概率论与数理统计模拟试题（八）

一、填空题（每小题 3 分，共 5 小题，满分 15 分）

1．设 A,B 为两事件，且 $P(A)=P$，$P(AB)=P(\overline{A}\ \overline{B})$，则 $P(B)=$______.

2．设随机变量 X 的密度为 $f_X(x)=\begin{cases}2x^3e^{-x^2} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$，求 $Y=2X+3$ 的概率密度______.

3．设 (X,Y) 服从区域 $G=\{(x,y)\,|\,0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 2\}$ 上的均匀分布，令 $Z=\max(X,Y)$，则 $P(Z>\frac{1}{2})=$_________.

4．设随机变量 $X\sim U[0,1],Y\sim N(2,2^2)$，且 X 与 Y 独立，令 $Z=X+Y$，则根据切比雪夫不等式 $P(|Z-2.5|<7)\geq$ ______.

5．测量零件尺寸产生的误差 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，σ 未知，今测量10个零件，得误差的样本均值和样本方差分别为 $\overline{X}=1.2,\ S^2=8.62$，则 μ 的置信度为0.99 的置信区间是______.

二、选择题（每小题 3 分，共 5 小题，满分 15 分）

（每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项的字母填在题后的括号内）

1．设 A,B 为两个事件，$P(A)\neq P(B)>0$，且 $B\subset A$，则（　　）一定成立.

（A）$P(A|B)=1$；　（B）$P(B|A)=1$；　（C）$P(B|\overline{A})=1$；　（D）$P(A|\overline{B})=0$.

2．如下四个函数，哪个是随机变量的分布函数（　　）.

（A）$F(x)=\begin{cases}0 & x<-2\\ \frac{1}{2} & -2\leq x<0\\ 2 & x\geq 0\end{cases}$；　（B）$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \sin x & 0\leq x<\pi\\ 1 & x\geq\pi\end{cases}$；

（C）$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \sin x & 0\leq x<\frac{\pi}{2}\\ 1 & x\geq\frac{\pi}{2}\end{cases}$；　（D）$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x+\frac{1}{3} & 0\leq x\leq\frac{1}{2}\\ 1 & x>\frac{1}{2}\end{cases}$.

3．设 (X,Y) 有概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}xe^{-x(y+1)} & x>0,y>0\\ 0 & 其它\end{cases}$，则关于 Y 的边缘概率密

度为（　　）

（A）$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y+1} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$　　（B）$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y-1} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$

（C）$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(y+1)^2} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$　　（D）$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(y-1)^2} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$

4．设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$，对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，数 u_α 满足 $P(X>u_\alpha)=\alpha$。若 $P(|X|<x)=\alpha$，则 x 为（　　）

（A）$u_{\alpha/2}$；　（B）$u_{1-\alpha/2}$；　（C）$u_{\frac{1-\alpha}{2}}$；　（D）$u_{1-\alpha}$

5．总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, σ^2 已知，$X_1,\cdots,X_n$ 为样本，在水平 $\alpha=0.10$ 下检验假设 $H_0:\mu=5$，则接受 H_0 等价于（　　）.

（A）$\overline{X}=5$；　（B）$|\mu-5|<0.10$；

（C）$\overline{X}-\mu_{0.05}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}<5<\overline{X}+\mu_{0.05}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$；　（D）$\overline{X}\ne 5$.

三、（10 分）在一个罐子中有 5 个球，颜色有黑、白两种，从罐子中取 4 次球，每次取一个，取出后均放回罐子中，1 次出现了白球，3 次出现了黑球. 如在试验前每个球是白、黑等可能的，求在罐子对白球数的各种假设的概率？

四、（10 分）设(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{12}e^{-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}} & x\ge 0,\ y\ge 0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，

求：（1） X,Y 的边缘概率密度，问 X,Y 是否相互独立？　（2）$Z=X+Y$ 的概率密度.

五、（10 分）已知随机变量 X 有概率密度 $f(x)=\begin{cases}1+x & -1\le x<0\\ 1-x & 0\le x\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$

（1）求 $Y=X^2+1$ 的概率密度 $f_Y(y)$，（2）求 $E(X^2+1)$.

六、（6 分）购买某种保险，每个投保人每年度向保险公司交纳保费 a 元，若投保人在购买保险的一年度内出险，则可以获得 10000 元的赔偿金. 假定在一年度内有 10000 人购买了这种保险，且各投保人是否出险相互独立. 已知保险公司在一年度内至少支付赔偿金 10000 元的概率为 $1-0.999^{10^4}$.

（1）求一投保人在一年度内出险的概率 p.；

（2）设保险公司开办该项险种业务除赔偿金外的成本为 50000 元，为保证盈利的期望不小于 0，求每位投保人应交纳的最低保费.

七、（14 分）设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x>\theta \\ 0, & x\le\theta\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 是未知参数。从总体 X 中抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，记 $\hat{\theta}=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$。

（1）求总体 X 的分布函数 $F(x)$；

（2）求统计量 $\hat{\theta}$ 分布函数 $F_{\hat{\theta}}(x)$；

（3）如果用 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量，讨论它是否具有无偏性。