# 第 22 章 附录：2019 年秋哈尔滨工业大学（深圳）试卷

**一、填空题** (每题 3 分，共 15 分)

1. 设 $A, B$ 为事件，已知 $A$ 发生的概率为 0.4，$B$ 不发生的概率为 0.8，$A, B$ 中至少一个事件发生的概率为 0.5，则 $A, B$ 同时发生的概率为__________.
2. 设随机变量 $X$ 服从 $(0,1)$ 区间上的均匀分布，则 $X^2$ 的概率密度函数为____________________________.
3. 设随机变量 $X$ 服从指数分布，且 $\mathbb{E}(X^2) = 2$，则 $\mathbb{P}(X > 1) =$ __________.
4. 设二维随机变量 $(X, Y) \sim N(1, 2; 4, 9; -0.5)$，则 $X$ 与 $-2Y-1$ 的相关系数为__________.
5. De Moivre-Laplace（棣莫弗-拉普拉斯）中心极限定理揭示了多重伯努利试验中所呈现的令人惊奇的规律. 请陈述该定理的内容：

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

**二、单项选择题**（每题 3 分，共 15 分）

1. 设 $A, B, C$ 为事件，$X, Y$ 为随机变量，则下列说法正确的是（　）
   (A) 若 $A$ 与 $A$ 独立，则 $\mathbb{P}(A) = 0$ 或 $\mathbb{P}(A) = 1$.
   (B) $X, Y$ 独立当且仅当 $X, Y$ 不相交.
   (C) 若 $A, B, C$ 相互独立，则 $A, B, \bar{C}$ 也相互独立；但反之不然.
   (D) $X, Y$ 独立是 $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$ 的充分必要条件.
2. 设二元随机变量 $(X, Y)$ 的联合分布函数为 $F(x, y)$，关于 $X, Y$ 的边缘分布函数分别为 $F_X(x), F_Y(y)$，则下列说法正确的是（　）
   (A) 对任意的 $x, y \in \mathbb{R}$，$\mathbb{P}(X \leq x, Y > y) = 1 - F(x, y)$；
   (B) $F_X(x) \cdot F_Y(x)$ 和 $F_X(x) + F_Y(y)$ 都可能成为某随机变量的分布函数；
   (C) 对任意 $x_1 < x_2, y \in \mathbb{R}$，$F(x_1, y) < F(x_2, y)$.
   (D) 二元函数
   $$G(x, y) = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{y}{2}\right), \quad x, y \in \mathbb{R}$$
   可以是某二元随机变量 $(X, Y)$ 的分布函数，此时 $X, Y$ 相互独立.

3. 设 $\{X_i\}_{i\geq 1}$ 为独立同分布随机变量变量序列，$X_1 \sim U(0,1)$，则当 $n \to \infty$ 时，下列说法错误的是（　）

   (A) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 依概率收敛到 $\frac{1}{2}$.

   (B) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 依概率收敛到 $\frac{1}{3}$.

   (C) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^3$ 依概率收敛到 $\frac{1}{6}$.

   (D) 对任意 $x \in \mathbb{R}$，$\mathbb{P}\left(\sqrt{\frac{12}{n}}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{n}{2}\right] \leq x\right)$ 收敛到 $\Phi(x)$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布随机变量的分布函数.

4. 设 $X$ 为连续型随机变量，方差为 25，则对任何常数 $c$，以及常数 $\varepsilon > 0$，有（　）

   (A) $\mathbb{P}(|X-c| \geq \varepsilon) \leq \frac{25}{\varepsilon^2}$.

   (B) $\mathbb{P}(|X-c| < 5) \leq 0.75$

   (C) $\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}X| < 15) \geq 0.75$.

   (D) $\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}X| < 10) \geq 0.75$.

5. 设总体 $X \sim N(0,1)$，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为来自总体 $X$ 的样本，样本均值为 $\overline{X_n} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，样本方差为 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X_n}\right)^2$，则（　）

   (A) $\overline{X_n} \sim N(0,1)$.

   (B) $(n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1)$.

   (C) $\frac{\sqrt{n}\overline{X_n}}{S} \sim t(n)$.

   (D) $\sqrt{n}\overline{X_n} \sim t(n-1)$.

