概率论与数理统计模拟试题（五）

一、填空题（每小题 3 分，共 5 小题，满分 15 分）

1．设事件A、B仅发生一个的概率为0.3，且$P(A)+P(B)=0.5$，则A、B至少有一个不发生的概率为__________.

2．设在每次试验中，事件A出现的概率均为P，若已知在三次独立试验中A至少出现一次的概率等于$\dfrac{19}{27}$，则$P=$____________.

3．已知随机变量X和Y的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0,\ y>0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

则$E(XY)=$____________.

4．总体$X\sim E(\lambda),\ X_1,\cdots,X_n$为简单随机样本，其均值为$\bar{X}$，方差$S^2$．若$\bar{X}+(3-2a)\lambda S^2$是$\dfrac{1}{\lambda}$无偏估计，则$a=$__________.

5．总体$X\sim N(\mu,\sigma^2),\ \sigma^2=9$，抽取简单随机样本$X_1,\cdots,X_n$，若$(\bar{X}-0.98,\bar{X}+0.98)$为$\mu$的置信度$0.95$下的置信区间，则$n=$________.

二、选择题（每小题 3 分，共 5 小题，满分 15 分）

（每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项的字母填在题后的括号内）

1．对任意的两个事件A和B，与$A\cup B=B$不等价的是（　　）

（A）$A\subset B$;　　（B）$\bar{B}\subset\bar{A}$;　　（C）$A\bar{B}=\Phi$;　　（D）$\bar{A}B=\Phi$.

2．设随机变量X,Y相互独立，方差存在，以下结论正确的是（　　）

（A）$D(XY)=DXDY$；　　（B）$D(XY)\le DXDY$；

（C）$D(XY)\ge DXDY$；　　（D）前三者都不一定成立.

3．设$X\sim N(2,4),\ Y\sim N(2,5),\ E(XY)=6$，则（　　）

（A）X,Y不相关；　　（B）X,Y相互独立；

（C）$D(X-Y)=5$；　　（D）$D(X-Y)=13$.

4．随机变量X,Y不相关，$DX=DY$，则X与$X+Y$相关系数为（　　）

（A）-1　　（B）0　　（C）$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　（D）1

5．总体 $X \sim N(\mu,4)$，抽取简单随机样本 $X_1,\cdots,X_{17}$，其均值为 $\bar{X}$，方差 S^2，若 $P(S^2 > a)=0.01$，则 $E(S^2-a)+D(S^2-a)=$（　　）

（A）2　　（B）4　　（C）-2　　（D）-4

三、（10 分）三个箱子，第一个箱子中有 4 个黑球，1 个白球；第二个箱子中有 3 个黑球，3 个白球；第三个箱子中有 3 个黑球，5 个白球. 现随机地取一个箱子，再从这个箱子中取出一个球，求该球是白球的概率？

四、（10 分）一台电子仪器由两个部件组成，以 X 和 Y 分别表示两个部件的寿命(单位：千小时)，已知 X 与 Y 的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases} C-e^{-0.5x}-e^{-0.5y}+e^{-0.5(x+y)}, & x\geq 0, y\geq 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

（1）求常数 C；（2）问随机变量 X 与 Y 是否独立？为什么？（3）求两个部件的寿命都超过1000 小时的概率？

五、（10 分）已知随机变量 X 和 Y 分别服从 $N(1,\ 3^2)$ 和 $N(0,\ 4^2)$，且 X 和 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=-\dfrac{1}{2}$，设 $Z=\dfrac{X}{3}+\dfrac{Y}{2}$，（1）求 EZ 和 DZ （2）求 ρ_{XZ}

六、（14 分）总体 X 分布列为 $\begin{array}{c|ccc} X & 0 & 1 & 2 \\ \hline P & \theta & 1-2\theta & \theta \end{array}$ ，抽取简单随机样本中有 2 个 0，4 个 1，4 个 2. 求θ的矩估计，最大似然估计值.

七、（6 分）某人有一串钥匙共 n 把，其中只有一把能开家门，他任意取一把去开门，直至门开为止，若他把每次用过的钥匙分开，求所需开门次数的数学期望.

把所有 n 把钥匙排成列，则能打开门的那一把钥匙排在 n 个位置中的每一个位置都是等可能的，设恰在第 k 次打开门，则 $P(\xi=k)=\dfrac{1}{n}$。

$$E\xi=1\cdot\frac{1}{n}+2\cdot\frac{1}{n}+3\cdot\frac{1}{n}+\cdots+n\cdot\frac{1}{n}=\frac{n+1}{2}$$

$$D\xi=(1-\frac{n+1}{2})^2\cdot\frac{1}{n}+(2-\frac{n+1}{2})^2\cdot\frac{1}{n}+(3-\frac{n+1}{2})^2\cdot\frac{1}{n}+\cdots+(k-\frac{n+1}{2})^2\cdot\frac{1}{n}$$

$$+\cdots(n-\frac{n+1}{2})^2\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{n}[(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)-(n+1)(1+2+3+\cdots+n)+(\frac{n+1}{2})^2\cdot n]$$

$$=\frac{1}{n}\cdot[\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{n(n+1)^2}{2}+\frac{n(n+1)^2}{4}]=\frac{n^2-1}{12}$$