

随机变量的独立性与相关性

xyfjASON

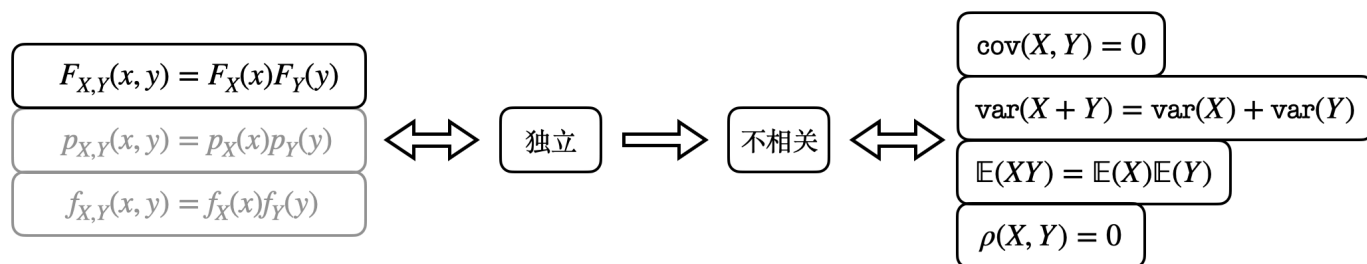
1 概览

2 协方差与相关系数

2.1 定义

2.2 性质

1 概览



注意，我们所说的不相关默认指非线性相关，即 X 与 Y 没有线性关系，但是可能具有其他关系而导致不独立。

2 协方差与相关系数

2.1 定义

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X, Y) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)] \\ \rho(X, Y) &= \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{\operatorname{var}X \operatorname{var}Y}}\end{aligned}$$

当 $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$ 时 ($\rho(X, Y) = 0$)，称 X 和 Y 不相关。

2.2 性质

- $\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$
- $\operatorname{cov}(X, X) = \operatorname{var}(X)$
- $\operatorname{cov}(X, aY + b) = a \cdot \operatorname{cov}(X, Y)$
- $\operatorname{cov}(X, Y + Z) = \operatorname{cov}(X, Y) + \operatorname{cov}(X, Z)$

- $\operatorname{var}(cX) = c^2 \operatorname{var}X$

- $\operatorname{var}(X + Y) = \operatorname{var}X + 2\operatorname{cov}(X, Y) + \operatorname{var}Y$

- $\operatorname{var}(aX + bY) = a^2 \operatorname{var}X + 2abc \operatorname{cov}(X, Y) + b^2 \operatorname{var}Y = [a \quad b] \begin{bmatrix} \operatorname{var}X & \operatorname{cov}(X, Y) \\ \operatorname{cov}(Y, X) & \operatorname{var}Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

- $\operatorname{var}(X) = 0 \implies \mathbb{P}(X = \mathbb{E}X) = 1$

证：根据切比雪夫不等式， $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq \frac{1}{n}) \leq n^2 \operatorname{var}(X) = 0$ 对 $\forall n$ 都成立，故 $\mathbb{P}(X = \mathbb{E}X) = 1$ 。证毕。

- $|\rho| \leq 1$ ，且 $\rho = 1$ 当且仅当 $\mathbb{P}(Y = aX + b) = 1$ 。

证：对 $\forall t \in \mathbb{R}$ ，由于 $\operatorname{var}(Y - tX) = t^2 \operatorname{var}X - 2t \operatorname{cov}(X, Y) + \operatorname{var}Y \geq 0$ ，所以：

$$\Delta = 4\operatorname{cov}^2(X, Y) - 4\operatorname{var}X \operatorname{var}Y \leq 0$$

即有： $|\rho| \leq 1$ ，且 $\rho = 1$ 当且仅当存在某个 b 使得 $\operatorname{var}(Y - bX) = 0$ ，于是根据方差的性质有： $\mathbb{P}(Y - bX = \mathbb{E}[Y - bX] = a) = 1$ ，其中 a, b 均为常数，证毕。