以下为解答题，共 5 题，各 8 分，共计 40 分.

三、设随机变量 $X, Y$ 的联合分布列如下：

$$\mathbb{P}(X=0, Y=0) = \mathbb{P}(X=4, Y=0) = \frac{1}{8}, \quad \mathbb{P}(X=0, Y=4) = \mathbb{P}(X=4, Y=4) = \frac{3}{8}.$$

(1) 求关于 $X, Y$ 的边缘分布列.

(2) 求 $\mathbb{E}(XY)$.

(3) 求 $X, Y$ 的相关系数.

(4) 求 $X$ 在条件 $Y=4$ 下的条件分布列.

四、设随机变量 $(X,Y)$ 的联合分布函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{2-x-y}, & x > 1, y > 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 求关于 $X, Y$ 的边缘概率密度函数.

(2) $X, Y$ 是否独立？请给出理由.

(3) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度函数.

(4) 设 $M = \min\{X, Y\}$，求 $\mathbb{E}M$.

五、已知某连锁商店的三家分店每天对某产品的需求数量（以千克计）分别为 $X_1, X_2, X_3$，且已知 $X_2 \sim N(20, 55)$，$X_3 \sim N(30, 75)$，$X_1 \sim N(40, 95)$，

$X_1, X_2, X_3$ 相互独立.

(1) 求 3 家分店每天总需求量的均值和方差.

(2) 该连锁商店每天进货分给各店，且各分店的货物可以调剂. 为使产品不脱销的概率不小于 0.99，求该连锁商店至少应该购入多少千克该产品?（已知 $\Phi(2.33) \approx 0.99$）

**六**、设总体 $X$ 的分布列如下（其中 $0 < \theta < 1$ 是未知参数）

| $X$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}$ | $\theta$ | $\theta(1-\theta)$ | $(1-\theta)^2$ |

已知样本值 $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 2, x_4 = 3$，分别求 $\theta$ 的矩估计值与极大似然估计值.

**七**、某类型昆虫在叶子上产卵. 对每片给定的叶子，昆虫爬到该片叶子上的概率为 0.1. 假设昆虫爬到每片叶子是相互独立的. 在给定叶子上，如果有昆虫爬上去，则它的产卵数服从参数为 1 的 Poisson 分布.

(1) 一片给定的叶子上没有卵的概率是多少?

(2) 检查某片叶子，发现上面没有该类型昆虫的卵，求有昆虫爬到过这片叶子的概率.

(3) 现在检查了 10 片叶子，发现都没有昆虫卵，求这 10 片叶子中至少有一片叶子上曾有昆虫爬过的概率.

（提示：可能用到的数值：$\mathrm{e} \approx 2.7183, \mathrm{e}^{-1} \approx 0.3679$. 本题 3 个小题的结果也可以用自然常数 e 或 $\mathrm{e}^{-1}$ 等常数表示，不需计算出具体数值结果.）

附答案：

**一、填空题** (每题 3 分，共 15 分)

1. 设 $A, B$ 为事件，已知 $A$ 发生的概率为 0.4，$B$ 不发生的概率为 0.8，$A, B$ 中至少一个事件发生的概率为 0.5，则 $A, B$ 同时发生的概率为___0.1___.

证明 按假设，$\mathbb{P}(A) = 0.4$，$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(\bar{B}) = 1 - 0.8 = 0.2$，$\mathbb{P}(A \cup B) = 0.5$，

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) = 0.4 + 0.2 - 0.5 = 0.1.$$

2. 设随机变量 $X$ 服从 $(0, 1)$ 区间上的均匀分布，则 $X^2$ 的概率密度函数为

$$f_{X^2}(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{z}}, & z \in (0, 1) \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

证明 设 $z \le 0$，则 $\mathbb{P}(X^2 \le z) = 0$，如果 $z \ge 1$，则 $\mathbb{P}(X^2 \le z) = 1$. 所以，$z \notin (0, 1)$ 时，$f_{X^2}(z) = 0$. 设 $z \in (0, 1)$，则

$$F_{X^2}(z) = \mathbb{P}(X^2 \le z) = \mathbb{P}(-\sqrt{z} \le X \le \sqrt{z}) = \mathbb{P}(X \le \sqrt{z}) = \sqrt{z}.$$

所以，当 $z \in (0, 1)$ 时，

$$f_{X^2}(z) = F'_{X^2}(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}}.$$

3. 设随机变量 $X$ 服从指数分布，且 $\mathbb{E}(X^2) = 2$，则 $\mathbb{P}(X > 1) =$ ___$\mathrm{e}^{-1}$___.

