# 随机变量的独立性与相关性

xyfJASON

# 1 概览

$$
\left.\begin{array}{l} F_{X,Y}(x,y)=F_X(x)F_Y(y) \\ p_{X,Y}(x,y)=p_X(x)p_Y(y) \\ f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y) \end{array}\right. \Longleftrightarrow \text{独立} \Longrightarrow \text{不相关} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} \mathrm{cov}(X,Y)=0 \\ \mathrm{var}(X+Y)=\mathrm{var}(X)+\mathrm{var}(Y) \\ \mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ \rho(X,Y)=0 \end{array}\right.
$$

注意，我们所说的不相关默认指不线性相关，即 $X$ 与 $Y$ 没有线性关系，但是可能具有其他关系而导致不独立。

# 2 协方差与相关系数

## 2.1 定义

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{cov}(X,Y)=\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y)]\\
&\rho(X,Y)=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{var}X\mathrm{var}Y}}
\end{aligned}
$$

当 $\mathrm{cov}(X,Y)=0$ 时（$\rho(X,Y)=0$），称 $X$ 和 $Y$ 不相关。

## 2.2 性质

- $\mathrm{cov}(X,Y)=\mathbb{E}XY-\mathbb{E}X\mathbb{E}Y$
- $\mathrm{cov}(X,X)=\mathrm{var}(X)$
- $\mathrm{cov}(X,aY+b)=a\cdot\mathrm{cov}(X,Y)$
- $\mathrm{cov}(X,Y+Z)=\mathrm{cov}(X,Y)+\mathrm{cov}(X,Z)$

- $\mathrm{var}(cX)=c^2\mathrm{var}X$
- $\mathrm{var}(X+Y)=\mathrm{var}X+2\mathrm{cov}(X,Y)+\mathrm{var}Y$
- $\mathrm{var}(aX+bY)=a^2\mathrm{var}X+2ab\mathrm{cov}(X,Y)+b^2\mathrm{var}Y=\begin{bmatrix}a & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{var}X & \mathrm{cov}(X,Y)\\ \mathrm{cov}(Y,X) & \mathrm{var}Y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}$
- $\mathrm{var}(X)=0\implies\mathbb{P}(X=\mathbb{E}X)=1$

  证：根据切比雪夫不等式，$\mathbb{P}\left(|X-\mathbb{E}X|\geqslant\frac{1}{n}\right)\leqslant n^2\mathrm{var}(X)=0$ 对 $\forall n$ 都成立，故 $\mathbb{P}(X=\mathbb{E}X)=1$. 证毕。

- $|\rho|\leqslant 1$，且 $\rho=1$ 当且仅当 $\mathbb{P}(Y=aX+b)=1$.

  证：对 $\forall t\in\mathbb{R}$，由于 $\mathrm{var}(Y-tX)=t^2\mathrm{var}X-2t\mathrm{cov}(X,Y)+\mathrm{var}Y\geqslant 0$，所以：

  $$\Delta=4\mathrm{cov}^2(X,Y)-4\mathrm{var}X\mathrm{var}Y\leqslant 0$$

  即有：$|\rho|\leqslant 1$，且 $\rho=1$ 当且仅当存在某个 $b$ 使得 $\mathrm{var}(Y-bX)=0$，于是根据方差的性质有：$\mathbb{P}(Y-bX=\mathbb{E}[Y-bX]=a)=1$，其中 $a,b$ 均为常数，证毕。