概率论笔记

No.

Date

$A-B=A\bar{B}=A-AB=A\cup B-B$

$\forall A,B$; $P(A\bar{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)$

若 $A\subset B$，则 $P(A)\leq P(B)$ 且 $P(B-A)=P(B)-P(A)$

$\forall A,B$; $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$P(ABCD\cdots)=P(A)+P(B)+\cdots-P(AB)$
$-P(AC)-P(BC)-\cdots$
$+\cdots-\cdots+(-1)^{n-1}(\cdots)$

$P(AB)\leq P(B)$, $P(A)\leq P(A\cup B)$

独立的定义 $P(AB)=P(A)P(B)$

ps: $P(A)=0$ 或 1 则 A与B 独立

相互独立 ⇒ 两两独立

相互独立：$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$

两两独立：$P(AB)=P(A)P(B)$ $P(AC)=P(A)P(C)$
$P(BC)=P(B)P(C)$

No.

Date

泊松分布：令$\lambda=np$，$P_n(k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

称 $F(x)=P(X\le x)$ 为 X 的分布函数

$P(x_1<X\le x_2)=F(x_2)-F(x_1)$

$P(x_1<X<x_2)=F(x_2)-F(x_1)-P(X=x_2)$

$\forall\ x_1<x_2,\ F(x_1)\le F(x_2)$

$F(x)$是右连续的，$F(x)=F(x^+)$

分布列的形式：$P(X=x_k)=f(x_k)$ 表格

$F(x)=P(X\le x)=\sum_{x_i\le x}P(X=x_i)$

已知$P(x)$求$F(x)$：注意$F(x)$的右连续性

已知$F(x)$求$P(x)$：$P(X=x_i)=F(x_i)-F(x_i^-)$

对连续型随机变量：$P(X=x_i)=0$

No.

Date

$Y=g(X)$时

①离散：

P			
X			
Y			

$\Rightarrow$

Y		
P		

②连续

i 分布函数求导

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)=P(X\le\varphi(y))=F_X(\varphi(y))$

两边对y求导

ii 公式法 设连续型X有$f_X(x)$，有$y=g(x)$在(a,b)上严格单调可微，反函数为$x=h(y)$

则 $f_Y(y)=\begin{cases} f_X(h(y))\,|h'(y)| & y\in(A,B)\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$A=\min\{g(a),g(b)\}$，$B=\max\{g(a),g(b)\}$

逐段亦成立

称 $F(x,y)$ 为 (X,Y) 的分布函数 或 X 和 Y 的联合分布函数

$P(x_1<X\le x_2,\ y_1<Y\le y_2)=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_2)$

$\forall x,y$，有 $F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=F(-\infty,-\infty)=0$

$F(+\infty,+\infty)=1$，~~F~~

$F(x,+\infty)$，$F(+\infty,y)$ 无法确定

$F(x,y)$ 右连续

边缘分布：$F_X(x)=F(x,+\infty)$，$F_Y(y)=F(+\infty,y)$

联合分布列：$p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j)$

边缘分布列：$p_{i\cdot}$，$p_{\cdot j}$

独立的定义：① $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$

② $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

③ $p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$

联合分布 → 边缘分布

对于 $Z=g(X,Y)$ 若有 $y=h(x,z)$

则 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,h(x,z))\left|\frac{\partial h(x,z)}{\partial z}\right|dx$

PS：可能具有独立性

若无法反解 则 用分布函数求导

$Z=\max\{X_1,\cdots X_n\}$

$X_1,\cdots X_n$ 独立：$F_Z(z)=\cdots$

同分布：$F_Z(z)=F^n(z)$

$Z=\min\{X_1,\cdots,X_n\}$：独立：$F_Z(z)=(1-F_{X_1}(x))\cdots$

同分布：$F_Z(z)=1-[1-F(z)]^2$

切比雪夫不等式: $P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ / $P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$

大数定律:

辛钦: $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu|<\varepsilon\}=1$

$\mu=E(X_k)$

切比雪夫: $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(X_k)|<\varepsilon\}=1$

伯努利: $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\frac{f_A}{n}-p|<\varepsilon\}=1$, 即 $\frac{f_A}{n}\xrightarrow{P}P(A)$

$\Downarrow$ 依概率收敛

f_A 为 A 的频率, 依

~~区分置信区间与置信度~~

方差与协方差:

$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

$=D(X)+D(Y)\pm 2Cov(X,Y)$

$D(X)=0\Longleftrightarrow P\{X=E(X)\}=1$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

