

2023 年秋概率论与数理统计期末考试（A）回忆版试题

编者：夏提雅 参与回忆者：夏提雅、白云点上半清天、开润、Luweiyang、Rambler

Version:2.0 (2023 年 12 月 10 日)

免责声明：本试题是在离开考场后，回忆出来的，不存在任何作弊行为；本试题题干部分不保证题干、选项与原题一致，但考察的中心思想一致。（考试时间：2023 年 12 月 9 日）

本次考试为闭卷考试，禁止使用计算器，考试时间为 120 分钟，满分 70 分。

一、填空题（共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1. 设事件 A, B, C 满足 A 与 C 互不相容，且 $P(AB) = \frac{1}{2}$ ， $P(C) = \frac{1}{3}$ ，则

$$P(AB|\bar{C}) = \underline{\hspace{2cm}}$$

2. 设事件 A, B 相互独立， $P(A) = 0.5$ ， $P(B) = 0.2$ ，随机变量 $X = \begin{cases} 1, & AB \text{ 发生} \\ 0, & AB \text{ 不发生} \end{cases}$ ，

$$Y = \begin{cases} 1, & A \cup B \text{ 发生} \\ 0, & A \cup B \text{ 不发生} \end{cases}，\text{ 则 } X, Y \text{ 的相关系数 } \rho_{XY} = \underline{\hspace{2cm}}$$

3. 在 5000 件产品中抽取 150 件样品进行检测，发现其中有 3 件次品，则这批产品中的次品数的估计值为 $\underline{\hspace{2cm}}$

4. 已知随机变量 X 的分布列如下

X	0	1	2
P	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

设 X_1, X_2, \dots, X_n 为 X 的简单随机样本，设 Y 为 X_1, X_2, \dots, X_n 中取值为 2 的个数，

$$\text{则 } D(Y) = \underline{\hspace{2cm}}$$

5. 已知随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布 $P(1)$ ， X_1, X_2, X_3, X_4 为取自 X 的简单随机样本，则 $P(\bar{X} > \frac{1}{4}) = \underline{\hspace{2cm}}$

6. 在 $[0,1]$ 内任取两点 X, Y ，记 $U = \max\{X, Y\}$ ， $V = \min\{X, Y\}$ ，则

$$E[(1-U)(1-V)] = \underline{\hspace{2cm}}$$

7. 已知随机变量 X 的方差为 $DX = 0.004$ ，根据切比雪夫不等式，

$$P(|X - EX| < 0.2) \geq \underline{\hspace{2cm}}$$

8. 已知正态总体 $X \sim N(\mu, 0.9^2)$ ，从中取容量为 9 的样本，样本均值 $\bar{X} = 5$ ，则 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为_____（ $z_{0.05} = 1.64$ ， $z_{0.025} = 1.96$ ）

9. 已知随机变量 X, Y 的联合概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} e^{-x}, & 0 < y < x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，则

$$P(Y > 1 | X = 2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

10. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为总体 $X \sim P(\lambda)$ 的简单随机样本，若 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a^{X_i}$ 为 e^λ 的无偏估计量，则常数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$

二、选择题（共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

1. 设 A, B, C 为三个事件，则 $\overline{A \cup B - A \cup C} =$

- A. $\bar{B} \cup C$ B. $\bar{A}(\bar{B} \cup C)$ C. $\overline{AB} \cup C$ D. $A \cup \bar{B} \cup C$

2. 下列说法正确的是

- A. 若事件 A, B 满足 $P(AB) = 0$ ，则事件 A, B 不相容
 B. 若事件 A, B 满足 $P(A\bar{B}) = P(A)(1 - P(B))$ ，则事件 A, B 相互独立
 C. 若随机变量 X 与 Y 同分布，则 $X = Y$
 D. 设 $F(x)$ 为随机变量 X 的分布函数，若 $F(x_1) = F(x_2)$ ，则 $x_1 = x_2$

3. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，其中 μ 已知， σ^2 未知，则下列选项不是统计量的是

- A. $X_1 + 5X_4$ B. $\sum_{i=1}^4 X_i - \mu$ C. $X_1 + \sigma$ D. $\sum_{i=1}^4 X_i^2$

4. 设 A, B 事件满足 $P(AB) > P(A)P(B)$ ，若存在事件 $C \subset AB$ ，使得 $A - C$ 与 B 独立，那么 $P(C) =$

- A. $P(A) - P(A|\bar{B})$ B. $P(A) - P(A|B)$
 B. $P(B) - P(B|\bar{A})$ D. $P(B) - P(B|A)$

5. 设 X_1, X_2, \dots, X_6 为取自 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本，样本方差为 S^2 ，则

$$D(S^2) =$$

A. $\frac{1}{5}\sigma^2$

B. $\frac{1}{5}\sigma^4$

C. $\frac{2}{5}\sigma^2$

D. $\frac{2}{5}\sigma^4$

本题得分_____

三、解答题（7分）

已知随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0 & , x < -1 \\ 0.2 & , -1 \leq x < 0 \\ 0.6 & , 0 \leq x < 1 \\ 1 & , x \geq 1 \end{cases}$ ，令 $Y = X^2$ ，求 Y 的

分布函数 $F_Y(y)$ 。

本题得分_____

四、解答题（7分）

已知随机变量 X, Y 的联合概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 2x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，求

$Z = 2X - Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$ 。

本题得分_____

五、解答题（7分）

设随机变量 X, Y 相互独立，且 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$ ， Y 的概率分布为 $P(Y=1) = P(Y=2) = \frac{1}{2}$ ，求 $Z = X^Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$ 。

本题得分_____

六、解答题（7分）

已知随机变量 $X \sim P(\lambda)$, $Y \sim E(\lambda)$, X 与 Y 相互独立, 若 X 与 Y 的数学期望相等, 求 λ 及 $E(X^2 2^Y)$ 。

本题得分_____

七、解答题（8分）

设总体 X 的分布函数为

$$F(x; \theta) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

其中 θ 为未知的大于零的参数， X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体的简单随机样本，求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_M$ 和最大似然估计量 $\hat{\theta}_L$ 。

本题得分_____

八、解答题（4分）

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本。

(1) 求 c 使得 $c \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$ 是 σ^2 的无偏估计量；

(2) 求 k 使得 $\hat{\sigma} = k \sum_{i=1}^n |X_i - \bar{X}|$ 为 σ 的无偏估计量。