2024 年秋哈工大（深圳）概率论与数理统计试题 A 参考答案

题目：Gaster、大半凉　题解：Ch. Ya.

为了保证题目的严谨性，部分题目的表述已经经过调整。

一、填空题（每题 2 分）

1. $P(A)=0.4, P(B)=0.5$，且 $P(A\cup B)=0.6$，则 $P(\bar{A}\cup\bar{B})=$ ________.

   已知 $P(A)=0.4, P(B)=0.5, P(A\cup B)=0.6$。

   由：
   $$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B).$$
   有：
   $$P(A\cap B)=0.9-0.6=0.3.$$
   由 De Morgan 定律：
   $$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}.$$
   有：
   $$P(\overline{A}\cup\overline{B})=1-P(A\cap B)=1-0.3=0.7.$$
   故答案为：$\boxed{0.7}$

2. 设 X 服从 $P(X=k)=\dfrac{a}{k(k+1)}$，$k=1,2,\cdots$ 则 $a=$ ________.

   随机变量 X 的分布为：
   $$P(X=k)=\frac{a}{k(k+1)},\quad k=1,2,\ldots$$
   由概率论第二公理，概率之和为 1，即：
   $$\sum_{k=1}^{\infty}P(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a}{k(k+1)}=1.$$
   由：
   $$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}.$$
   可知：
   $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a}{k(k+1)}=a\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1.$$
   因此：
   $$a=1.$$
   故答案为：$\boxed{1}$

3. 设 $X \sim P(\lambda)$ ，$E[(X-1)(X-2)]=1$，则 $\lambda=$ ________.

由：

$$E[(X-1)(X-2)]=1.$$

有：

$$E[X^2-3X+2]=1.$$

$X \sim P(\lambda)$，因此 $E(X)=\lambda$，$D(X)=\lambda$，并且

$$E[X^2]=D(X)+[E(X)]^2=\lambda+\lambda^2.$$

故

$$E[(X-1)(X-2)]=E[X^2]-3E[X]+2=(\lambda+\lambda^2)-3\lambda+2=\lambda^2-2\lambda+2=1.$$

得：

$$\lambda^2-2\lambda+1=0.$$

解得：

$$\lambda=1.$$

故答案为：$\boxed{1}$

4. 设 $E[X]=2, E[Y]=3, D[X]=4, D[Y]=16, E[XY]=14$。根据切比雪夫不等式，$P(|3X-2Y|\geq 3)=$ ________.

首先计算 $E[3X-2Y]$ ：

$$E[3X-2Y]=3E[X]-2E[Y]=0.$$

再计算 $D(3X-2Y)$

$$D(3X-2Y)=E[(3X-2Y)^2]-[E(3X-2Y)]^2=E[(3X-2Y)^2].$$

由于：

$$(3X-2Y)^2=9X^2-12XY+4Y^2.$$

故：

$$E[(3X-2Y)^2]=9E[X^2]-12E[XY]+4E[Y^2].$$

代入题中数据可求得：

$$E[X^2]=D(X)+(E[X])^2=4+2^2=4+4=8,$$

$$E[Y^2]=D(Y)+(E[Y])^2=16+3^2=16+9=25.$$

则：

$$E[(3X-2Y)^2]=4.$$

故 $D(3X-2Y)=4$。

由切比雪夫不等式：

$$P(|3X-2Y|\geq 3)\leq \frac{D(3X-2Y)}{3^2}=\frac{4}{9}.$$

故答案为：$\boxed{\frac{4}{9}}$

5. 设 $X\sim P(\lambda)$ 。$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 X 的简单随机样本，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a^{X_i}$ 是 e^{λ} 的无偏估计量，则 $a=$ ________.

设 $X\sim P(\lambda)$，给定简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，统计量：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a^{X_i}$$

是 e^{λ} 的无偏估计量。

对于满足泊松分布的 X：

$$E[a^X]=\sum_{x=0}^{\infty}a^x e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda a)^x}{x!}=e^{-\lambda}e^{\lambda a}=e^{\lambda(a-1)}.$$

依题意：

$$e^{\lambda(a-1)}=e^{\lambda}.$$

由于参数 $\lambda>0$：

$$a=2.$$

故答案为：$\boxed{2}$

二、选择题（每题 2 分）

1. 设事件 A,B,C 相互独立，$0<P(A),P(B),P(C)<1$，下列选项正确的是 ________.
   A. $B-A$ 和 $A-B$ 独立
   B. AC 和 BC 独立
   C. $P(AB|C)=P(A|C)P(B|C)$
   D. $P(C|AB)=P(C|A)P(C|B)$

由于 $P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)[1-P(B)]>0$，同理 $P(B-A)>0$, 而 $A-B$ 与 $B-A$ 互斥，即 $P(A-B)P(B-A)=0$，矛盾. A 不正确。

若 AC 和 BC 独立，则 $P(AC)P(BC)=P(ABC)$，而 $P(AC)P(BC)=P(A)P(B)P(C)^2$，$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$ 由于 $P(C)\neq 0$ 或 1，B 不正确.