$D(X+Y+Z)=D(X)+D(Y)+D(Z)+2Cov(X,Y)+2Cov(X,Z)+2Cov(Y,Z)$ ~~需有至少不相关的~~

$Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$

$Cov(X,C)=0$ $Cov(aX,bY)=abCov(X,Y)$

协方差一般有量纲, $Cov>0$ 称为正相关

$-1\leq\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}\leq 1$, 相关系数(线性)

$|\rho|=1\Longleftrightarrow P\{Y=a+bX\}=1$, $\exists a,b$, b 与 ρ 同号

独立 (无关系) $\underset{\times}{\overset{\checkmark}{\rightleftharpoons}}$ 不相关 (无线性相关关系)

No.

Date . .

相关与独立:

独立 $\Leftrightarrow F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$

或 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

不相关 $\Leftrightarrow \rho_{XY}=0,\ Cov(X,Y)=0$

$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$

$\cancel{E(X,Y)=E(X)=E(Y)}$

$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$

No.

Date . .

由 N 分布来的分布: $X\sim N(0,1)$

① ~~$Y\sim\chi^2(n)$~~ χ^2

$Y=\sum_{i=1}^{n}X_i^2=X_1^2+\cdots X_n^2$ 记为 $Y\sim\chi^2(n)$

$X^2\sim\chi^2(1)$ ~~$Y\sim\chi^2(n)$~~

有 $E(Y)=n,\ D(Y)=2n$

若 $X\sim\chi^2(m),\ Y\sim\chi^2(n)$: 有 $X+Y\sim\chi^2(m+n)$

② t分布. $X\sim N(0,1),\ Y\sim\chi^2(n)$ 则 $T=\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ 记为 $T\sim t(n)$

t_n 的 f 不确定, $\lim\limits_{n\to\infty}f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$

则 $n\to\infty$ 时 $t(n)\overset{近似}{\sim}N(0,1)$

$t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n)$

③ F分布: ~~F~~ $X\sim\chi^2(n_1)$, $Y\sim\chi^2(n_2)$

$F=\frac{X}{n_1}/\frac{Y}{n_2}$, 记为 $F\sim F(n_1,n_2)$

若 $X\sim F(n_1,n_2)$ 则 $\frac{1}{X}\sim F(n_2,n_1)$

$F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=\cancel{\frac{1}{F_\alpha(n_1,n_2)}}\ \frac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$

常见一维分布

符号	分布	$E(X)$	$D(X)$
$X\sim B(n,p)$	$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$	np	$np(1-p)$
$X\sim P(\lambda)$ 无记忆性	$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $\lambda>0$	λ	λ
$X\sim G(p)$	$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
$X\sim U[a,b]$	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in[a,b]\\ 0, & \text{other}\end{cases}$ $F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x<b\\ 1, & b\le x\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$X\sim H(n,N,M)$	$P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$	$\frac{nM}{N}$	
$X\sim E(\lambda)$ 无记忆性	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

对于有放回，$[(n+1)p]\in Z$ 时，P 最 max 在 $k=(n+1)p$ 或 $(n+1)p-1$

$[(n+1)p]\notin Z$ 时，$k=[(n+1)p]$，$[\ ]$ 为 $[x]$

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{2\pi}$

对 $X\sim N(0,1)$，$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

$\varphi(x)=\varphi(-x)$，$\Phi(-x)+\Phi(x)=1$

对于 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$F_X(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

对于 $X\sim N(0,1)$，$E(X^2)=1$，$E(|X|)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$，$D(|X|)=1-\frac{2}{\pi}$

No.
Date

置信度计算：单个正态分布

① σ^2已知，μ未知

由 $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ 知 $P\{-u_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} < u_{\frac{\alpha}{2}}\} = 1-\alpha$

$u_{\frac{\alpha}{2}}$ 为 $N(0,1)$ 上的上 $\frac{\alpha}{2}$ 分位点，$\Phi(u_\alpha) = 1-\alpha$

则置信区间为 $(\bar{X} - u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

② σ^2未知，μ未知，求μ的置信区间

由 $\frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1)$，$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

③ σ^2未知，μ未知，求σ^2的置信区间

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ 知 $P\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\} = 1-\alpha$

得 $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

No.
Date

中心极极

独立同分布：$X_1 \cdots X_n$

$E(X_i) = \mu$，$D(X_i) = \sigma$ 则 $E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = n\mu$

$D(\sum_{i=1}^{n} X_i) = n\sigma^2$，当 $n \to \infty$ 时 $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \sim N(0,1)$