、解：（1）似然函数 $L(\alpha^2)=\left(\frac{4}{\sqrt{\pi}\alpha^3}\right)^n\prod_{i=1}^{n}x_i^2e^{-\frac{1}{\alpha^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$ ，$x_i>0,\ i=1,2,\cdots,n$

$$\ln L(\alpha^2)=n\ln\left(\frac{4}{\sqrt{\pi}}\right)-\frac{3n}{2}\ln\alpha^2+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i^2-\frac{1}{\alpha^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

令 $\frac{d\ln L(\alpha^2)}{d(\alpha^2)}=-\frac{3n}{2}\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^4}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0$．解得 $\hat{\alpha}^2=\frac{2}{3n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

（2）$E(\hat{\alpha}^2)=\frac{2}{3n}\sum_{i=1}^{n}EX_i^2=\frac{2}{3}EX_1^2=\frac{2}{3}\int_{0}^{+\infty}\frac{4}{\sqrt{\pi}\alpha^3}x^4e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}dx$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{4\alpha^2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+\infty}t^4e^{-t^2}dt=\alpha^2$$

$\therefore\hat{\alpha}^2$ 是 α^2 的无偏估计量

七、解：$\because P(X>90)=\frac{12}{526}\approx0.0228$

$P(X\le 90)=0.9772$

又 $\because P(X<60)=\frac{84}{526}\approx0.1592$

$$\therefore P(X \le 90) = \Phi(\frac{90-\mu}{\sigma}) = 0.9772$$

$$P(X < 60) = \Phi(\frac{60-\mu}{\sigma}) = 0.1597$$

查表：$\frac{90-\mu}{\sigma} \approx 2.0 \qquad \frac{60-\mu}{\sigma} \approx -1.0$

解得$\sigma = 10,\ \mu = 70$，$\therefore X \sim N(70, 10^2)$

已知录用率为$\frac{155}{526} \approx 0.2947$

$\because P(X > 78) = 1 - \Phi(\frac{78-70}{10}) = 1 - \Phi(0.8) = 1 - 0.7881 = 0.2119$

因为$0.2119 < 0.2947$，$\therefore$此人在被录用之列.

概率论与数理统计模拟试题（十）答案

一、（1）$\frac{1}{6}$，（2）$\frac{(a-2b)^2}{a^2}$，（3）$\frac{147}{512}$，（4）≥ 0.73，（5）-0.02.

二、（1）A，（2）B，（3）B，（4）C，（5）C.

三、**解：** 设$A =$（最后取出白球）$B_i =$（从第i个盒子中取出白球）$i = 1, 2$

（1）$P(A) = (B_1B_2)P(A \mid B_1B_2) + P(B_1\overline{B_2})P(A \mid B_1\overline{B_2}) + P(\overline{B_1}B_2)P(A \mid \overline{B_1}B_2) = \frac{9}{20}$

（2）$P(B_1 \mid A) = \frac{P(B_1A)}{P(A)} = \frac{13}{15}$

四、**解：** 设$F_Y(y)$为Y的分布函数，则由全概率公式知$U = X + Y$的分布函数为

$$\begin{aligned}G_U(u) &= P(U \le u) = P(X + Y \le u) \\ &= 0.3P(X + Y \le u \mid X = 1) + 0.7P(X + Y \le u \mid X = 2) \\ &= 0.3P(Y \le u - 1 \mid X = 1) + 0.7P(Y \le u - 2 \mid X = 2)\end{aligned}$$

由X与Y相互独立,可见

$$\begin{aligned}G_U(u) &= 0.3P(Y \le u - 1 \mid X = 1) + 0.7P(Y \le u - 2 \mid X = 2) \\ &= 0.3F_Y(u-1) + 0.7F_Y(u-2)\end{aligned}$$

由此，得$U = X + Y$的概率密度

$$g(u) = G_U'(u) = 0.3F_Y'(u-1)\times 1 + 0.7F_Y'(u-2)\times 1$$
$$= 0.3 f_Y(u-1) + 0.7 f_Y(u-2)$$

