极限理论

xyfJASON

1 两个不等式

1.1 马尔可夫不等式

设随机变量 X 只取非负值，则对任意 $a>0$，有：

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}X}{a}$$

粗略来讲，马尔可夫不等式指出，一个非负随机变量如果均值很小，那么该随机变量取大值的概率也很小。

证：这里假设 X 是连续随机变量，离散类似。

$$\mathbb{E}X = \int_0^{+\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^{+\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x \geqslant a\int_a^{+\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = a \cdot \mathbb{P}(X \geqslant a)$$

证毕。

1.2 切比雪夫不等式

设随机变量 X 的均值为 μ，方差为 σ^2，则对任意 $c>0$，有：

$$\mathbb{P}(|X-\mu| \geqslant c) \leqslant \frac{\sigma^2}{c^2}$$

粗略来讲，切比雪夫不等式指出，如果一个随机变量的方差非常小，那么该随机变量取原理均值 μ 的概率也非常小。

证：利用马尔可夫不等式，

$$\mathbb{P}(|X-\mu| \geqslant c) = \mathbb{P}((X-\mu)^2 \geqslant c^2) \leqslant \frac{\mathbb{E}[(X-\mu)^2]}{c^2} = \frac{\sigma^2}{c^2}$$

证毕。

2 弱大数定律

设 $X_1,\cdots,X_n$ 独立同分布，其公共分布均值为 μ，则对任意 $\epsilon>0$，有：

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(|\bar{X}-\mu|\geqslant\epsilon)=0$$

粗略来讲，弱大数定律表明，独立同分布的随机变量序列的样本均值，在大样本的情况下，以很大的概率与随机变量的均值接近，或称作样本均值依概率收敛到真值 μ。

证：这里仅对方差有界的情形进行证明，方差无界时弱大数定律依然成立，但是证明较为精巧。

视 $\bar{X}=\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ 为我们要研究的随机变量，其均值和方差为：

$$\mathbb{E}\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}X_i=\mu$$
$$\operatorname{var}(\bar{X})=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{var}(X_i)=\frac{\sigma^2}{n}$$

于是根据切比雪夫不等式，有：$\forall\epsilon>0$，

$$\mathbb{P}(|\bar{X}-\mu|\geqslant\epsilon)\leqslant\frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}\to 0\quad(n\to\infty)$$

证毕。

一般情形的弱大数定理称为辛钦大数定律，而方差有界的情形称之为切比雪夫大数定律。

更特殊的，对于 $X_1,\cdots,X_n$ 独立同分布于 $B(1,p)$ 的情形而言，我们称之为伯努利大数定律：

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(|\bar{X}-p|\geqslant\epsilon)=0$$

3 中心极限定理

设 $X_1, \cdots, X_n$ 是独立同分布的随机变量序列，序列的每一项的均值为 μ，方差为 σ^2，则对 $\forall x \in \mathbb{R}$，有：

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leqslant x \right) = \Phi(x)$$

粗略来讲，中心极限定理表明，在大样本的情况下，独立同分布的随机变量序列的样本均值的标准化结果服从标准正态分布。

> 标准化：设一个随机变量 X 有均值和方差，称 $\frac{X-\mathbb{E}X}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}}$ 为 X 的标准化，因为这个结果的均值为 0，方差为 1。
>
> 样本均值的标准化即为：
>
> $$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

这个一般情形的定理被称作林德伯格-莱维中心极限定理。

对于 $X_1, \cdots, X_n$ 独立同分布于 $B(1,p)$ 的特殊情形而言，我们称之为棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理：

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant x \right) = \Phi(x)$$