主管领导审核签字

哈尔滨工业大学（深圳）2021 年秋季学期

概率论与数理统计期末试卷（A 卷）

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得　分										
阅卷人										

考生须知：本次考试为闭卷考试，考试时间为 120 分钟，总分 100 分。

姓名________ 线

学号________ 封

班号________

学院________ 密

一、填空题 (每题 2 分，共 20 分)

1. 设随机事件 A, B 满足 $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(B)=\frac{3}{4}$，$\mathbb{P}(A\cap B)=\frac{2}{3}$. 则 $\mathbb{P}(A\cup B)=$__________，而 A, B 中恰好只有一个事件发生的概率为__________.

2. 两人相约于早 8 时至 9 时之间在某地会面，则一人要等另一人半小时以上的概率为______.

3. 投掷一枚非均匀硬币，正面朝上的概率为 $\frac{1}{3}$. 甲、乙两人轮流投掷该硬币进行赌博. 约定甲先投，且先投掷得到正面朝上者获胜（从而结束赌局）. 从甲第一次投掷开始，直到赌局结束为止，共需要投掷 4 次（包括第一次、最后一次）的概率为__________，甲胜的概率为__________.

4. 设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(\mu_1,0,\sigma_1^2,\sigma_2^2,0)$. 则 $\mathbb{E}(XY^2)=$________，$X-Y$ 的方差为________.

5. 投掷一枚非均匀硬币，正面朝上的概率为 0.6. 现独立随机地投掷 n 次，为使所得结果中硬币正面朝上的频率在 0.5 与 0.7 之间的概率不小于 0.9，用切比雪夫不等式估计，n 至少应该为__________.

6. 设 $1, 1.5, 2.5, 3$ 是来自总体 $U(0,\theta)(\theta>0)$ 的一个样本的观测值，则 θ 的矩估计值为__________，θ 的极大似然估计值为__________.

7. 设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，$\bar{X}=\frac{1}{4}(X_1+X_2+X_3+X_4)$，且 $\dfrac{\bar{X}-5}{5}\sim N(0,1)$，则 $\mu=$__________，$\sigma^2=$__________.

8. 设 X,Y 服从 $(0,1)$ 上的均匀分布，且 X,Y 独立，$U=\min\{X,Y\}, V=\max\{X,Y\}$，则 $\mathbb{P}(V<\frac{1}{3})=$__________，$\mathbb{E}(U+V)=$__________.

9. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(0,1)$ 的样本，则 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$U=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，$W=\sqrt{n}\bar{X}$，则 W^2 服从自由度为__________的 χ^2 分布，U 服从自由度为__________的 χ^2 分布.

10. 设 Ω 为样本空间，$\mathcal{F}$ 为所考虑事件的全体. 按柯尔莫哥洛夫的概率的公理化定义，对任意事件 $A\in\mathcal{F}$ 都有实数 $\mathbb{P}(A)$ 与之对应，称 $\mathbb{P}(A)$ 为事件 A 的概率，且概率满足如下三条公理:

(1) 规范性：$\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

(2) ________________________________.

(3) ____.

二、单项选择题（每题 2 分，共 10 分）

1. 设随机事件 A, B 满足 $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{4}$，$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$，则下列说法错误的是（ ）

   (A) $\mathbb{P}(A \cap B) \le \frac{1}{3}$.

   (B) $\mathbb{P}(A \cap B) \ge \frac{1}{12}$.

   (C) 如果 $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$，则 A, B 独立.

   (D) 若另有事件 C 满足 $\mathbb{P}(C) = 1$，则 A, B, C 独立.

2. 设 X_1, X_2 是任意两个相互独立的连续型随机变量，它们的概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$，分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$，则则下列说法正确的是（ ）

   (A) $f_1(x) + f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.

   (B) $f_1(x)f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.

   (C) $F_1(x) + F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

   (D) $F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

3. 设 X, Y 为方差都有限的随机变量，则下列叙述中不成立的是（ ）

   (A) $(\mathbb{E}X)^2 \le \mathbb{E}X^2$.

   (B) 对任意实数 a，X 的方差不超过 $\mathbb{E}(X - a)^2$.

   (C) 若 $\mathbb{E}(XY) = (\mathbb{E}X) \cdot (\mathbb{E}Y)$，则 X, Y 独立.

