2022 / 2023 学年秋季学期

概率论与数理统计模拟试题

注意事项：

1. 本次考试为闭卷考试，考试时间为 120 分钟，总分 100 分。

注意行为规范　遵守考场纪律

得分	
阅卷人	

一、 选择题：每题 3 分，共 30 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 假设事件 A,B 满足 $P(B|A)=1$，则 （　　）

A. B 是必然事件　B. $P(B)=1$　C. $A\subset B$　D. $P(A-B)=0$

2. 设 A,B,C 是随机事件，A,C 互不相容，$P(AB)=\frac{1}{2},P(C)=\frac{1}{3}$，则 $P(AB|\overline{C})=$ （　　）

A. $\frac{1}{4}$　B. $\frac{3}{4}$　C. $\frac{1}{2}$　D. $\frac{1}{3}$

3. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且期望均存在，记 $U=max\{X,Y\}$，$V=min\{X,Y\}$，则 $E(UV)=$ （　　）

A. $E(U)E(V)$　B. $E(X)E(Y)$　C. $E(U)E(Y)$　D. $E(X)E(V)$

4. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其分布函数为 $F(X)$，记随机变量 $Y=F(X)$，则 $P(Y\leqslant 0.5)$ 的值 （　　）

A. 与 μ 和 σ 均无关　B. 与 μ 和 σ 均有关

C. 与 μ 有关，与 σ 无关　D. 与 μ 无关，与 σ 有关

5. 下列说法不一定正确的是 （　　）

A. 连续型随机变量的分布函数一定连续

B. 正态随机变量的线性函数仍是正态随机变量

C. n 个正态随机变量的线性组合仍是正态随机变量

D. 二维正态分布的边缘分布都是一维正态分布

6. 设随机变量 $X\backsim U(0,3)$，随机变量 Y 服从参数为 2 的泊松分布，且 $Cov(X,Y)=-1$，则 $D(2X-Y+1)=$ （　　）

A. 1　B. 5　C. 9　D. 12

7. 设随机变量 X,Y 不相关，且 $EX=2,EY=1,DX=3$，则 $E[X(X+Y-2)]=$ （　　）

A. -3　　B. 3　　C. -5　　D. 5

8. 设 $X_1,X_2,...,X_n(n\geqslant 2)$ 为来自总体 $N(\mu,1)$ 的简单随机样本，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则下列结论不正确的是 （　　）

A. $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布　　B. $\sqrt{\frac{n}{n-1}}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 服从 χ^2 分布

C. $\frac{(X_n-X_1)^2}{2}$ 服从 χ^2 分布　　D. $n(\overline{X}-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布

9. 设随机变量 X_1,X_2,X_3,X_4 独立同分布，且 X_1 的 4 阶矩存在，设 $\mu_k=E(X_1^k),k=1,2,3,4$，则由切比雪夫不等式，对于任意的 $\varepsilon>0$，有 $P(|\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}X_i^2-\mu_2|\geqslant\varepsilon)\leqslant$ （　　）

A. $\frac{\mu_4-\mu_2^2}{4\varepsilon^2}$　　B. $\frac{\mu_4-\mu_2^2}{2\varepsilon^2}$　　C. $\frac{\mu_2-\mu_1^2}{4\varepsilon^2}$　　D. $\frac{\mu_2-\mu_1^2}{2\varepsilon^2}$

10. 设 $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),...,(X_n,Y_n)$ 为来自总体 $N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$ 的简单随机样本，令 $\theta=\mu_1-\mu_2$，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i$，$\hat{\theta}=\overline{X}-\overline{Y}$，则 （　　）

A. $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计，$D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$

B. $\hat{\theta}$ 不是 θ 的无偏估计，$D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$

C. $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计,$D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

D. $\hat{\theta}$ 不是 θ 的无偏估计，$D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

得分	
阅卷人	

二、填空题：每空 2 分，满分 16 分。

1. 在 $\triangle ABC$ 中任取一点 P，$\triangle ABP$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比大于 $\frac{n-1}{n}$ 的概率为_________.

2. 某盒中有 10 件产品，其中 4 件次品，今从中取 3 次产品，一次取一件，不放回，则第三次取得正品的概率为_________，第三次才取得正品的概率为_________.

3. 将长度为 1m 的木棒随机截成两段,设两段长度的相关系数为 ρ,则 $|\rho|=$_________.

4. 设 $X_1, X_2, ..., X_{100}$ 为来自总体 X 的简单随机样本，其中 $P(X=1)=P(X=0)=\frac{1}{2}$，$\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数，则由中心极限定理，$P(\sum_{i=1}^{100} X \leqslant 55)$ 的近似值为_________.（用标准正态分布函数表示）

5. 设一设备在长为 t 的时间内发生故障的次数 $N(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布，则相继两次故障之间时间间隔 T 的分布函数为__________________________.

6. 设连续型随机变量 X_1, X_2 相互独立，且方差均存在，X_1, X_2 的概率密度分别为 $f_1(x), f_2(x)$，随机变量 Y_1 的概率密度为 $f(y)=\frac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]$，随机变量 $Y_2=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$，则 EY_1_____EY_2, DY_1_____DY_2（均填 $>$,$<$ 或 $=$）

得分	
阅卷人	

三、（8 分）

甲、乙两个盒子中均有 2 个红球和 2 个白球，选取甲盒中任意一球，观察颜色后放入乙盒，再从乙盒中任取一球，令 X, Y 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球个数。

（1） 求 X, Y 的联合概率分布与边缘概率分布.

（2） 求 X, Y 相关系数.

得分	
阅卷人	

四、（10 分）

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-y}, & 0 < x < y \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

（1） 求 $Z = X + Y$ 的概率密度；

（2） 求 $Z = \max\{X, Y\}$ 的概率密度；

（3） 求在 $X = x$ 的条件下，Y 的条件概率密度。

得分	
阅卷人	

五、（9 分）

在区间 $(0,2)$ 上随机取一点，将该区间分成 2 段，较短一段的长度记为 X，较长一段的长度记为 Y，令 $Z=\dfrac{Y}{X}$.

（1） 求 X 的概率密度；

（2） 求 Z 的概率密度；

（3） 求 $E\left(\dfrac{X}{Y}\right)$。

得分	
阅卷人	

六、（9 分）

已知分子运动的速度 X 具有概率密度

$$f(x;\alpha)=\begin{cases}\dfrac{4x^2}{\alpha^3\sqrt{\pi}}e^{-(\frac{x}{\alpha})^2}, & x>0,\quad \alpha>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

$X_1,X_2,...,X_n$ 为 X 的简单随机样本.

（1） 求 α 的矩估计量和最大似然估计量；

（2） 验证所得矩估计是否为 α 的无偏估计。

得分	
阅卷人	

七、（9 分）

设二维随机变量 (X,Y) 服从区域

$$D=\{(x,y)|-1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$$

上的均匀分布.

（1） 写出 (X,Y) 的概率密度；

（2） 设 $Z=\dfrac{Y}{3X}$，求 Z 的概率密度。

得分	
阅卷人	

八、（9 分）

设随机变量 X_1 与 X_2 相互独立，且均服从 $N(0,1)$，X_3 的分布律为 $P(X_3=-1)=\frac{1}{4}$, $P(X_3=1)=\frac{3}{4}$，且 X_1 与 X_3 相互独立.

（1） 求 $Z=X_1X_3$ 的概率密度；

（2） 求 X_1 与 Z 的相关系数；

（3） $(X_1+X_2)^2$ 与 $(X_1-X_2)^2$ 是否相互独立？说明理由。