概率论与数理统计模拟试题（十）

一、填空题（每小题 3 分，共 5 小题，满分 15 分）

1. 设相互独立的三个事件 A,B,C 满足条件：$P(A)=0.4,\ P(B)=0.5,\ P(C)=0.5$，则 $P(A-C\,|\,AB\cup C)=$____________.

2．在一张打上方格的纸上随机地投一枚硬币，若方格的长度为 a，硬币的直径为 $2b\ (2b<a)$ 且硬币落在每一处是等可能的，则硬币与方格线不相交的概率为__________.

3. 设 r. v X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1\\ 0, & 其它,\end{cases}$ 对 X 进行三次独立重复观察，用 Y 表示事件 $(X\le\frac{1}{2})$ 出现的次数，则 $P(Y=1)=$_______.

4．已知随机变量 X 的分布列

X	1	2	3
P	0.2	0.3	0.5

试利用契比雪夫不等式估计事件 $\{|X-EX|<1.5\}$ 的概率______.

5．设随机变量 X 和 Y 的联合概率分布为

Y \ X	-1	0	1
0	0.07	0.18	0.15
1	0.08	0.32	0.20

则 $Cov(X^2,Y^2)=$__________.

二、选择题（每小题 3 分，共 5 小题，满分 15 分）

（每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项的字母填在题后的括号内）

1．设 $AB\subset C$，则（　　）成立.

（A）$\overline{AB}\supset\bar{C}$　（B）$A\subset C$ 且 $B\subset C$　（C）$\overline{A\cup B}\supset\bar{C}$　（D）$A\subset C$ 或 $B\subset C$.

2．下列函数中可以作为分布函数的是（　　）

（A）$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{2} & 0\le x\le 1\\ \frac{3}{4} & 1<x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$　　（B）$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \sin x & 0\le x<\frac{\pi}{4}\\ x & \frac{\pi}{4}\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$

（C）$F(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x)}{1+x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$　　（D）$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ \frac{x^2}{2} & 0<x\le 1\\ -\frac{3}{2}+2x-\frac{x^2}{2} & 1<x\le 2\\ 2 & x>2\end{cases}$

3．设随机变量 X,Y 的方差存在，则随机变量 $\xi=X+Y$ 与 $\eta=X-Y$ 不相关的充分必要条件为（　　）.

（A）$EX=EY$；　　（B）$EX^2-(EX)^2=EY^2-(EY)^2$；

（C）$EX^2=EY^2$；　　（D）$EX^2+(EX)^2=EY^2+(EY)^2$.

4．设 (ξ,η) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi} & x^2+y^2\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

则 ξ 与 η 为（　　）的随机变量.

（A）独立同分布；　　（B）独立不同分布；

（C）不独立同分布；　　（D）不独立也不同分布.

5．设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，μ，σ^2 为未知数，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是来自 X 的样本，则下列结论正确的是（　　）.

（A）$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 服从 $\chi^2(n-1)$ 分布；

（B）$S_1^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 服从 $\chi^2(n-1)$ 分布；

（C）$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 服从 $\chi^2(n-1)$ 分布；　　（D）$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 服从 $\chi^2(n)$ 分布

三、（10 分）有两个盒子，第一个盒子中装有 6 个白球，4 个黑球；第二个盒子中装有 3 个白球， 7 个黑球。现从这两个盒子中各取一球放在一起，再从中任取一球。问（1）此球为白球的概率，（2）若此球为白球，求从第一个盒子中取出的球是白球的概率。

四、（10 分）设随机变量 X 与 Y 相互独立, 其中 X 的概率分布为

X	1	2
P	0.3	0.7

而 Y 的概率密度为 $f_Y(y)$，求随机变量 $U = X + Y$ 的概率密度 $g(u)$ 。

五、（10 分）设设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} xe^{-y}, & 0<x<y<+\infty \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求（1）X 和Y的边缘概率密度；（2）(X,Y)的联合分布函数；（3）$P(X+Y<1)$.

六、（14 分）设总体 X 的概率密度 $f(x,\theta)=\begin{cases}1 & \theta-\dfrac{1}{2}\le x\le\theta+\dfrac{1}{2} \quad -\infty<\theta<+\infty \\ 0 & 其他\end{cases}$，

$X_1,X_2,\cdots,X_{11}$ 为其样本，求（1）参数 θ 的矩估计和极大似然估计；（2）证明样本均值 $\overline{X}$ 及 $\dfrac{1}{2}[\max\limits_{1\le i\le n}X_i+\min\limits_{1\le i\le n}X_i]$ 都是 θ 的无偏估计量.

七、（6 分）从$1,\ 2,\cdots,n$ 任取一个数 X ，再从$1,2,\cdots,X$ 中任取一个数Y ，求EY .