心得 体会 拓广 疑问

1 求下列函数的傅里叶变换.

(1) $f(t)=\begin{cases}E, & 0\leqslant t\leqslant \tau \\ 0, & 其他\end{cases}, E,\tau>0$;

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$
$$=\int_0^{\tau} Ee^{-i\omega t}dt$$
$$=\frac{Ei}{\omega}(e^{-i\omega\tau}-1)。$$

(2) $f(t)=\begin{cases}0, & -\infty<t<-1 \\ -1, & -1\leqslant t<0 \\ 1, & 0\leqslant t<1 \\ 0, & 1\leqslant t<+\infty\end{cases}$.

$$F(\omega)=\int_{-1}^{0}(-1)e^{-i\omega t}dt+\int_0^1 e^{-i\omega t}dt$$
$$=\frac{1}{i\omega}(1-e^{i\omega})-\frac{1}{i\omega}(e^{-i\omega}-1)$$
$$=\frac{2i}{\omega}(\cos\omega-1)。$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

❷ 求下列函数的傅里叶变换,并推证下列积分结果.

(1) $f(t)=e^{-|t|}\cos t$,证明

$$\int_0^{\infty}\frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}\cos\omega t\,d\omega=\frac{\pi}{2}e^{-|t|}\cos t$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|t|}\cos t\,e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|t|}\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}e^{-i\omega t}dt$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{\int_{-\infty}^{0}e^{[1+i(1-\omega)]t}dt+\int_0^{+\infty}e^{[-1+i(1-\omega)]t}dt$$
$$+\int_{-\infty}^{0}e^{[1-i(1+\omega)]t}dt+\int_0^{+\infty}e^{[-1-i(1+\omega)]t}dt$$
$$=\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{1+i(1-\omega)}-\frac{1}{-1+i(1-\omega)}+\frac{1}{1-i(1+\omega)}-\frac{1}{-1-i(1+\omega)}\Big]$$
$$=\frac{1}{1+(1-\omega)^2}+\frac{1}{1+(1+\omega)^2}=\frac{2(\omega^2+2)}{\omega^4+4}.$$
$$\therefore\ f(t)=e^{-|t|}\cos t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2(\omega^2+2)}{\omega^4+4}e^{i\omega t}d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}\cos\omega t\,d\omega$$
$$\int_0^{+\infty}\frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}\cos\omega t\,d\omega=\frac{\pi}{2}e^{-|t|}\cos t.$$

(2) $f(t)=\begin{cases}\sin t, & |t|\leqslant\pi\\ 0, & |t|>\pi\end{cases}$,证明

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega\pi\sin\omega t}{1-\omega^2}d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\sin t, & |t|\leqslant\pi\\ 0, & |t|>\pi\end{cases}$$

$$F(\omega)=\int_{-\pi}^{\pi}\sin t\,e^{-i\omega t}dt=-i\int_{-\pi}^{\pi}\sin t\sin\omega t\,dt$$
$$=-2i\int_0^{\pi}\sin t\sin\omega t\,dt=-2i\frac{\sin\omega\pi}{1-\omega^2}.$$
$$\therefore\ f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(-2i\frac{\sin\omega\pi}{1-\omega^2}\Big)e^{i\omega t}d\omega$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega\pi\sin\omega t}{1-\omega^2}d\omega$$
$$\therefore\ \int_0^{\infty}\frac{\sin\omega\pi\sin\omega t}{1-\omega^2}d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\sin t, & |t|\leqslant\pi;\\ 0, & |t|>\pi.\end{cases}$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

(3) $f(t)=\begin{cases}1-t^2, & |t|\leqslant 1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$，求积分

$$\int_0^{\infty}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$F(\omega)=\int_{-1}^{1}(1-t^2)e^{-i\omega t}dt$$

$$=2\int_0^1(1-t^2)\cos\omega t\,dt$$

$$=2\left(\int_0^1\cos\omega t\,dt-\int_0^1 t^2\cos\omega t\,dt\right)$$

$$=\frac{4(\sin\omega-\omega\cos\omega)}{\omega^3}.$$

$$\therefore\ f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{4(\sin\omega-\omega\cos\omega)}{\omega^3}e^{i\omega t}d\omega$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega-\omega\cos\omega}{\omega^3}\cos\omega t\,d\omega,\quad |t|\leq 1.$$