五、解：（1） $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \int_x^{+\infty} xe^{-y}dy, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases} = \begin{cases} xe^{-x}, & x>0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \int_0^y xe^{-y}dx, & y>0 \\ 0, & y\le 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}y^2e^{-y}, & y>0 \\ 0, & y\le 0 \end{cases}$$

（2）$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$

$$= \begin{cases} 0 & , x\le 0 \text{ or } y\le 0 \\ \int_0^y dv\int_0^v ue^{-v}du, & 0<y<x<+\infty \\ \int_0^x du\int_u^y ue^{-v}dv, & 0<x<y<+\infty \end{cases} = \begin{cases} 0 & , x\le 0 \text{ or } y\le 0 \\ 1-(\frac{1}{2}y^2+y+1)e^{-y} & , 0<y<x<+\infty \\ 1-(x+1)e^{-x}-\frac{1}{2}x^2e^{-y}, & 0<x<y<+\infty \end{cases}$$

（3）$P(X+Y\le 1) = \int_0^{\frac{1}{2}} dx\int_x^{1-x} xe^{-y}dy = 1-e^{-\frac{1}{2}}-e^{-1}$

六、解：（1）矩估计：$EX = \int_{\theta-\frac{1}{2}}^{\theta+\frac{1}{2}} xdx = \frac{1}{2}x^2\Big|_{\theta-\frac{1}{2}}^{\theta+\frac{1}{2}} = \theta$

$$\overline{X} = EX = \theta$$

$\theta_1 = \overline{X}$ 为矩估计.

（2）极大似然估计：似然函数

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = \begin{cases} 1 & \theta-\frac{1}{2}\le x_1,\cdots,x_n \le \theta+\frac{1}{2} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \theta-\frac{1}{2}\le \min(x_1,\cdots,x_n)\le x_1\cdots x_n \le \max(x_1\cdots x_n)\le\theta+\frac{1}{2} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

记 $X_1^* = \min(X_1\cdots X_n)$　　$X_n^* = \max(X_1\cdots X_n)$

由极大似然估计定义，得 $\begin{cases} \theta-\frac{1}{2} = X_1^* \\ \theta+\frac{1}{2} = X_n^* \end{cases}$　　$\therefore \theta_2 = \frac{1}{2}[X_1^*+X_n^*]$

（2）$E(\theta_1)=E\overline{X}=EX=\theta$　　θ_1为θ的无偏估计

$$f_{x_1^*}(x)=\begin{cases} n(\frac{1}{2}+\theta-x)^{n-1} & \theta-\frac{1}{2}\le x\le\theta+\frac{1}{2} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_{x_n^*}(x)=\begin{cases} n(x+\frac{1}{2}-\theta)^{n-1} & \theta-\frac{1}{2}\le x\le\theta+\frac{1}{2} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$E(X_1^*)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{x_1^*}(x)dx=\int_{\theta-\frac{1}{2}}^{\theta+\frac{1}{2}}xn(\frac{1}{2}+\theta-x)^{n-1}dx$$

$$=\theta+\frac{1}{2}-\frac{n}{n+1}$$

$$E(X_n^*)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{x_n^*}(x)dx=\int_{\theta-\frac{1}{2}}^{\theta+\frac{1}{2}}x_n(x+\frac{1}{2}-\theta)^{n-1}dx$$

$$=\theta-\frac{1}{2}+\frac{n}{n+1}$$

$$\therefore E(\frac{X_1^*+X_n^*}{2})=\frac{1}{2}(\theta+\frac{1}{2}-\frac{n}{n+1}+\theta-\frac{1}{2}+\frac{n}{n+1})=\theta$$

故$\frac{1}{2}[\max\limits_{1\le i\le n}X_i+\max\limits_{1\le i\le n}X_i]$也是$\theta$的无偏估计.