$P(AB\mid C)=\frac{P(ABC)}{P(C)}=\frac{P(A)P(B)P(C)}{P(C)}=P(A)P(B)$, $P(A\mid C)=P(A),P(B\mid C)=P(B)$. C 正确.

D 显然是错误的，左 $=\frac{P(ABC)}{P(AB)}$，右 $=\frac{P(AC)P(BC)}{P(A)P(B)}=\frac{P(ABC)P(C)}{P(AB)}$。

故答案为：$\boxed{C}$

2. 下列是假命题的是 ________.

A. $P(A|B)=P(A)$，则 $P(A|\overline{B})=P(A)$

B. $P(A|B)>P(A)$，则 $P(\overline{A}|\overline{B})>P(\overline{A})$

C. $P(A|B)>P(A|\overline{B})$，则 $P(A|B)>P(A)$

D. $P(A|A\cup B)>P(\overline{A}|A\cup B)$，则 $P(A)>P(B)$

由 $P(A|B)=P(A)$ 得，A,B 相互独立，则 $P(A|\overline{B})=P(A)$ 显然成立，A 为真。

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}>P(A)\implies P(AB)>P(A)P(B),\quad 则:$$

$$P(\overline{A}|\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\,\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}=\frac{1-P(A)-P(B)+P(AB)}{1-P(B)}$$
$$>\frac{1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)}{1-P(B)}=\frac{[1-P(A)][1-P(B)]}{1-P(B)}=1-P(A)=P(\overline{A}).$$

故 B 为真。

由 $P(A|B)>P(A|\overline{B})$

$$\frac{P(AB)}{P(B)}>\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$$

$$\implies P(AB)[1-P(B)]>P(B)[P(A)-P(AB)]\implies P(AB)>P(A)P(B),$$

则:

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}>\frac{P(A)P(B)}{P(B)}=P(A).$$

故 C 为真。

$$P(A|A\cup B)=\frac{P(A\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(AB)},$$

$$P(\overline{A}|A\cup B)=\frac{P(\overline{A}\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(B)-P(AB)}{P(A)+P(B)-P(AB)}.$$

由 $P(A|A\cup B)>P(\overline{A}|A\cup B)$，得:

$$P(A)>P(B)-P(AB).$$

这不是恒真的。反例很容易举出，不再赘述。

故答案为: $\boxed{D}$

3. $X\sim N(0,\sigma^2)$，$Y\sim N(0,\sigma^2)$，且 X,Y 相互独立，则 $P(|X-Y|<1)$________.

A. 与 μ 无关，与 σ^2 有关

B. 与 μ 有关，与 σ^2 无关

C. 与 μ 无关，与 σ^2 无关

D. 与 μ 有关，与 σ^2 有关

$X-Y\sim N(0,2\sigma^2)$，则：

$$P\left(|X-Y|<1\right)=P\left(\left|\frac{X-Y}{\sqrt{2}\sigma}\right|<\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}}\right)-1.$$

故答案为：$\boxed{A}$

4. $X_1,X_2,X_3,\cdots,X_n$ 是取自总体 $X\sim N(\mu,1)$ 的样本，则 ________ 不服从卡方分布。
A. $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$
B. $2(X_n-X_1)^2$
C. $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$
D. $n(\bar{X}-\mu)^2$

由于 $X_i-\mu\sim N(0,1)$，$X_n-X_1\sim N(0,\sqrt{2})$，$\overline{X}\sim N\left(\mu,\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)$ 则

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n).$$

$$\left(\frac{X_n-X_1}{\sqrt{2}}\right)^2\sim\chi^2(1).$$

$$(n-1)S^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n-1).$$

$$\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)\sim N(0,1),n(\overline{X}-\mu)^2\sim\chi^2(1).$$

