常见随机变量.

1、伯努利　$X \sim B(1,p)$.

- 分布列：$p_X(k)=\begin{cases} p, & k=1 \\ 1-p, & k=0 \end{cases}$.
- 期望：$EX=p$.
- 方差：$\mathrm{var}X=p(1-p)$.
- 实例：抛掷一枚硬币，向上概率为 p，X 为是否向上.

2. 二项　$X \sim B(n,p)$.

- 分布列：$p_X(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$，$k=0,1,\cdots,n$.
- 期望：$EX=np$.
- 方差：$\mathrm{var}X=np(1-p)$.
- 实例：抛掷 n 枚硬币，每枚向上概率均为 p，X 为向上次数.

3. 泊松　$X \sim P(\lambda)$

- 分布列：$p_X(k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$，$k=0,1,2,\cdots$
- 期望：$EX=\lambda$
- 方差：$\mathrm{var}X=\lambda$.
- 实例：一个城市一天中发生车祸事故数.
- 性质：取 $\lambda=np$，则当 $n\to\infty$ 时，泊松分布近似二项分布.

4. 几何分布 $X \sim G(p)$

- 分布列：$p_X(k) = (1-p)^{k-1} p$，$k = 1, 2, \cdots$
- 期望：$EX = \frac{1}{p}$
- 方差：$\operatorname{var} X = \frac{1-p}{p^2}$
- 实例：抛掷一枚硬币直至向上，向上概率为 p，X 为总次数
- 性质：无记忆性，即 $\mathbb{P}(X > n+m \mid X > n) = \mathbb{P}(X > m)$

5. 超几何分布

- 分布列：$p_X(k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$
- 期望：$EX = \frac{nM}{N}$
- 方差：$\operatorname{var} X = \frac{nM}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$
- 实例：一盒内有 N 个球，其中 M 白 $N-M$ 黑，从中无放回取 n 个球且每次取球独立，X 表示取出白球个数
- 性质：当 $N \to \infty$ 时，超几何分布近似二项分布

6. 均匀分布 $X \sim U(a, b)$

- 概率密度函数：$f_X(x) = \frac{1}{b-a}$，$a \le x \le b$
- 期望：$EX = \frac{a+b}{2}$
- 方差：$\operatorname{var} X = \frac{(b-a)^2}{12}$

7. 指数分布 $X \sim E(\lambda)$.

- 概率密度函数: $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$
- 期望: $EX = \frac{1}{\lambda}$.
- 方差: $\operatorname{var} X = \frac{1}{\lambda^2}$.
- 性质: 无记忆性, 即 $\mathbb{P}(X > x+y \mid X > x) = \mathbb{P}(X > y)$.

8. 正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

- 概率密度函数: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.
- 期望: $EX = \mu$
- 方差: $\operatorname{var} X = \sigma^2$.

附录·一些推导

1、二项分布的期望与方差.

①. $EX=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}=np\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{n-1-k}$

$=np\,(p+1-p)^{n-1}=np$.

其中用到了恒等式 $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}\frac{n}{k}$ 和 二项式定理.

②. $EX^2=\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}nk\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}+n\sum_{k=1}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}$

$=np+np\sum_{k=0}^{n-1}k\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{n-1-k}=np+np(n-1)p$.

③. $\operatorname{var}X=EX^2-(EX)^2=np+n(n-1)p^2-n^2p^2=np-np^2=np(1-p)$.

2、泊松分布的期望与方差.

①. $EX=\sum_{k=0}^{\infty}ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=\lambda$.

其中用到了 e^x 的展开: $e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$.

②. $EX^2=\sum_{k=0}^{\infty}k^2e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{(k-1)!}=e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}+e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-2)!}$

$=e^{-\lambda}\cdot\lambda e^{\lambda}+e^{-\lambda}\cdot\lambda^2\cdot e^{\lambda}=\lambda+\lambda^2$.

③. $\operatorname{var}X=EX^2-(EX)^2=\lambda+\lambda^2-\lambda^2=\lambda$.

3. 几何分布的期望与方差.

①. $EX=\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}p$.

设 $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}(x^k)'=\left(\sum_{k=1}^{\infty}x^k\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$.

故 $EX=p\cdot f(1-p)=\frac{1}{p}$.

②. $EX^2=\sum_{k=1}^{\infty}k^2(1-p)^{k-1}p$.

设 $g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2x^{k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}(kx^k)'=\left(\sum_{k=1}^{\infty}kx^k\right)'=(x\,f(x))'=\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)'=\frac{1+x}{(1-x)^3}$

故 $EX^2=p\,g(1-p)=p\cdot\frac{2-p}{p^3}=\frac{2-p}{p^2}$.