七、解：$P(Y=m)=\sum_{i=1}^{n}P(X=i)P(Y=m\mid X=i)$

$$=\sum_{i=1}^{m-1}P(X=i)P(Y=m\mid X=i)+\sum_{i=m}^{n}P(X=i)P(Y=m\mid X=i)$$

$$=\sum_{i=m}^{n}\frac{1}{n}\times\frac{1}{i}\qquad m=1,2,\cdots,n$$

$$EY=\sum_{m=1}^{n}mP(Y=m)=\sum_{m=1}^{n}m\cdot(\frac{1}{n}\sum_{i=m}^{n}\frac{1}{i})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{i}(\sum_{m=1}^{i}m)\right]$$

$$=\frac{n+3}{4}$$

概率论与数理统计模拟试题（十一）答案

一、（1）$\dfrac{4}{15}$， （2）$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2x}\sigma y\ln 10}e^{-\frac{(\ln y-\mu\ln 10)^2}{2(\sigma\ln 10)^2}} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$， （3）$\dfrac{25}{16}$，

（4）$\dfrac{1}{2}$， （5）$(39.51,\ 40.49)$

二、（1）C， （2）B， （3）A， （4）A， （5）D.

三、**解**：（1）$P\{Y=m\mid X=n\}=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$，$0\le m\le n;\ n=0,1,2,\cdots$

（2）$P(X=n,Y=m)=P(X=n)P(Y=m\mid X=n)=\dfrac{\lambda^n}{n!}e^{\lambda}C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$，

$0\le m\le n;\ n=0,1,2,\cdots$.

四、**解**：$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X-Y\le z)$

当 $z>0$ 时
$$
\begin{aligned}
F_Z(z)&=\int_0^z dx\int_0^{+\infty}e^{-(x+y)}dy+\int_z^{\infty}dx\int_{x-z}^{+\infty}e^{-(x+y)}dy\\
&=\int_0^z e^{-x}dx\int_0^{+\infty}e^{-y}dy+\int_z^{+\infty}e^{-x}dx\int_{x-z}^{+\infty}e^{-y}dy\\
&=1-e^{-z}+e^{z}\int_z^{+\infty}e^{-2x}dx=1-e^{-z}+\frac{1}{2}e^{-z}\\
&=1-\frac{1}{2}e^{-z}
\end{aligned}
$$

当 $z\le 0$ 时
$$
\begin{aligned}
F_Z(z)&=\int_0^{+\infty}dx\int_{x-z}^{+\infty}e^{-(x+y)}dy=e^{z}\int_0^{+\infty}e^{-2x}dx\\
&=\frac{1}{2}e^{z}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore F_Z(z)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{2}e^{-z} & z>0\\ \dfrac{1}{2}e^{z} & z\le 0\end{cases}\qquad \therefore f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-z} & z>0\\ \dfrac{1}{2}e^{z} & z\le 0\end{cases}\quad -\infty<z<+\infty
$$

五、**解**：三角形区域 $G=\{(x,y):0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ x+y\ge 1\}$ 随机变量 X 和 Y 的联合密度为

$$
f(x,y)=\begin{cases}2 & 若(x,y)\in G\\ 0 & 若(x,y)\overline{\in} G\end{cases}
$$

以 $f_1(x)$ 表示 X 的概率密度，则当 $x\le 0$ 或 $x\ge 1$ 时，$f_1(x)=0$，当 $0<x<1$ 时，有

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_{1-x}^{1} 2dy=2x$$

$$\therefore EX=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3} \qquad EX^2=\int_0^1 2x^3dx=\frac{1}{2}$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$$

同理可得 $EY=\dfrac{2}{3}$, $DY=\dfrac{1}{18}$,

$$EXY=\iint_G 2xydxdy=2\int_0^1 xdx\int_{1-x}^{1} ydy=\frac{5}{12}$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=EXY-EX\cdot EY=\frac{5}{12}-\frac{4}{9}=-\frac{1}{36}$$

于是 $DV=D(X+Y)=DX+DY+2\operatorname{cov}(X,Y)=\dfrac{1}{18}+\dfrac{1}{18}-\dfrac{2}{36}=\dfrac{1}{18}$