故答案为：$\boxed{B}$

5. X_1,X_2,X_3,X_4,X_5 是取自总体 $X\sim N(1,1)$ 的样本,则统计量 $\dfrac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|}$ 服从 ________.
A. $N(0,1)$
B. $t(1)$
C. $\chi^2(1)$
D. $F(1,1)$

$X_1,X_2,\ldots,X_5$来自总体 $N(1,1)$，所以 $X_1-X_2\sim N(0,2)$, $X_3+X_4-2\sim N(0,2)$。
则有 $Y=\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$, $Z=\frac{X_3+X_4-2}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$.

$$且\quad\frac{|X_3+X_4-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{(X_3+X_4-2)^2}{(\sqrt{2})^2}}=\sqrt{Z^2}.$$

$$Y\sim N(0,1),Z^2\sim\chi^2(1),\quad 所以\frac{X_1+X_2}{|X_3-X_4+2|}=\frac{Y}{\sqrt{\frac{Z^2}{1}}}\sim t(1).$$

故答案为：$\boxed{B}$

三、（5 分）

随机变量 X 的分布列如下：

X	-1	0	1
P	0.2	a	b

且满足 $4P(X=0)=P(|X|=1)$，求：

(1) a,b 的值；

(2) X 的分布函数；

(3) 求 $P(X\leq 0|X\geq 0)$。

由已知分布可知：

$$P(|X|=1)=P(X=-1)+P(X=1)=0.2+b.$$

又有：

$$4P(X=0)=4a=P(|X|=1)=0.2+b.$$

由于总概率和为 1：

$$0.2+a+b=1.$$

代入 $b=4a-0.2$ 可得：

$$a=0.2, b=0.6$$

(1) $a=0.2$, $b=0.6$。

(2) X 的分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases}0 & ,x<-1\\0.2 & ,-1\leq x<0\\0.4 & ,0\leq x<1\\1 & ,x\geq 1\end{cases}$$

(3)

$$P(X\geq 0)=P(X=0)+P(X=1)=0.2+0.6=0.8.$$

$$P(X\leq 0\mid X\geq 0)=\frac{P(X=0)}{P(X\geq 0)}=\frac{0.2}{0.8}=0.25.$$

$$P(X\leq 0\mid X\geq 0)=0.25$$

四、（5 分）

盒子里有六个小球。红球、白球、黑球分别为 1、2、3 个，从中摸两个球，设 X 为红球个数，Y 为白球个数，求：

(1) (X,Y) 的联合概率分布；

(2) $Z=XY$，求 Z 的概率分布；

(3) 求 $\mathrm{Cov}(X,Y)$。

首先计算所有可能 (X,Y) 的概率。总的取法数为 15。
$(X=0,Y=0)$：取法数为 3。概率为 3/15。
$(X=0,Y=1)$：取法数为 6。概率为 6/15。
$(X=0,Y=2)$：取法数为 1。概率为 1/15。
$(X=1,Y=0)$：取法数为 3。概率为 3/15。
$(X=1,Y=1)$：取法数为 2。概率为 2/15。
$(X=1,Y=2)$：取法数为 0。
(1) 因此 (X,Y) 的联合概率分布为：

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{3}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{1}{15}$
1	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	0

(2) 仅有 $(X,Y)=(1,1)$ 时 $Z=1$，其余情况 $Z=0$。
所以：

Z	0	1
P	$\frac{13}{15}$	$\frac{2}{15}$

(3) $\mathrm{Cov}(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]=E[Z]-E[X]E[Y]$。

$$E[X]=0\cdot\frac{10}{15}+1\cdot\frac{5}{15}=\frac{1}{3}.$$

$$E[Y]=0\cdot\frac{6}{15}+1\cdot\frac{8}{15}+2\cdot\frac{1}{15}=\frac{8}{15}+\frac{2}{15}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}.$$

$$E[Z]=1\cdot\frac{2}{15}=\frac{2}{15}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E[Z]-E[X]E[Y]=-\frac{4}{45}.$$

五、(8 分)

从区间 $(1,3)$ 中随机取一个数，记为 X，再从 $(X,3)$ 中取一个数，记为 Y，求:

(1) $f(x,y)$;

(2) $f_Y(y)$;

(3) $P(X+Y\le 4)$。

随机变量 X 均匀分布于区间 $(1,3)$，则其概率密度函数为

$$f_X(x)=\frac{1}{2},\quad 1<x<3.$$

在给定 $X=x$ 的条件下，Y 在区间 $(x,3)$ 上均匀分布，因此条件密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{3-x},\quad x<y<3.$$