证明 设 $X$ 服从参数为 $\lambda$ 的指数分布，则 $\operatorname{Var} X = \frac{1}{\lambda^2}$，$\mathbb{E}X = \frac{1}{\lambda}$，从而

$$2 = \mathbb{E}X^2 = \operatorname{Var} X + (\mathbb{E}X)^2 = \frac{2}{\lambda^2},$$

所以，$\lambda = 1$.

$$\mathbb{P}(X > 1) = \mathrm{e}^{-1\cdot\lambda} = \mathrm{e}^{-1}.$$

4. 设二维随机变量 $(X, Y) \sim N(1, 2; 4, 9; -0.5)$，则 $X$ 与 $-2Y - 1$ 的相关系数为___0.5___.

证明 $X, Y$ 的相关系数为-0.5，所以 $X, -2Y - 1$ 的相关系数为

$$-(-0.5) = 0.5.$$

5. De Moivre-Laplace（棣莫弗-拉普拉斯）中心极限定理揭示了多重伯努利试验中所呈现的令人惊奇的规律. 请陈述该定理的内容：

假设在 $n$ 重伯努利试验中成功的次数为 $Y_n$，且每次试验成功的概率为 $p$（$0 < p < 1$），则对任何 $x \in \mathbb{R}$，

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

**二、单项选择题**（每题 3 分，共 15 分）

1. 设 $A, B, C$ 为事件，$X, Y$ 为随机变量，则下列说法正确的是（A）

(A) 若 $A$ 与 $A$ 独立，则 $\mathbb{P}(A) = 0$ 或 $\mathbb{P}(A) = 1$.

(B) $X, Y$ 独立当且仅当 $X, Y$ 不相交.

(C) 若 $A, B, C$ 相互独立，则 $A, B, \bar{C}$ 也相互独立；但反之不然.

(D) $X, Y$ 独立是 $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$ 的充分必要条件.

2. 设二元随机变量 $(X, Y)$ 的联合分布函数为 $F(x, y)$，关于 $X, Y$ 的边缘分布函数分别为 $F_X(x), F_Y(y)$，则下列说法正确的是（D）

(A) 对任意的 $x, y \in \mathbb{R}$，$\mathbb{P}(X \le x, Y > y) = 1 - F(x, y)$；

(B) $F_X(x) \cdot F_Y(x)$ 和 $F_X(x) + F_Y(y)$ 都可能成为某随机变量的分布函数；

(C) 对任意 $x_1 < x_2, y \in \mathbb{R}$，$F(x_1, y) < F(x_2, y)$.

(D) 二元函数

$$G(x, y) = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{y}{2}\right), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

可以是某二元随机变量 $(X, Y)$ 的分布函数，此时 $X, Y$ 相互独立.

3. 设 $\{X_i\}_{i\ge1}$ 为独立同分布随机变量变量序列，$X_1 \sim U(0,1)$，则当 $n \to \infty$ 时，下列说法错误的是（C）

(A) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ 依概率收敛到 $\frac{1}{2}$.

(B) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$ 依概率收敛到 $\frac{1}{3}$.

(C) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^3$ 依概率收敛到 $\frac{1}{6}$.

(D) 对任意 $x \in \mathbb{R}$，$\mathbb{P}\left(\sqrt{\frac{12}{n}}\left[\sum_{i=1}^n X_i - \frac{n}{2}\right] \le x\right)$ 收敛到 $\Phi(x)$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布随机变量的分布函数.

4. 设 $X$ 为连续型随机变量，方差为 25，则对任何常数 $c$，以及常数 $\varepsilon > 0$，有（D）

(A) $\mathbb{P}(|X - c| \ge \varepsilon) \le \frac{25}{\varepsilon^2}$.

(B) $\mathbb{P}(|X - c| < 5) \le 0.75$

(C) $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| < 15) \ge 0.75$.

(D) $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| < 10) \ge 0.75$.