六、解：设 $X_1,\cdots,X_n$ 为取的点，则它们相互独立同分布 $U(0,1)$，

$$X=\max\{X_1,\cdots,X_n\}-\min\{X_1,\cdots,X_n\}$$

$$F_{\max}(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^n, & 0<x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases} \qquad F_{\min}(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1-(1-x)^n, & 0<x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

$$f_{\max}(x)=\begin{cases}nx^{n-1}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \qquad f_{\min}(x)=\begin{cases}n(1-x)^{n-1}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$E\max=\int_0^1 nx^n dx=\frac{n}{n+1} \qquad E\min=\int_0^1 n(1-x)^{n-1}xdx=\frac{1}{n+1}$$

$$EX=E\max-E\min=\frac{n-1}{n+1}$$

七、解：原十五的七题

概率论与数理统计模拟试题（十二）答案

一、（1）0.7，（2）$f_Y(y)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$，（3）6，（4）$\dfrac{1}{162}$，（5）(2.690, 2.720)

二、（1）D，　（2）B，　（3）B，　（4）C，　（5）D.

三、**解**：设两次比赛为一轮，$A_i=\{$在一轮比赛中甲得i分$\}$ $(i=0,1,2)$，$B=\{$甲获胜$\}$，

又因为若甲在一轮比赛中得一分，则与下轮比赛中是否获胜无任何关系，即：

$$P(B|A_1)=P(B)\quad 且\quad P(B|A_0)=0，P(B|A_2)=1$$

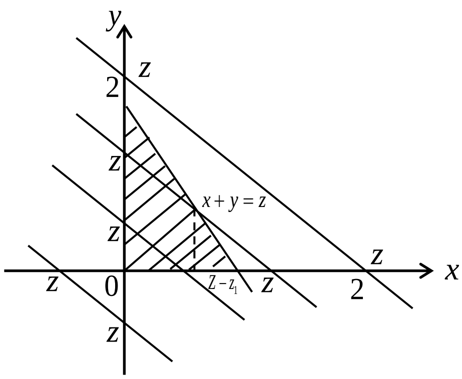
又有　$P(A_0)=\beta^2$，$P(A_1)=\alpha\beta+\beta\alpha=2\alpha\beta$，$P(A_2)=\alpha^2$

由全概率公式　$P(B)=\sum\limits_{i=0}^{2}P(A_1)\cdot P(B|A_i)=0+P(B)\cdot 2\alpha\beta+\alpha^2\cdot 1$

$$\therefore P(B)=\frac{\alpha^2}{1-2\alpha\beta}$$

同理　$P(\overline{B})=\beta^2/1-2\alpha\beta$

四、解：如图所示，因为



$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}$$
$$=P\{X+Y\le z\}$$
$$=\iint\limits_{x+y\le z}f(x,y)dxdy$$

当$z<0$时，$F_Z(z)=0$

当$0\le z<1$时，

$$F_Z(z)=\int_0^z dx\int_0^{z-x}1dy=\int_0^z(z-x)dx=\frac{1}{2}z^2$$

当$1\le z<2$时，

$$F_Z(z)=\int_0^{2-z}dx\int_0^{z-x}dy+\int_{2-z}^{1}dx\int_0^{2(1-x)}dy$$

$$=z(2-z)-\frac{1}{2}(2-z)^2+(z-1)^2$$

当$z \ge 2$时，$F_Z(z)=1$．所以$Z=X+Y$的分布函数为

$$F_Z(z)=\begin{cases} 0, & z<0 \\ \frac{1}{2}z^2, & 0\le z<1 \\ z(2-z)-\frac{1}{2}(2-z)^2+(z-1)^2, & 1\le z<2 \\ 1, & z\ge 2 \end{cases}$$

从而$Z=X+Y$的概率密度为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases} z & 0\le z<1 \\ 2-z & 1\le z<2 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

五、解：（1） $y\le e^2 \quad F_Y(y)=0$

$y\ge e^4 \quad F_Y(y)=1$

$e^2<y<e^4 \quad F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^{2X}\le y)=P(X\le \frac{1}{2}\ln y)=F_X(\frac{1}{2}\ln y)$

$$F_Y'(y)=f_X(\frac{1}{2}\ln y)\cdot\frac{1}{2y}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{2y} & e^2<y<e^4 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