(1) 联合密度函数:

$$f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{6-2x} & ,1<x<y<3.\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$$

(2) 边际密度 $f_Y(y)$: 对 y, 有 $1<x<y<3$。

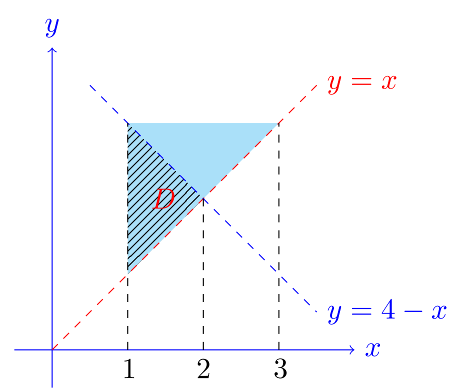
$$\int_1^y \frac{1}{6-2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[-\ln(3-x)\right]_{x=1}^{x=y}=\frac{1}{2}\left(\ln(2)-\ln(3-y)\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3-y},1<y<3$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3-y} & ,1<y<3\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$$

(3) $P(X+Y\le 4)$: 需要在 $1<x<3, x<y<3$ 的区域内，找满足 $x+y\le 4$ 的部分。考虑 x，当 $x\in(1,3)$ 时，$y\in(x,3)$. 条件 $x+y\le 4$ 即 $y\le 4-x$. 若 $4-x\le 3$，则 $x\ge 1$。若 $4-x\ge x$，则 $x\le 2$。因此 x 的积分范围为 $[1,2]$。

对于 $1\le x\le 2$:

$$D: 1\le x\le 2, x<y\le 4-x.$$



$$P(X+Y\le 4)=\iint_D \frac{1}{6-2x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

先对 y 积分:

$$\int_x^{4-x}\mathrm{d}y=(4-x)-x=4-2x.$$

于是

$$P(X+Y\le 4)=\int_1^2\frac{4-2x}{6-2x}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{2-x}{3-x}\mathrm{d}x=\int_1^2 1-\frac{1}{3-x}\mathrm{d}x=1-\int_1^2\frac{1}{3-x}\mathrm{d}x=1-\ln 2.$$

故

$$P(X+Y\le 4)=1-\ln 2.$$

六、(8 分)

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自总体 $X \sim N(0, \sigma^2)$ 的样本，设 $\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差，求：

$$D\left[\overline{X}^2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) S^2\right]$$

样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 来自 $N(0, \sigma^2)$。$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差。

故 $\overline{X} \sim N(0, \frac{\sigma^2}{n})$，且 S^2 与 $\overline{X}$ 独立。

$$E(\overline{X}^2) = D(\overline{X}) + [E(\overline{X})]^2 = \frac{\sigma^2}{n}, \quad D(\overline{X}^2) = 2[D(\overline{X})]^2 \left(\frac{\sigma^2}{n}\right)^2 = \frac{2\sigma^4}{n^2}.$$

又知 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$，$\chi^2_{n-1}$ 的方差为 $2(n-1)$，故

$$D(S^2) = \frac{\sigma^4}{(n-1)^2} \cdot 2(n-1) = \frac{2\sigma^4}{n-1}.$$

因此

$$D\left[\overline{X}^2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) S^2\right] = D(\overline{X}^2) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 D(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n^2} + \frac{(n-1)^2}{n^2} \cdot \frac{2\sigma^4}{n-1} = \frac{2\sigma^4}{n^2} + \frac{2\sigma^4(n-1)}{n^2}.$$

故：

$$D\left[\overline{X}^2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) S^2\right] = \frac{2\sigma^4}{n}.$$

七、(10 分)

X 的概率密度函数为

$$f(x;a)=\begin{cases}\dfrac{2}{a^2}x & ,0<x<a\\ 0 & ,其他\end{cases}$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体的一组样本，求 a 的矩估计 $\hat{a}_M$ 和最大似然估计 $\hat{a}_L$。

(1) 矩估计 $\hat{a}_M$：

首先求 $E(X)$：

$$E(X)=\int_0^a xf(x;a)\mathrm{d}x=\frac{2}{a^2}\int_0^a x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{a^2}\cdot\frac{a^3}{3}=\frac{2a}{3}.$$