5. 设总体 $X \sim N(0,1)$，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为来自总体 $X$ 的样本，样本均值为 $\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$，样本方差为 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$，则（B）

(A) $\overline{X}_n \sim N(0,1)$.

(B) $(n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1)$.

(C) $\frac{\sqrt{n}\overline{X}_n}{S} \sim t(n)$.

(D) $\sqrt{n}\overline{X}_n \sim t(n-1)$.

以下为解答题，共 5 题，各 8 分，共计 40 分.

三、设随机变量 $X, Y$ 的联合分布列如下：

$$\mathbb{P}(X=0, Y=0) = \mathbb{P}(X=4, Y=0) = \frac{1}{8}, \quad \mathbb{P}(X=0, Y=4) = \mathbb{P}(X=4, Y=4) = \frac{3}{8}.$$

(1) 求关于 $X, Y$ 的边缘分布列.

(2) 求 $\mathbb{E}(XY)$.

(3) 求 $X, Y$ 的相关系数.

(4) 求 $X$ 在条件 $Y = 4$ 下的条件分布列.

解答

$X, Y$ 的联合分布列（以及边缘分布列）可以表示如下

| $Y\backslash X$ | 0 | 4 | $p_{\cdot j}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ |
| 4 | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{4}$ |
| $p_{i\cdot}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 |

1. 关于 $X$ 的边缘分布列可用表格表示如下

| $X$ | 0 | 4 |
|---|---|---|
| $\mathbb{P}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 0, Y = 4) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2},$$

$$\mathbb{P}(X = 4) = \mathbb{P}(X = 4, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 4, Y = 4) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}.$$

关于 $Y$ 的边缘分布列可用表格表示如下

| $X$ | 0 | 4 |
|---|---|---|
| $\mathbb{P}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{4}$ |

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(Y = 0, X = 0) + \mathbb{P}(Y = 0, X = 4) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4},$$

$$\mathbb{P}(Y = 4) = \mathbb{P}(Y = 4, X = 0) + \mathbb{P}(Y = 4, X = 4) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{3}{4}.$$

2.

$$\mathbb{E}XY = 4 \times 4 \times \frac{3}{8} = 6.$$

3. 注意到 $\mathbb{E}X = 4 \times \frac{1}{2} = 2$，$\mathbb{E}Y = 4 \times \frac{3}{4} = 3$，

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y = 6 - 2 \times 3 = 0,$$

所以 $X, Y$ 的相关系数为 0.

4.
$$\mathbb{P}(X=0|Y=4)=\frac{\mathbb{P}(X=0,Y=4)}{\mathbb{P}(Y=4)}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{2},$$
$$\mathbb{P}(X=4|Y=4)=\frac{\mathbb{P}(X=4,Y=4)}{\mathbb{P}(Y=4)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{2},$$

或直接计算：
$$\mathbb{P}(X=4|Y=4)=1-\mathbb{P}(X=0|Y=4)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

条件分布的其他方法：条件分布也可以先说明 $X,Y$ 独立，于是在 $Y=4$ 的条件下，$X$ 的分布就是关于 $X$ 的边缘分布.

四、设随机变量 $(X,Y)$ 的联合分布函数为
$$f(x,y)=\begin{cases} e^{2-x-y}, & x>1,y>1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 求关于 $X,Y$ 的边缘概率密度函数.

(2) $X,Y$ 是否独立？请给出理由.

(3) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度函数.

(4) 设 $M=\min\{X,Y\}$，求 $\mathbb{E}M$.

解答

1. 设 $x>1$，则
$$f_X(x)=\int_1^{+\infty} e^{2-x-y}\,dy=e^{2-x}\int_1^{+\infty} e^{-y}\,dy=e^{1-x}.$$
所以，关于 $X$ 的边缘概率密度函数为
$$f_X(x)=\begin{cases} e^{1-x}, & x>1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$
类似地，可得关于 $Y$ 的边缘概率密度函数为
$$f_Y(y)=\begin{cases} e^{1-y}, & y>1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

2. 显然，
$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y),$$
所以，$X,Y$ 相互独立.