（2） $Ee^{2X}=\int_1^2 e^{2x}\cdot 1dx=\frac{1}{2}e^{2x}\big|_1^2=\frac{1}{2}(e^4-e^2)$

六、解：原十五的六题

七、解：（1） $\mu_1=\frac{1+\theta}{2}$． $\theta=2\mu_1-1 \quad \therefore\hat{\theta}=2\bar{X}-1$． $E\hat{\theta}=2E\bar{X}-1=2\times\frac{\theta+1}{2}-1=\theta$

无偏

（2） $D\hat{\theta}=D(2\bar{X}-1)=4D\bar{X}=4\frac{(\theta-1)^2}{12n}=\frac{(\theta-1)^2}{3n}$

概率论与数理统计模拟试题（十三）答案

(已校订)

一、（1）$\dfrac{6}{7}$（答案：$A=$“至少有一个女孩”，$B=$“至少有一个男孩”，$P(A)=\dfrac{7}{8}=P(B)$，$P(AB)=\dfrac{6}{8}$；$P(B\mid A)=\dfrac{6}{7}$）；（2）ye^{-y}，（3）0.6，（4）$\dfrac{5}{8}$，（5）$(1.042,\ 1.058)$

二、（1）A，（2）C，（3）C，（4）C，（5）B.

三、解： 设 $A_i=\{$有 i 个零件出故障$\}\ (i=1,2,3)$；

$B=\{$仪器不能正常工作$\}$

$C_i=\{$第 i 个零件出故障$\}\ (i=1,2,3)$

则由贝叶斯公式得且 $$P(A_2\mid B)=\frac{P(A_2)P(B\mid A_2)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)}$$

而 $$\begin{aligned}P(A_1)&=P(C_1\overline{C}_2\overline{C}_3)+P(\overline{C}_1C_2\overline{C}_3)+P(\overline{C}_1\overline{C}_2C_3)\\&=P(C_1)P(\overline{C}_2)P(\overline{C}_3)+P(\overline{C}_1)P(C_2)P(\overline{C}_3)+P(\overline{C}_1)P(\overline{C}_2)P(C_3)\\&=0.2\times0.6\times0.4+0.8\times0.4\times0.4+0.8\times0.6\times0.6=0.464\end{aligned}$$

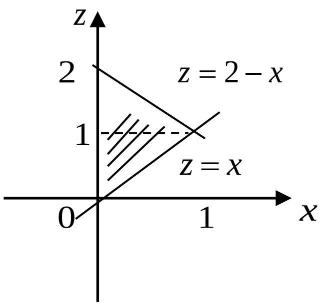
$$\begin{aligned}P(A_2)&=P(C_1C_2\overline{C}_3)+P(C_1\overline{C}_2C_3)+P(\overline{C}_1C_2C_3)\\&=P(C_1)P(C_2)P(\overline{C}_3)+P(C_1)P(\overline{C}_2)P(C_3)+P(\overline{C}_1)P(C_2)P(C_3)\\&=0.2\times0.4\times0.4+0.2\times0.6\times0.6+0.8\times0.4\times0.4=0.296\end{aligned}$$

$$P(A_3)=P(C_1C_2C_3)=P(C_1)P(C_2)P(C_3)=0.2\times0.4\times0.6=0.048$$

所以 $$P(A_2|B)=\frac{0.296\times0.65}{0.464\times0.3+0.296\times0.65+0.048\times0.85}=0.5166$$

四、解： $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$

若 $f(x,z-x)>0$ 必有 $\begin{cases}0<x<1\\0<z-x<2-2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<x<1\\x<z<2-x\end{cases}$



$$f(x,z-x)=\begin{cases}1 & 0<z<1,\ \ 0<x<z\\1 & 1\le z<2,\ \ 0<x<2-z\\0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}z & 0<z<1\\2-z & 1\le z<2\\0 & \text{其它}\end{cases}$$

五、解： (1) $X=1,2,\cdots,m-1$

$$P(X=1)=\frac{2}{m}, P(X=2)=\frac{m-2}{m}\times\frac{2}{m-1},\cdots,P(X=k)=\frac{2(m-k)}{m(m-1)}, k=1,2,\cdots,m-1.$$