样本均值 $\overline{X}$ 的矩估计满足 $\overline{X}=E(X)=\frac{2a}{3}$，因此

$$\hat{a}_M=\frac{3}{2}\overline{X}.$$

(2) 极大似然估计 $\hat{a}_L$：

样本为 $X_1,\cdots,X_n$，似然函数：

$$L(a)=\prod_{i=1}^n f(X_i;a)=\prod_{i=1}^n\frac{2X_i}{a^2},\quad 0<X_i<a.$$

$$\ln L(a)=\ln\prod_{i=1}^n\frac{2X_i}{a^2}=\sum_{i=1}^n\ln\frac{2X_i}{a^2}=\sum_{i=1}^n\ln 2X_i-2n\ln a,\quad 0<X_i<a.$$

$L(a)$ 随 a 增大而减小。要使似然非零，必须有 $a\geq\max X_i$。为了最大化 $L(a)$，应取 a 为最小的满足 $a\geq\max X_i$ 的值，即

$$\hat{a}_L=\max X_i.$$

八、（10 分）

$X \sim N(0,\sigma^2), Y \sim N(0,2\sigma^2)$，且 X,Y 相互独立，设 $Z = X - Y$。$Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ 是取自总体的一个样本，求：

(1) Z 的概率密度；

(2) σ^2 的极大似然估计 $\hat{\sigma^2}$；

(3) 判断 $\hat{\sigma^2}$ 是否是 σ^2 的无偏估计。

(1) X, Y 是独立正态变量，故 $D(Z) = D(X) + D(Y) = \sigma^2 + 2\sigma^2 = 3\sigma^2$。则有

$$Z \sim N(0, 3\sigma^2).$$

其密度函数为

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{6\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{z^2}{6\sigma^2}\right).$$

(2) 对 Z_i，$Z_i \sim N(0, 3\sigma^2)$。极大似然正态方差估计是样本平方和除以样本量：

$$3\hat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \implies \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n} Z_i^2.$$

当然，使用更基础方法求解如下，似然函数为：

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{6\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{Z_i^2}{6\sigma^2}\right)\right] = (6\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{1}{6\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} Z_i^2\right).$$

$$\ln L(\sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(6\pi\sigma^2) - \frac{1}{6\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} Z_i^2.$$

对 σ^2 求导：

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\sigma^2)}{\mathrm{d}\sigma^2} = -\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{6\sigma^4}\sum_{i=1}^{n} z_i^2.$$

令 $\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\sigma^2} = 0$，得：

$$\hat{\sigma^2} = \frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n} Z_i^2.$$

(3)

$$E(\hat{\sigma^2}) = E\left(\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n} Z_i^2\right) = \frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n} E(Z_i^2) = \frac{1}{3}E(Z^2).$$

由于 $Z \sim N(0, 3\sigma^2)$，有：

$$E(Z^2) = D(Z) + [E(Z)]^2 = 3\sigma^2.$$

因此：

$$E(\hat{\sigma^2}) = \frac{1}{3}(3\sigma^2) = \sigma^2.$$

所以

$\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量。

九、（4 分）

某加工厂加工的每箱商品的质量是随机数，每箱质量的均值为 50kg，标准差为 2.5kg。已知一辆货车载重上限为 5.05t，试根据中心极限定理求每辆货车的最大载货箱数使得不会超重的概率为 0.977。（参考数据：$\Phi(2)=0.977$）。

已知 $E(X_i)=50, \sqrt{D(X_i)}=2.5\ (i=1,2,\ldots)$，设每辆车可装 N 箱，要求满足：

$$P\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \leq 5050\right) \geq 0.977.$$

由期望性质可知：

$$E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \sum_{i=1}^{N} E(X_i) = 50N.$$

根据独立同分布的中心极限定理，当 N 充分大时可以认为：

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} X_i - 50N}{2.5\sqrt{N}} \sim N(0,1),$$

因此有：

$$P\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \leq 5050\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} X_i - 50N}{2.5\sqrt{N}} \leq \frac{5050-50N}{2.5\sqrt{N}}\right).$$

而：

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} X_i - 50N}{2.5\sqrt{N}} \leq \frac{5050-50N}{2.5\sqrt{N}}\right) \approx \Phi\left(\frac{5050-50N}{2.5\sqrt{N}}\right) = 0.977.$$

根据 $\Phi(2)=0.977$，可知：

$$\frac{5050-50N}{2.5\sqrt{N}} = 2.$$

化简可得：

$$1010 - 10N = \sqrt{N}.$$

解此二次方程，得：

$$N = 100$$

即每辆车最多可装 100 箱。