   (D) 设 $p, q \ge 0$ 满足 $p + q = 1$，X, Y 不相关且同分布，则 $pX + qY$ 的方差不小于 $\frac{1}{2}(X + Y)$ 的方差.

4. 设事件 A 发生的概率为 0.2，随机变量 X 定义如下：如果事件 A 发生，则 $X = 1$；否则 $X = 0$. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，且都与 X 同分布. 设 $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$，Φ 为标准正态随机变量的分布函数. 则下列说法错误的是（ ）

   (A) Y 的分布函数 $F(y)$ 近似等于 $\Phi\left(\frac{y-20}{4}\right)$.

   (B) $Y = 20$ 的概率近似于 $2\Phi(0.125) - 1$.

   (C) Y 服从二项分布.

   (D) 当 $n \to \infty$ 时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^3$ 依概率收敛到 0.3.

5. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的 Poisson 分布，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的一个样本，$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$，则下列统计量中不是参数 λ 的无偏估计的是（ ）

   (A) $\bar{X}$.　　(B) X_1.　　(C) S^2.　　(D) $\frac{n-1}{n}S^2$.

以下为解答题，**共 7 题**，各 10 分，共计 70 分.

三、将两信息分别编码为 X 和 Y 传递出去，接受站接收时，X 被误为 Y 的概率为 0.1，Y 被误为 X 的概率为 0.2，信息 X 与信息 Y 传递的频繁程度之比为 $1:2$，若接收站收到的信息是 X，问原来发送的信息也是 X 的概率是多少?

四、设 X_1, X_2 服从参数为 1 的指数分布，且相互独立，设 $X = X_1 + X_2$. (1) 求 X 的概率密度函数. (2) 求 X 的分布函数. (3) 求 X 的期望与方差.

五、设 X, Y 为随机变量，X 关于 Y 的条件概率密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$ 与 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$ 如下

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{y^3}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 5y^4, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

(1) 求 (X, Y) 的联合概率密度函数. (2) 求 X 的概率密度函数. (3) 求概率 $\mathbb{P}(X > \frac{1}{3})$.

六、设事件 A, B 的概率分别为 p_1, p_2，且

$$X = \begin{cases} 1, & A\text{ 发生}, \\ 0, & A\text{ 不发生}, \end{cases} \qquad\qquad Y = \begin{cases} 1, & B\text{ 发生}, \\ 0, & B\text{ 不发生}. \end{cases}$$

(1) 求 X 的期望和方差. (2) 求 $\mathbb{E}(XY), \mathrm{Cov}(X, Y)$. (3) 证明 $|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \le \frac{1}{4}$.

七、设 $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$，随机变量 X 的概率密度函数如下

$$f(x;\mu,\sigma) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}x\sigma} \exp\left(-\dfrac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), & x > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

此时称 X 服从参数为 μ, σ^2 的对数正态分布. (1) 求 $\ln X$ 的概率密度函数. (2) 求 μ, σ^2 的极大似然估计.

八、设某种油漆的干燥时间（单位：h）服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，现有 9 个样品的干燥时间的样本均值为 $\bar{x} = 6\text{h}$，样本方差为 $s^2 = 0.33$.

1. 如果已知 $\sigma = 0.6\text{h}$，求 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间.
2. 如果 σ 未知，求 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

附：设 $Z \sim N(0,1)$，$T_n \sim t(n)$，则

$$\mathbb{P}(Z > 1.96) = 0.025, \qquad \mathbb{P}(T_9 > 2.262) = 0.025, \qquad \mathbb{P}(T_8 > 2.306) = 0.025.$$

九、考虑某设备发生故障的次数和时间.

(1) 设某设备在任何时长为 t（小时）的时间内发生故障的次数 $N(t)$ 服从参数为 λt 的 Poisson 分布（设 $\lambda > 0$）. 设 X 为从 0 时刻开始到第一次故障发生的时刻之间的时间. 求 X 的分布.

(2) 记某设备从 0 时刻开始运行起到第一次故障发生的时间间隔为 X，第一次故障发生到第二次故障发生的时间间隔为 Y. 设 X, Y 相互独立，且都服从参数为 $\lambda > 0$ 的指数分布. 求 $(0, t]$ 时间内该设备只发生一次故障的概率.