(2) $$EX=\sum_{k=1}^{m-1}k\frac{2(m-k)}{m(m-1)}=\frac{2}{m(m-1)}\sum_{k-1}^{m-1}(mk-k^2)=\frac{2}{m(m-1)}\left(m\sum_{k-1}^{m-1}k-\sum_{k-1}^{m-1}k^2\right)$$

$$=\frac{2}{m(m-1)}\left(m\frac{m(m-1)}{2}-\frac{m(m-1)(2m-1)}{6}\right)=m-\frac{2m-1}{3}=\frac{m+1}{3};$$

$$EX^2=\sum_{k=1}^{m-1}k^2\frac{2(m-k)}{m(m-1)}=\frac{2}{m(m-1)}\sum_{k-1}^{m-1}(mk^2-k^3)=\frac{2}{m(m-1)}\left(m\sum_{k-1}^{m-1}k^2-\sum_{k-1}^{m-1}k^3\right)$$

$$=\frac{2}{m(m-1)}\left(m\frac{m(m-1)(2m-1)}{6}-\frac{m^2(m-1)^2}{4}\right)=\frac{2m-1}{3}-\frac{m(m-1)}{2}=\frac{m^2+m}{6}$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{m^2-1}{18}.$$

六、解：矩估计 $EX=kP=\overline{X}$

$$DX=kP(1-P)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

$$\therefore P=1-\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\overline{X}}\qquad k=\frac{\overline{X}}{P}$$

再求极大似然估计

$$L(P)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i)=\prod_{i=1}^{n}C_k^{x_i}P^{x_i}(1-P)^{k-x_i}$$

$$=(\prod_{i=1}^{n}C_k^{x_i})P^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-P)^{nk-\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

$$\ln L(P)=\ln(\prod_{i=1}^{n}C_k^{x_i})+(\sum_{i=1}^{n}x_i)\ln P+(nk-\sum_{i=1}^{n}x_i)\ln(1-P)$$

$$\frac{\alpha\ln L(P)}{\alpha P}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{P}-\frac{nk-\sum_{i=1}^{n}x_i}{1-P}=0$$

$$P=\frac{\overline{X}}{k}.$$

七、解：$G(u,v)=P(0\le u,\ V\le v)=P(2X+1\le\mu,\ e^Y\le v)$

$$=P(2X\le\mu-1,\ Y\le\ln v)=P(X\le\frac{u-1}{2})P(Y\le\ln v)=P(2X+1\le\mu)P(e^Y\le v)$$

$$=P(U\le u)P(V\le v)=G_U(u)G_V(v).$$

$\therefore\ U,V$ 独立.

概率论与数理统计模拟试题（十四）答案

一、（1）$\dfrac{3}{16}$，　（2）　，　（3）305，　（4）$P=\dfrac{1}{4}$，　（5）$\dfrac{1}{3}$

二、（1）C，　（2）D，　（3）D，　（4）C，　（5）C.

三、**解**：设 A,B,C 分别表示从甲、乙、丙袋中取到白球.

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=\frac{18}{25}\qquad P(\bar{B})=\frac{7}{25}$$

$$P(C)=P(B)P(C|B)+P(\bar{B})P(C|\bar{B})=\frac{43}{125}$$

四、**解**：原十五的五题

五、**解**：$Z=\max(X,Y)$. X,Y 独立同分布 $\sim E(\lambda)$. $F(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t}, & t>0\\ 0, & t\le 0\end{cases}$

$$F_Z(z)=F(z)^2=\begin{cases}1-2e^{-\lambda z}+e^{-2\lambda z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}2\lambda(e^{-\lambda z}-e^{-2\lambda z}), & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

$$EZ=2\lambda\int_0^{+\infty}z(e^{-\lambda z}-e^{-2\lambda z})dz=\frac{2}{\lambda}-\frac{1}{2\lambda}=\frac{3}{2\lambda}$$

六、**解**：（1）样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的似然函数为

$$L=\begin{cases}\theta^{-2n}2^n\prod_{i=1}^{n}x_i & 0\le \max\limits_{1\le i\le n}\{x_i\}\le 0\\ \quad 0 & 其他\end{cases}$$

$$\ln L=-2n\ln\theta+n\ln 2+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

$$\frac{d\ln L}{d\theta}=-\frac{2n}{\theta}=0 \quad 无解$$

$\therefore$ 取 $\theta=\max\limits_{1\le i\le 0}[x_i]$，由定义知 θ 为 θ 的最大似然估计.

