数理统计

xyfJASON

1 正态分布的三个导出分布

1.1 χ^2 分布

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为 n 个独立的服从 $N(0,1)$ 的随机变量，则称

$$Z = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

的分布为自由度为 n 的 χ^2 分布，记作 $Z \sim \chi^2(n)$.

期望与方差：

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}Z = n \\ &\mathrm{var}Z = 2n \end{aligned}$$

证：由于

$$\mathbb{E}X_i^2 = \mathrm{var}X_i + (\mathbb{E}X_i)^2 = 1 + 0 = 1$$

故

$$\mathbb{E}Z = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_i^2 = n$$

又由于

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X_i^4 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \varphi(x) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \mathrm{d}e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = -\frac{3}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \mathrm{d}e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = 3 \end{aligned}$$

故

$$\mathrm{var}X_i^2 = \mathbb{E}X_i^4 - (\mathbb{E}X_i^2)^2 = 3 - 1 = 2$$

故

$$\mathrm{var}Z = \mathrm{var}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}X_i = 2n$$

证毕。

1.2 t 分布

设 $X \sim N(0,1)$，$Y \sim \chi^2(n)$，X, Y 相互独立，则称

$$t = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$$

的分布为自由度为 n 的 t 分布，记作 $t \sim t(n)$.

1.3 F 分布

设 $X \sim \chi^2(n), Y \sim \chi^2(m)$，$X, Y$ 独立，则称

$$Z = \frac{X/n}{Y/m}$$

的分布为自由度为 n, m 的 F 分布，记作 $Z \sim F(n, m)$.

1.4 性质

设 $X_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$，则：

1. 样本均值服从期望相同、方差更小的正态分布：
$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$
易证。
2. 样本均值的标准化：
$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$
易证。
3. 记 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ 为样本方差，则
$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$
证明较为复杂，此处略去。

4. $\bar{X}$ 与 S^2 独立，证明略去。

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S} \sim t(n-1)$$

证：首先，由性质 2 知：$\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$；其次，由性质 3 知：$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$；于是，根据 t 分布的定义有：

$$\frac{\dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\dfrac{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}{n-1}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S} \sim t(n-1)$$

证毕。

6. 设 $X_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$i=1,2,\cdots,n$，样本方差为 S_1^2；

$Y_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu_2, \sigma_2^2)$，$i=1,2,\cdots,m$，样本方差为 S_2^2，且 X_i, Y_i 相互独立，则：

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n-1, m-1)$$

证：由性质 3 知：$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n-1)$，$\frac{(m-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(m-1)$，于是根据 F 分布的定义有：

$$\frac{\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma_1^2}/(n-1)}{\frac{(m-1)S_2^2}{\sigma_2^2}/(m-1)} \sim F(n-1, m-1)$$

证毕。

2 点估计

2.1 矩估计

基本思想：对于总体矩 $\mu_k=\mathbb{E}X^k$，直接用样本矩 $A_k=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^k$ 近似之，得到：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k\approx\mathbb{E}X^k$$

左式包含已知的 X_i，右式可用参数表达，于是我们可以将未知的参数用已知的 X_i 表示出来，这就是矩估计。

一般地，有多少个参数，就需要几阶矩，这样才有足够的方程数。

2.2 极大似然估计

基本思想：设 $X_i\overset{\text{iid}}{\sim}f(x;\vec{\theta})$，则 $(X_1,\cdots,X_n)$ 的联合概率密度函数为 $\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i;\vec{\theta})$. 对于一组已知的样本 $(x_1,\cdots,x_n)$，这是一个关于 $\vec{\theta}$ 的函数，于是一个自然的想法是，我们取这样的一个 $\vec{\theta}$，它使得 $L(\vec{\theta})=\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i;\vec{\theta})$ 取到最大值。这就是极大似然估计。

于是问题转化成了一个多元微分学问题。我们知道，$L(\vec{\theta})$ 的最大值在它的驻点或边界上取到，但直接令 $\frac{\partial L(\vec{\theta})}{\partial\theta_i}=0$ 的计算量较大。注意到 $L(\vec{\theta})$ 和 $\ln L(\vec{\theta})$ 有相同的驻点，于是我们令：

$$\frac{\partial\ln L(\theta)}{\partial\theta_i}=0$$

就可以较为轻松的找到驻点，随后在这些驻点以及边界上寻找最大值即可。

2.3 无偏性

对于我们的参数估计量 $\hat{\theta}$，若对 $\forall\theta$ 都有 $\mathbb{E}\hat{\theta}=\theta$，则称 $\hat{\theta}$ 是无偏的。

典型例子：样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 是总体方差 σ^2 的无偏估计。

证：首先注意到：$\mathbb{E}\bar{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{E}X_i=\mu$，$\text{var}\bar{X}=\frac{\sigma^2}{n}$，于是：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}S^2 &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2\bar{X}\sum_{i=1}^{n}X_i + n\bar{X}^2\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}X_i^2 - n\mathbb{E}\bar{X}^2\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\left[n\sigma^2 + n\mu^2 - n\cdot\frac{\sigma^2}{n} - n\mu^2\right] \\
&= \sigma^2
\end{aligned}
$$

证毕。