③. $\operatorname{var}X=EX^2-(EX)^2=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}$.

4. 超几何分布的期望与方差.

①. $$EX=\sum_k k\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}=\frac{1}{\binom{N}{n}}\sum_k M\binom{M-1}{k-1}\binom{N-M}{n-k}=\frac{M}{\binom{N}{n}}\binom{N-1}{n-1}=\frac{nM}{N}.$$

其中用到了恒等式 $\binom{N}{n}=\binom{N-1}{n-1}\frac{N}{n}$ 和范德蒙德卷积式 $\sum_k\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}=\binom{r+s}{n}$.

②. $$EX^2=\sum_k k^2\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}=\frac{M}{\binom{N}{n}}\sum_k k\binom{M-1}{k-1}\binom{N-M}{n-k}=\frac{M}{\binom{N}{n}}\sum_k\binom{M-1}{k-1}\binom{N-M}{n-k}+\frac{M}{\binom{N}{n}}\sum_k(k-1)\binom{M-1}{k-1}\binom{N-M}{n-k}$$

$$=\frac{M}{\binom{N}{n}}\binom{N-1}{n-1}+\frac{M(M-1)}{\binom{N}{n}}\binom{N-2}{n-2}=\frac{nM}{N}+\frac{M(M-1)n(n-1)}{N(N-1)}=\frac{nM(N-1)+nM(M-1)(n-1)}{N(N-1)}$$

③. $$\mathrm{var}X=EX^2-(EX)^2=\frac{nM(N-1)+nM(M-1)(n-1)}{N(N-1)}-\frac{n^2M^2}{N^2}=\frac{nM}{N}\left[1+\frac{(M-1)(n-1)}{N-1}-\frac{nM}{N}\right]$$

$$=\frac{nM}{N}\cdot\frac{(N-M)(N-n)}{N(N-1)}=\frac{nM}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\cdot\frac{N-n}{N-1}.$$

5. 指数分布的期望与方差.

①. $$EX=\int_0^{+\infty}x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx=-\int_0^{+\infty}x\,de^{-\lambda x}=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}dx=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\lambda}.$$

②. $$EX^2=\int_0^{+\infty}x^2\lambda e^{-\lambda x}dx=-\int_0^{+\infty}x^2de^{-\lambda x}=2\int_0^{+\infty}xe^{-\lambda x}dx=\frac{2}{\lambda^2}.$$

③. $$\mathrm{var}X=EX^2-(EX)^2=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}.$$

6. 标准正态分布的归一性.

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty}e^{-\frac{r^2}{2}}rdr$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-\frac{r^2}{2}}d\left(\frac{r^2}{2}\right)=e^{-\frac{r^2}{2}}\Big|_{+\infty}^{0}=1.$$

故 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1.$$

7. 几何分布的无记忆性.

首先计算尾概率: $\mathbb{P}(X>n)=\sum_{k=n+1}^{\infty}(1-p)^{k-1}p=p\cdot\frac{(1-p)^n}{1-(1-p)}=(1-p)^n.$

于是: $\mathbb{P}(X>n+m\mid X>n)=\frac{\mathbb{P}(X>n+m)}{\mathbb{P}(X>n)}=\frac{(1-p)^{n+m}}{(1-p)^n}=(1-p)^m=\mathbb{P}(X>m).$

8. 指数分布的无记忆性.

首先计算尾概率: $P(X>x)=\int_x^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx= e^{-\lambda x}\Big|_{+\infty}^{x}=e^{-\lambda x}$.

于是: $P(X>x+y\mid X>x)=\dfrac{P(X>x+y)}{P(X>x)}=\dfrac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda x}}=e^{-\lambda y}=P(X>y)$.

9. 泊松分布近似二项分布.

取 $\lambda=np$, 则:

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k\lambda^k}{k!\,n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}=\frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n^k}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot 1\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right]^{\frac{-\lambda(n-k)}{n}}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

10. 正态分布的线性变换.

设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $Y=aX+b$, $a\neq 0$, 则:

$$F_Y(y)=P(aX+b\le y)=\begin{cases}P\left(X\le\frac{y-b}{a}\right), & a>0\\ P\left(X\ge\frac{y-b}{a}\right), & a<0\end{cases}=\begin{cases}F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & a>0\\ 1-F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & a<0\end{cases}$$

故 $$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\begin{cases}\frac{1}{a}f_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & a>0\\ -\frac{1}{a}f_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & a<0\end{cases}=\frac{1}{|a|}f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)=\frac{1}{|a|}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}$$

$$=\frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-a\mu-b)^2}{2a^2\sigma^2}}$$

所以 $Y\sim N(a\mu+b,\ a^2\sigma^2)$.