（2）$g(y)=G'(y)=nF^{n-1}(y)f(y)$

$$X\sim F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{x^2}{\theta^2} & 0\le x<\theta\\ 1 & x\ge\theta\end{cases}$$

$$\therefore\theta\sim g(y)=\begin{cases}n(\dfrac{y^2}{\theta^2})^{n-1}\dfrac{2y}{\theta^2} & 0\le y<\theta\\ \quad 0 & 其他\end{cases}$$

$E(\theta)=\int_{-\infty}^{+\infty}yg(y)dy=\int_0^{\theta}ny(\frac{y^2}{\theta^2})^{n-1}\frac{2y}{\theta^2}dy=\frac{2n}{2n+1}\theta\ne\theta$，$\theta$ 不是 θ 的无偏估计.

（3）若取 $\theta_1=\frac{2n+1}{2n}\max\limits_{1\le i\le n}\{x_i\}=\frac{2n+1}{2n}\theta$

因为 $E(\theta_1)=\frac{2n+1}{2n}E(\theta)=\theta$

$\therefore\theta_1$ 为 θ 的无偏估计量.

七、解：设 $X=\{$该人获奖的数额$\}$，可能取值为6（取到3个标有2的筹码），9{取到2个标有2的筹码，一个标有5的筹码)，12(取到2个标有5的筹码，一个标有2的筹码)，故由古典概率公式计算可得

$$P(X=6)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{56}{120}=\frac{7}{15}$$

$$P(X=9)=\frac{C_8^3C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{56}{120}=\frac{7}{15}$$

$$P(X=12)=\frac{C_8^1C_2^2}{C_{10}^3}=\frac{8}{120}=\frac{1}{15}$$

故 $$EX=6\times\frac{7}{15}+9\times\frac{7}{15}+12\times\frac{1}{15}=\frac{117}{15}=7.8$$

$$EX^2=6^2\times\frac{7}{15}+9^2\times\frac{7}{15}+12^2\times\frac{1}{15}=\frac{963}{15}=64.2$$
$$DX=EX^2-(EX)^2=64.2-7.8^2=3.36$$

概率论与数理统计模拟试题（十五）答案

一、（1）$\frac{3}{5}$，（2）$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{4}\sqrt{y}e^{-\sqrt{y}}, & y\geq 0\\ 0, & y<0\end{cases}$，（3）15，（4）$\frac{2}{3}$，（5）$(-\infty,\ 12.55)$

二、（1）D，（2）A，（3）C，（4）B，（5）B.

三、**解**：原十五的三题

四、**解**：$X\sim B(2,\frac{1}{3})$ $Y\sim U[0,1]$ $F_Y(y)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & 0\leq x<1\\ 1, & x\geq 1\end{cases}$

$$F_Z(z)=P(Z\leq z)=P(X+Y\leq z)$$
$$=P(X=0)P(Y\leq z)+P(X=1)P(Y\leq z-1)+P(X=2)P(Y\leq z-2)$$
$$=\frac{4}{9}F_Y(z)+\frac{4}{9}F_Y(z-1)+\frac{1}{9}F_Y(z-2)$$
$$=\begin{cases}0, & z<0\\ \frac{4}{9}z, & 0\leq z<1\\ \frac{4}{9}+\frac{4}{9}(z-1)=\frac{4}{9}z, & 1\leq z<2\\ \frac{1}{9}z+\frac{2}{3}, & 2\leq z<3\\ 1, & z\geq 3\end{cases}=\begin{cases}0, & z<0\\ \frac{4}{9}z, & 0\leq z<2\\ \frac{1}{9}z+\frac{2}{3}, & 2\leq z<3\\ 1, & z\geq 3\end{cases}$$

$$EZ=E(X+Y)=EX+EY=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$$

$$DZ=D(X+Y)=DX+DY=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{12}=\frac{19}{36}$$