令 $t=\frac{1}{2}$，有

$$-\frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\omega\cos\omega-\sin\omega}{\omega^3}\cos\frac{\omega}{2}d\omega=f\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}.$$

$$\therefore\ \int_0^{+\infty}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\cos\frac{x}{2}dx=-\frac{3\pi}{16}.$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

❸ 计算下列积分.

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\sin(\omega_0 t)\mathrm{d}t$;

$= \sin(\omega_0 t)\Big|_{t=0} = 0.$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-3)(t^2+1))\mathrm{d}t$;

$= (t^2+1)\Big|_{t=3} = 10.$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt$;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^2} dt = \pi - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2}.$$

注意到，$\mathcal{F}[e^{-|t|}] = \frac{2}{1+\omega^2}$ (P210)，由书 P150，性质 6.5.6，

有 $$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2}{1+\omega^2}\right)^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-|t|}\right)^2 dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = 1.$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

从而 $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

(4) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 t}{t^2} dt$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 t}{t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 t - \frac{1}{4}\sin^2 2t}{t^2} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 du = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt.$$

令 $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & |t| \le 1, \\ 0 & |t| > 1, \end{cases}$ 则 $\mathcal{F}[f(t)] = \frac{\sin\omega}{\omega}$.

$$\therefore \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2 dt = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4} dt = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^2 dt = \pi.$$

从而 $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

4 已知某函数 $f(x)$ 的傅氏变换为 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\frac{\sin\omega}{\omega}$，求该函数 $f(t)$.

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}(\cos\omega t+i\sin\omega t)d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega\sin\omega t}{\omega}d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega\sin\omega t}{\omega}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin(1+t)\omega+\sin(1-t)\omega}{\omega}d\omega$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}, & |t|<1;\\ 0, & |t|>1。\end{cases}$$

上面计算中应用了公式：

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega=\begin{cases}-\frac{\pi}{2}, & t<0;\\ \frac{\pi}{2}, & t>0。\end{cases}$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

❺ 证明：如果 $\mathscr{F}[e^{j\psi(t)}]=F(\omega)$，其中 $\psi(t)$ 为一实函数，则

$$\mathscr{F}[\cos\psi(t)]=\frac{1}{2}[F(\omega)+\overline{F(-\omega)}]$$

$$\mathscr{F}[\sin\psi(t)]=\frac{1}{2j}[F(\omega)-\overline{F(-\omega)}]$$

其中 $\overline{F(-\omega)}$ 为 $F(\omega)$ 的复共轭函数.

$$\mathscr{F}[\cos\psi(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\psi(t)}+e^{-i\psi(t)}}{2}e^{-i\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\psi(t)}e^{-i\omega t}dt+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\psi(t)}e^{-i\omega t}dt\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[F(\omega)+\overline{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\psi(t)}e^{i\omega t}dt}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[F(\omega)+\overline{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\psi(t)}e^{-i(-\omega)t}dt}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[F(\omega)+\overline{F(-\omega)}\right].$$

另一等式同理可证。

心得 体会 拓广 疑问

❻ 求下列函数的傅氏变换.

