概率论与数理统计模拟试题（九）

一、填空题（每小题 3 分，共 5 小题，满分 15 分）

1．设事件 A 与 B 互不相容，且 $P(A)=p,\ P(B)=q$，求下列事件的概率，则 $P(\overline{A}\ \overline{B})=$______.

2．设随机变量 X 具有 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi(1+x^2)} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$，则 $Y=\ln X$ 的概率密度 $f_Y(y)=$__________.

3．设随机变量 X 的分布列为 $P(X=k)=A\left(\dfrac{1}{3}\right)^k, k=1,2,3,\cdots$

则 $P(X>1)=$__________.

4．设 r. v X,Y 相互独立，且均服从参数为 2 的指数分布，则 $P\{\min(X,Y)\le 1\}=$______.

5．为确定某种溶液中杂质的浓度，共取样 4 次，测得平均值 $\overline{x}=0.834$，样本标准差 $S=0.0003$，设总体服从 $N(\mu,\sigma^2)$，求 μ 的置信区间______$(\alpha=0.05)$.

二、选择题（每小题 3 分，共 5 小题，满分 15 分）

（每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项的字母填在题后的括号内）

1．5 人以摸彩方式决定谁能得一张电影票，今设 A_i 表示第 i 个人摸到 $(i=1,2,3,4,5)$，则下列结果中有一个不正确，它是（　　）.

（A）$P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)=\dfrac{1}{3}$；（B）$P(\overline{A}_1A_2)=\dfrac{1}{5}$；（C）$P(\overline{A}_1A_2)=\dfrac{1}{4}$；（D）$P(A_5)=\dfrac{1}{5}$.

2．设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，且 $f(-x)=f(x),\ F(x)$ 是 X 的分布函数，则对任意实数 a 有（　　）

（A）$F(-a)=1-\int_0^a f(x)dx$；　（B）$F(-a)=\dfrac{1}{2}-\int_0^a f(x)dx$；

（C）$F(-a)=F(a)$；　（D）$F(-a)=2F(a)-1$.

3．设 X,Y 的方差存在，且不等于 0，则 $D(X+Y)=DX+DY$ 是 X,Y（　　）

（A）不相关的充分条件，但不是必要条件；　（B）独立的必要条件，但不是充分条件；

（C）不相关的必要条件，但不是充分条件；　（D）独立的充分必要条件.

4．设总体 $X\sim N(0,1),\ X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为 X 的样本，则下列统计量的分布中不正确

的是（　　）.

（A）$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$；

（B）$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(0,1)$；

（C）$\frac{\sqrt{n-1}X_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} X_i^2}} \sim t(n-1)$；

（D）$\frac{(\frac{n}{2}-1)\sum_{i=1}^{2} X_i^2}{\sum_{i=3}^{n} X_i^2} \sim F(2,n-2)$

5．设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，即 $X \sim f(x)$，期望 μ 与方差 σ^2 都存在，样本 $X_1 \cdots X_n (n>1)$ 取自 $X, \overline{X}$ 是样本均值，则有（　　）.

（A）$\overline{X} \sim f(x)$；

（B）$\min\limits_{1\le i\le n} X_i \sim f(x)$；

（C）$\max\limits_{1\le i\le n} X_i \sim f(x)$；

（D）$(X_1, X_2, \cdots, X_n) \sim \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$

三、（10 分）两箱同种类的零件，第1箱装50件，其中10件一等品，第2箱装30件，其中12件一等品，今通过抛掷一枚均匀的分布来决定从哪一箱中取零件，现若取出的第1件是一等品，并把它放回，问从同一箱中抽取的第2件也是一等品的概率.

四、（10 分）设(X,Y)有概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}4xy & 0<x<1,\ 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

求$Z=X+Y$的概率密度 $f_Z(z)$.

五、（10 分）国际市场上每年对我国某种商品的需求量 X 为连续型的随机变量，其概率密度为 $f(x)$，且当 $x \le 0$ 时，$f(x) = 0$，当 $x > 0$ 时，$f(x) > 0$。已知每售出一吨该商品，可净获利 a 美元 $(a > 0)$，每积压一吨净损失 b 美元 $(b > 0)$，试证明为获得最大的期望利润，每年准备的货源 S 应满足

$$P(X \le S) = \frac{a}{a+b}.$$

六、（14 分）设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{\sqrt{\pi}\alpha^3}x^2e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}, & x>0,\ \alpha>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，$X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

（1）求 α^2 的极大似然估计量；　　（2）$\hat{\alpha}^2$ 是否是 α^2 的无偏估计量？为什么？.

七、（6 分）某单位招聘155人，按考试成绩录用，共有526人报告，假设报名者的成绩 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，已知90分以上有12人，60分以下有84人，若从高分到低分依次录取，某人成绩为78分，问此人是否在被录取之列？