五、解：$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X-Y\le z)$

当 $z>0$ 时 $F_Z(z)=\int_0^z dx\int_0^{+\infty}e^{-(x+y)}dy+\int_z^{\infty}dx\int_{x-z}^{+\infty}e^{-(x+y)}dy$

$$=\int_0^z e^{-x}dx\int_0^{+\infty}e^{-y}dy+\int_z^{+\infty}e^{-x}dx\int_{x-z}^{+\infty}e^{-y}dy$$

$$=1-e^{-z}+e^z\int_z^{+\infty}e^{-2x}dx=1-e^{-z}+\frac{1}{2}e^{-z}$$

$$=1-\frac{1}{2}e^{-z}$$

当 $z\le 0$ 时 $F_Z(z)=\int_0^{+\infty}dx\int_{x-z}^{+\infty}e^{-(x+y)}dy=e^z\int_0^{+\infty}e^{-2x}dx$

$$=\frac{1}{2}e^z$$

$$\therefore F_Z(z)=\begin{cases}1-\frac{1}{2}e^{-z} & z>0\\ \frac{1}{2}e^z & z\le 0\end{cases}$$

$$\therefore f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-z} & z>0\\ \frac{1}{2}e^z & z\le 0\end{cases}\qquad -\infty<z<+\infty$$

六、解：矩估计：$\mu_1=EX=\int_c^{+\infty}x\theta c^\theta x^{-(\theta+1)}dx=\dfrac{c\theta}{\theta-1}$

$\theta=\dfrac{\mu_1}{\mu_1-c}$，用 $\bar{X}$ 估计 μ_1 得 $\hat{\theta}=\dfrac{\bar{X}}{\bar{X}-c}$ 为矩估计.

极大似然估计：$L(\theta)=\begin{cases}\prod_{i=1}^n(\theta c^\theta x_i^{-(\theta+1)}), & x_i>c\\ 0\ , & \text{其他}\end{cases}$

当 $L(\theta)>0$ 时，

$$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^n[\ln\theta+\theta\ln c-(\theta+1)\ln x_i]=n\ln\theta+n\theta\ln c-(\theta+1)\sum_{i=1}^n\ln x_i$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta}+n\ln c-\sum_{i=1}^n\ln x_i\overset{令}{=}0\Rightarrow\hat{\theta}=n/(\sum_{i=1}^n\ln x_i-n\ln c)\ \text{为极大似然估计.}$$

七、解：设 X 表示首次掷得5点的次数，则 X 的所有可能值为$1,2,\cdots$取得

$\{X=1\}$表示第1次掷得5点，则 $P\{X=1\}=\dfrac{1}{6}$；

$\{X=2\}$表示第1次未掷得5点，第二次掷得5点，则 $P\{X=2\}=\dfrac{5}{6},\dfrac{1}{6},\cdots$；

$\{X=k\}$表示第1次，第2次$\cdots$第$k-1$次未掷得5点，第k次掷得5点，则 $P\{X=k\}=(\dfrac{5}{6})^{k-1}\cdot\dfrac{1}{6}$，所以 X 的分布律为

$$\rho(X=k)=(\frac{5}{6})^{k-1}\cdot\frac{1}{6}\ \ (k=1,2,3,4,\cdots)$$

$$\because EX=\sum_{k=1}^{\infty}k(\frac{5}{6})^{k-1}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot(\frac{5}{6})^{k-1}，又\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{1}{1-x}\ \ (|x|<1)$$

于是 $(\sum_{k=0}^{\infty}x^k)'=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\alpha^{k-1}=(\dfrac{1}{1-x})'=\dfrac{1}{(1-x)^2}\ \ (|x|<1)$

所以 $EX=\dfrac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty}k(\dfrac{5}{6})^{k-1}=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{(1-\frac{5}{6})^2}=6$