概率论与数理统计模拟试题（十二）

一、填空题（每小题 3 分，共 5 小题，满分 15 分）

1．已知 $P(A)=0.5,\ P(B)=0.6,\ P(B|A)=0.8$，则 $P(A\cup B)=$______.

2．设随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$，则 $Y=|X|$ 的概率密度______.

3. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布且 $P(X=3)=\dfrac{4}{3}e^{-2}$，则 $EX^2=$________.

4．二维随机向量 (X,Y) 服从 $D=\left\{(x,y)\,|\,x+y\geq 1,0<x<1,0<y<1\right\}$ 有限区域上的均匀分布，则根据切比晓夫不等式有：$P\left\{\left|\ X+Y-\dfrac{4}{3}\right|\geq 3\right\}\leq$______.

5．已知铝的密度 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，测量了 16 次，得 $\bar{x}=2.705$，$s=0.029$，在置信度 0.95 下，μ 的置信区间为_________.

二、选择题（每小题 3 分，共 5 小题，满分 15 分）

（每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项的字母填在题后的括号内）

1．袋中有 5 个黑球，3 个白球，大小相同，一次随机摸出 4 个球，其中恰有 3 个白球的概率为（　　）.

（A）$\dfrac{3}{8}$；　（B）$(\dfrac{3}{8})^5(\dfrac{1}{8})$；　（C）$(\dfrac{3}{8})^3(\dfrac{1}{8})$；　（D）$\dfrac{5}{C_8^4}$

2．$P(C=k)=c\lambda^k e^{-\lambda}/k!\ (k=0,2,4,\cdots)$ 是随机变量 X 的概率函数，则 λ,c 一定满足（　　）.

（A）$\lambda>0$；　（B）$c>0$；　（C）$c\lambda>0$；　（D）$c>0$ 且 $\lambda>0$.

3．(X,Y) 为二维随机变量，则 $U=X+Y,\ V=X-Y$ 不相关的充要条件为（　　）

（A）$EX=EY$　（B）$EX^2-(EX)^2=EY^2-(EY)^2$

（C）$EX^2=EY^2$　（D）$EX^2+(EX)^2=EY^2+(EY)^2$

4．设随机变量 X 和 Y 都服从正态分布，且它们不相关，则（　　）

（A）X 与 Y 一定独立；　（B）（X，Y）服从二维正态分布；

（C）X 与 Y 未必独立；　（D）X+Y 服从一维正态分布

5．设随机变量 $X\sim N(0,1),\quad Y\sim N(1,4),$ 且 $\rho_{XY}=1,$ 则（　　）

（A）$P\{Y=-2X-1\}=1$；　（B）$P\{Y=2X-1\}=1$；

（C）$P\{Y=-2X+1\}=1$；　（D）$P\{Y=2X+1\}=1$.

三、（10 分）甲、乙进行比赛，每进行一次，胜者得一分，在一次比赛中，甲“胜”的概率为α，乙胜的概率为$B(\alpha+\beta=1)$．独立地进行比赛到有一人超过对方两分就停止（例如在乒乓球比赛中，双方比分为$10:10$时，开始交替发球，直到有一方超过对方两分为止），多得两分者为胜．试求甲、乙获胜的概率（设每一次比赛均可分出胜负）．

四、（10 分）设二维随机变量(X,Y)的概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1;\quad 0<y<2(1-x)\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求随机变量$Z=X+Y$的概率密度.

五、（10 分）已知随机变量 X 服从 $(1,2)$ 上的均匀分布，求（1）$Y=e^{2X}$ 的概率密度 $f_Y(y)$，

（2）Ee^{2X}.

六、（6 分）设随机变量 $X \sim U\left[0,1\right]$，求（1）$Y = X^2 - 4X + 1$的密度函数；（2）$2X$ 与 Y 之相关系数.

七、（14 分）设总体 $X \sim U[1,\ \theta]$，$X_1, \cdots, X_n$ 为简单随机样本.

（1）求 θ 的矩估计 $\hat{\theta}$，并问 $\hat{\theta}$ 是否为 θ 的无偏估计？

（2）求估计量的方差 $D\hat{\theta}$.