3. 对任意 $z\in\mathbb{R}$，
$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\cdot f_Y(z-x)dx$$
当积分变量 $x>1$ 且 $z-x>1$ 时，即 $1<x<z-1$ 时，被积函数非 0. 因

此，当 $z \le 2$ 时，$f_Z(z) = 0$，当 $z \ge 2$ 时，

$$f_Z(z) = \int_1^{z-1} \mathrm{e}^{1-x} \cdot \mathrm{e}\, 1-(z-x)dx = \int_1^{z-1} \mathrm{e}^{2-z}\, dx = (z-2)\,\mathrm{e}^{-(z-2)}..$$

所以，$Z$ 的概率密度函数为

$$f_Z(z) = \begin{cases} (z-2)\,\mathrm{e}^{-(z-2)}, & z > 2, \\ 0, & z \le 2. \end{cases}$$

4. 设 $u \ge 1$，

$$F_X(u) = \int_1^u \mathrm{e}^{1-x}\, dx = 1 - \mathrm{e}^{1-u}.$$

$$F_M(u) = \mathbb{P}(M \le u) = 1 - (1 - F_X(u))^2 = 1 - (\mathrm{e}^{1-u})^2.$$

所以，$M$ 的概率密度函数为

$$f_M(u) = \begin{cases} 2\,\mathrm{e}^{2(1-u)}, & u > 1, \\ 0, & u < 1. \end{cases}$$

所以，

$$\begin{aligned} \mathbb{E}M &= \int_1^\infty u \cdot 2\,\mathrm{e}^{2(1-u)}\, du \\ &= \int_0^\infty (1+v) \cdot 2\,\mathrm{e}^{-2v}\, dv \\ &= 1 + \int_0^\infty v \cdot 2\,\mathrm{e}^{-2v}\, dv \\ &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

另外的方法：

$$\mathbb{E}M = \int_0^\infty \mathbb{P}(M > u)du = 1 + \int_1^\infty \mathbb{P}(M > u)du = 1 + \int_1^\infty \mathrm{e}^{2(1-u)}\, du = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

也可以注意到：

$$U = X - 1, \quad V = Y - 1$$

独立同分布. 因此

$$M = \min\{X, Y\} = 1 + \min\{U, V\}.$$

$\min\{U, V\}$ 服从指数为 2 的指数分布，

$$\mathbb{E}M = 1 + \mathbb{E}\min\{U, V\} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

**五**、已知某连锁商店的三家分店每天对某产品的需求数量（以千克计）分别为 $X_1, X_2, X_3$，且已知 $X_2 \sim N(20, 55)$，$X_3 \sim N(30, 75)$，$X_1 \sim N(40, 95)$，$X_1, X_2, X_3$ 相互独立.

(1) 求 3 家分店每天总需求量的均值和方差.

(2) 该连锁商店每天进货分给各店，且各分店的货物可以调剂. 为使产品不脱销的概率不小于 0.99，求该连锁商店至少应该购入多少千克该产品？（已知

$\Phi(2.33) \approx 0.99$）

解答

1. 总需求量 $X = X_1 + X_2 + X_3$ 的均值和方差分别为：
$$\mathbb{E}X = 20 + 30 + 40 = 90.$$
$$\operatorname{Var} X = \operatorname{Var} X_1 + \operatorname{Var} X_2 + \operatorname{Var} X_3 = 55 + 75 + 95 = 225 = 15^2.$$
2. $X \sim N(90, 15^2)$. 设进货 $a$ 千克可以使不脱销的概率不小于 0.99，即
$$\mathbb{P}(X < a) = \Phi\left(\frac{a-90}{15}\right) \geq 0.99 \approx \Phi(2.33).$$
因此，由单调性，
$$\frac{a-90}{15} \geq 2.33.$$
即
$$a \geq 15 \times 2.33 + 90 = 34.95 + 90 = 124.95.$$
所以，最少应进货 124.95 千克.

六、设总体 $X$ 的分布列如下（其中 $0 < \theta < 1$ 是未知参数）

| $X$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}$ | $\theta$ | $\theta(1-\theta)$ | $(1-\theta)^2$ |

已知样本值 $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 2, x_4 = 3$，分别求 $\theta$ 的矩估计值与极大似然估计值.

