哈尔滨工业大学（深圳）2017 秋《概率论与数理统计》答案

一、1. 1/2 2. 6 3. $1-e^{-16}$ 4. 18 5. 17/25

二、1. B 2. C 3. B 4. B 5. C

三、**解：**（1）设 $A=$ ‘从乙箱中取到 1 件产品是一等品’

B_i = ‘从甲箱中恰好取到 i 件一等品’ $i=0,1,2$.

$$P(A)=\sum_{i=0}^{2}P(B_i)P(A|B_i)=\sum_{i=0}^{2}\frac{C_2^iC_4^{2-i}}{C_6^2}\times\frac{3+i}{7}$$

$$=\frac{C_2^0C_4^2}{C_6^2}\times\frac{3}{7}+\frac{C_2^1C_4^1}{C_6^2}\times\frac{4}{7}+\frac{C_2^2C_4^0}{C_6^2}\times\frac{5}{7}=\frac{11}{21}$$

（2）$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{\frac{C_2^1C_4^1}{C_6^2}\times\frac{4}{7}}{\frac{11}{21}}=\frac{21}{11}\times\frac{2\times4}{\frac{6\times5}{2\times1}}\times\frac{4}{7}=\frac{32}{55}$$

四、**解：（1）** $EXY=P(X=1,\ Y=1)=\frac{5}{8}$

Y \ X	0	1	
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	

（2）$P(X+Y\le 1)=1-P(X+Y>1)$

$=1-P(X=1,\ Y=1)$

$=\frac{3}{8}.$

（3）$E\max(X,Y)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{5}{8}=\frac{7}{8}.$

五、（1）$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{x^2}{2}, & 0\le x<1\\ -\frac{x^2}{2}+2x-1, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$

(2）法 1 分布函数法

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(1-\sqrt[3]{X}\le y)=P(X\ge(1-y)^3)=1-F_X((1-y)^3)$$

$$f_Y(y)=3(1-y)^2 f_X((1-y)^3)=\begin{cases}3(1-y)^2[2-(1-y)^3], & 1-\sqrt[3]{2}<y\le 0\\ 3(1-y)^5, & 0<y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

法 2 公式法

$y=1-\sqrt[3]{x}$ 在（0, 2）上单减，反函数为 $x=h(y)=(1-y)^3$

$$f_Y(y)=f_X(h(y))\,|h'(y)|=\begin{cases}3(1-y)^2[2-(1-y)^3], & 1-\sqrt[3]{2}<y\le 0\\ 3(1-y)^5, & 0<y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(3) 设 Y 表示在 n 次独立观测中 X 的值小于 1.5 的次数，$Y\sim B(n,p)$,

$p=P(X<1.5)=7/8$,　　故　$P(Y\ge 1)=1-P(Y=0)=1-(1/8)^n$

六、**解**：（1）$1=\int_0^1 dx\int_0^x Ay(1-x)\mathrm{d}x=A\int_0^1\frac{1}{2}x^2(1-x)\mathrm{d}x=\frac{A}{24}$,　$A=24$

（2）$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^x 24y(1-x)dy=12x^2(1-x), & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_y^1 24y(1-x)dx=12y(1-y)^2, & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(3）$f(x,y)\ne f_X(x)\cdot f_Y(y)$　　X 与 Y 不独立

(4）法 1 公式法　$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x$

$$f(x,z-x)=\begin{cases}24(z-x)(1-x), & 0\le x\le 1,\ 0\le z-x\le x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{z/2}^{z}24(z-x)(1-x)dx=3z^2-2z^3, & 0<z<1\\ \int_{z/2}^{1}24(z-x)(1-x)dx=2z^3-9z^2+12z-4, & 1\le z<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

法 2 分布函数法

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=\iint_{x+y\le z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\begin{cases}0, & z\le 0\\ 24\int_0^{z/2}y\mathrm{d}y\int_y^{z-y}(1-x)\mathrm{d}x=z^3-\frac{z^4}{2}, & 0<z<1\\ 1-24\int_{z/2}^{1}(1-x)\mathrm{d}x\int_{z-x}^{x}y\mathrm{d}y=1-(4z-6z^2+3z^3-\frac{z^4}{2}), & 1\le z<2\\ 1, & z\ge 2\end{cases}$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}3z^2-2z^3, & 0<z<1\\ 2z^3-9z^2+12z-4, & 1\le z<2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

七、解 已知 $f_{Y|X}(y\,|\,x)=\begin{cases}1/x, & 0<y<x\\ 0, & 其他\end{cases}$

（1） $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_{Y|X}(y\,|\,x)=\begin{cases}4e^{-2x}, & 0<y<x\\ 0, & 其他\end{cases}$

（2） $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_y^{+\infty}4e^{-2x}\mathrm{d}x=2e^{-2y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$

（3） $f_{X|Y=1}(x\,|\,y=1)=\dfrac{f(x,1)}{f_Y(1)}=\begin{cases}4e^{-2x}/2e^{-2}, & x>1\\ 0, & x\le 1\end{cases}=\begin{cases}2e^{-2(x-1)}, & x>1\\ 0, & x\le 1\end{cases}$

（4） $P(0<X<2\,|\,Y=1)=\int_0^2 f_{X|Y}(x|1)\mathrm{d}x=\int_1^2 2e^{-2(x-1)}\mathrm{d}x=1-e^{-2}$