(1) $f_1(t)=\begin{cases}E, & |t|<2\\ 0, & |t|\geqslant 2\end{cases}, E>0$;

$$F_1(\omega)=\frac{2E\sin 2\omega}{\omega}.$$

(2) $f_2(t)=\begin{cases}-E, & |t|<1\\ 0, & |t|\geqslant 1\end{cases}$;

$$F_2(\omega)=-2E\frac{\sin\omega}{\omega}.$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

(3) $f(t)=3f_1(t)-4f_2(t)$;

$$F(\omega)=3F_1(\omega)-4F_2(\omega)$$
$$=\frac{6E\sin 2\omega+8E\sin\omega}{\omega}.$$

(4) $f(t)=\cos t\cdot\sin t$.

$$F(\omega)=\mathscr{F}\left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]$$
$$=\frac{1}{2}\mathscr{F}[\sin 2t]$$
$$=\frac{i\pi}{2}[\delta(\omega+2)-\delta(\omega-2)].$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

7 求函数 $f(t)=\sin\left(5t+\frac{2}{3}\right)$ 的傅氏变换(注:分别利用线性性质、先坐标放缩再位移、先位移再坐标放缩三种方法求解).

(1) $\mathscr{F}[f(t)] = \mathscr{F}\left[\sin 5t \cos\frac{2}{3} + \cos 5t \sin\frac{2}{3}\right]$

$= \cos\frac{2}{3}\,\mathscr{F}[\sin 5t] + \sin\frac{2}{3}\,\mathscr{F}[\cos 5t]$

$= \cos\frac{2}{3}\left\{\pi i\left[\delta(\omega+5)-\delta(\omega-5)\right]\right\} + \sin\frac{2}{3}\left\{\pi\left[\delta(\omega+5)+\delta(\omega-5)\right]\right\}$.

(2) $\mathscr{F}[f(t)] = \mathscr{F}\left[\sin\left(5t+\frac{2}{3}\right)\right]$

$\xlongequal{\text{缩放}} \frac{1}{5}\mathscr{F}\left[\sin\left(t+\frac{2}{3}\right)\right]\Big|_{\omega=\frac{\omega}{5}}$

$\xlongequal{\text{位移}} \frac{1}{5}\left\{e^{i\frac{2}{3}\omega}\,\pi i\left[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)\right]\right\}\Big|_{\omega=\frac{\omega}{5}}$

$= \frac{1}{5}\,e^{i\frac{2}{15}\omega}\,\pi i\left[\delta\left(\frac{\omega}{5}+1\right)-\delta\left(\frac{\omega}{5}-1\right)\right]$

$\xlongequal{\text{书性质6.3.2}} e^{i\frac{2}{15}\omega}\,\pi i\left[\delta(\omega+5)-\delta(\omega-5)\right]$

$\xlongequal{\text{性质6.3.4}} \pi i\left[e^{-i\frac{2}{3}}\delta(\omega+5)-e^{i\frac{2}{3}}\delta(\omega-5)\right]$

$= \cos\frac{2}{3}\left\{\pi i\left[\delta(\omega+5)-\delta(\omega-5)\right]\right\} + \sin\frac{2}{3}\left\{\pi\left[\delta(\omega+5)+\delta(\omega-5)\right]\right\}$.

(3) $\mathscr{F}[f(t)] = \mathscr{F}\left[\sin\left(5t+\frac{2}{3}\right)\right]$

$= \mathscr{F}\left[\sin 5\left(t+\frac{2}{15}\right)\right]$

$= e^{i\frac{2}{15}\omega}\,\mathscr{F}[\sin 5t]$

$= e^{i\frac{2}{15}\omega}\cdot\pi i\left[\delta(\omega+5)-\delta(\omega-5)\right]$

$= \cos\frac{2}{3}\left\{\pi i\left[\delta(\omega+5)-\delta(\omega-5)\right]\right\} + \sin\frac{2}{3}\left\{\pi\left[\delta(\omega+5)+\delta(\omega-5)\right]\right\}$.

心得 体会 拓广 疑问

8 已知 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$，证明（翻转性质）

$$F(-\omega)=\mathscr{F}[f(-t)]$$

$$\mathscr{F}[f(-t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$\overset{u=-t}{=\!=} \int_{\infty}^{-\infty} f(u)\, e^{-i\omega(-u)}\,(-du)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-i(-\omega)u}\, du$$

$$= F(-\omega).$$

年 月 日