解答

1. 矩估计：
$$\mathbb{E}X = 1 \cdot \theta + 2 \cdot \theta(1-\theta) + 3 \cdot (1-\theta)^2 = \theta^2 - 3\theta + 3$$
$$\bar{X} = \frac{1}{4}(1 + 2 + 2 + 4) = 2.$$
由 $\theta^2 - 3\theta + 3 = 2$, 即
$$\theta^2 - 3\theta + 1 = 0,$$
可得矩估计值
$$\hat{\theta} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$
2. 极大似然估计：

极大似然函数

$$\begin{aligned} L(\theta) &= L(\theta|x_1,x_2,x_3,x_4) \\ &= \mathbb{P}(X=x_1)\cdot\mathbb{P}(X=x_2)\cdot\mathbb{P}(X=x_3)\cdot\mathbb{P}(X=x_4) \\ &= \mathbb{P}(X=1)\cdot\mathbb{P}(X=2)\cdot\mathbb{P}(X=2)\cdot\mathbb{P}(X=3) \\ &= \theta\cdot[\theta(1-\theta)]^2\cdot(1-\theta)^2 \\ &= \theta^3(1-\theta)^4. \end{aligned}$$

对数似然函数为：

$$\log L(\theta) = 3\log\theta + 4\log(1-\theta).$$

关于 $\theta$ 求导可得

$$L'(\theta) = \frac{3}{\theta} - \frac{4}{1-\theta}.$$

由

$$L'(\theta) = 0$$

可得

$$3 - 3\theta = 4\theta.$$

从而，$\theta$ 的极大似然估计值为

$$\hat{\theta} = \frac{3}{7}.$$

**七**、某类型昆虫在叶子上产卵. 对每片给定的叶子，昆虫爬到该片叶子上的概率为 0.1. 假设昆虫爬到每片叶子是相互独立的. 在给定叶子上，如果有昆虫爬上去，则它的产卵数服从参数为 1 的 Poisson 分布.

(1) 一片给定的叶子上没有卵的概率是多少？

(2) 检查某片叶子，发现上面没有该类型昆虫的卵，求有昆虫爬到过这片叶子的概率.

(3) 现在检查了 10 片叶子，发现都没有昆虫卵，求这 10 片叶子中至少有一片叶子上曾有昆虫爬过的概率.

（提示：可能用到的数值：$e\approx 2.7183, e^{-1}\approx 0.3679$. 本题 3 个小题的结果也可以用自然常数 e 或 $e^{-1}$ 等常数表示，不需计算出具体数值结果.）

解答 用 $A$ 表示有昆虫到访过（爬过），$B$ 表示叶子上没有昆虫卵，$X$ 表示叶子上的虫卵数. 则 $\overline{A}\subset B$，

$$\mathbb{P}(A) = 0.1, \quad \mathbb{P}(\overline{A}) = 0.9.$$

$$\mathbb{P}(X=k|A) = \frac{1}{k!}e^{-1}.$$

因此

$$\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(X=0|A) = e^{-1}.$$

1. 一片给定的叶子上没有卵的概率：

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B\cap A)+\mathbb{P}(B\cap \overline{A}) = \mathbb{P}(B|A)\cdot\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(\overline{A})\\ &= \mathrm{e}^{-1}\times 0.1+0.9=\frac{9+\mathrm{e}^{-1}}{10}.\end{aligned}$$

2. 检查某片叶子，发现上面没有该类型昆虫的卵，求有昆虫爬到过这片叶子的概率：

$$\mathbb{P}(A|B)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}=\frac{\mathrm{e}^{-1}\times 0.1}{\mathrm{e}^{-1}\times 0.1+0.9}=\frac{1}{9\,\mathrm{e}+1}.$$

3. 记 $p=\frac{1}{9\,\mathrm{e}+1}$，则 10 片叶子中，没有虫卵条件下，昆虫爬过的叶子数 $Y\sim B(10,p)$. 因此所求至少一片叶子有昆虫爬过的概率为

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y\geq 1) &= 1-\mathbb{P}(Y=0)=1-(1-p)^{10}\\ &= 1-\left(1-\frac{1}{9\,\mathrm{e}+1}\right)^{10}=1-\left(\frac{9\,\mathrm{e}}{9\,\mathrm{e}+1}\right)^{10}\\ &\approx 1-0.669903373\approx 0.33\end{aligned}$$