心得 体会 拓广 疑问

1 求下列函数的拉氏变换.

(1) $f(t)=\sin\frac{t}{3}$;

$$F(s)=L[\sin\tfrac{t}{3}]=\frac{\frac{1}{3}}{s^2+\frac{1}{3^2}}=\frac{3}{1+9s^2},\quad Re(s)>0.$$

(2) $f(t)=e^{-2t}$;

$$F(s)=\frac{1}{s+2},\qquad Re(s)>-2.$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

(3) $f(t)=t^2$;

令 $L[f(t)]=t^2$，则 $f'(t)=2t$。由微分性质，有

$$L[f'(t)] = sF(s)-f(0) = sF(s).$$

又 $L[f'(t)] = L[2t] = 2L[t] = \frac{2}{s^2}$.

$\therefore \quad F(s) = \frac{2}{s^3}$.

(4) $f(t)=\cos^2 t$.

$$F(s) = L[\cos^2 t]$$
$$= \frac{1}{2}\{L[1]+L[\cos 2t]\}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+4}\right).$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

❷ 求下列函数的拉氏变换.

(1) $f(t)=\begin{cases}3, & 0\leqslant t<2\\ -1, & 2\leqslant t<4;\\ 0, & t\geqslant 4\end{cases}$

$$F(s)=\frac{1}{s}\left(3-4e^{-2s}+e^{-4s}\right).$$

(2) $f(t)=\begin{cases}t+1, & 0\leqslant t<3\\ 0, & t\geqslant 3\end{cases}$;

$$F(s)=\frac{1}{s^2}\left[1+s-(1+4s)e^{-3s}\right].$$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

(3) $f(t)=\delta(t)\cos t-u(t)\sin t$.

$$F(s)=L\left[\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\delta(t)\right]-L[\sin t]$$
$$=\frac{1}{2}L[e^{it}\delta(t)]+\frac{1}{2}[e^{-it}\delta(t)]-\frac{1}{s^2+1}$$
$$=1-\frac{1}{s^2+1}.$$

3 设 $f(t)$ 是以 2π 为周期的函数，且在一个周期内的表达式为

$$f(t)=\begin{cases}\sin t, & 0<t\leqslant\pi\\ 0, & \pi<t\leqslant 2\pi\end{cases}$$

求 $\mathscr{L}[f(t)]$.

$$F(s)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt$$
$$=\int_0^{2\pi}f(t)e^{-st}dt+\int_{2\pi}^{4\pi}f(t)e^{-st}dt+\int_{4\pi}^{6\pi}f(t)e^{-st}dt+\cdots$$
$$=\int_0^{2\pi}f(t)e^{-st}dt+e^{-2\pi s}\int_0^{2\pi}f(t)e^{-st}dt+e^{-4\pi s}\int_0^{2\pi}f(t)e^{-st}dt+\cdots$$
$$=(1+e^{-2\pi s}+e^{-4\pi s}+e^{-6\pi s}+e^{-8\pi s}+\cdots)\int_0^{2\pi}f(t)e^{-st}dt$$
$$=[1+e^{-2\pi s}+(e^{-2\pi s})^2+(e^{-2\pi s})^3+\cdots]\int_0^{2\pi}f(t)e^{-st}dt$$
$$=\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{\pi}\sin t\, e^{-st}dt$$
$$=\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\cdot\frac{1+e^{-s\pi}}{1+s^2}$$
$$=\frac{1}{(1-e^{-s\pi})(1+s^2)}.$$

心得 体会 拓广 疑问

4 求下列函数的拉氏变换式.

(1) $f(t)=3t^4-2t^{3/2}+6$；

$$F(s) \xlongequal{P166} 3\frac{\Gamma(5)}{s^5}-2\frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{s^{\frac{5}{2}}}+\frac{6}{s}.$$

(2) $f(t)=1-te^t$；

$$F(s)=L[1]-L[e^t t]$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{1}{(s-1)^2}.$$ （利用位移性质）

(3) $f(t)=\frac{t}{2a}\sin at, a>0$；

$$F(s)=\frac{1}{2a}L[\sin at\cdot t]$$

$$=\frac{1}{2a}L\left[\frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i}\cdot t\right]$$

$$=\frac{1}{4ai}\left\{L[e^{iat}\cdot t]-L[e^{-iat}\cdot t]\right\}$$

$$=\frac{1}{4ai}\left[\frac{1}{(s-ia)^2}-\frac{1}{(s+ia)^2}\right]$$

$$=\frac{s}{(s^2+a^2)^2}.$$

心得 体会 拓广 疑问

(4) $f(t)=\dfrac{\sin at}{t}, a>0$;

$F(s) = L[\frac{\sin at}{t}]$

$\underline{\underline{P173\ (7.29)}}\ \int_s^{\infty} L[\sin at]ds$

$= \int_s^{\infty} \frac{a}{s^2+a^2} ds$

$= \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{s}{a}$.

(5) $f(t)=e^{-3t}\cos 4t$.

$F(s) = L[e^{-3t}\cos 4t]$

$= \frac{s+3}{(s+3)^2+4^2}$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

(3) $t\int_0^t e^{-at}\sin bt\,dt, a, b \in \mathbf{R}$.

8 求 $f_1(t)=\sin\left(t-\frac{2}{3}\right)$ 与 $f_2(t)=u\left(t-\frac{2}{3}\right)\sin\left(t-\frac{2}{3}\right)$ 的拉氏变换. 对比两者的结果,你可以得到什么启示?

$$F_1(s) = L\left[\sin\left(t-\tfrac{2}{3}\right)\right]$$
$$= \cos\tfrac{2}{3}\, L[\sin t] - \sin\tfrac{2}{3}\, L[\cos t]$$
$$= \cos\tfrac{2}{3}\,\frac{1}{s^2+1} - \sin\tfrac{2}{3}\,\frac{s}{s^2+1}.$$

$$F_2(s) = L\left[u\left(t-\tfrac{2}{3}\right)\sin\left(t-\tfrac{2}{3}\right)\right]$$
$$= \int_0^{+\infty} u\left(t-\tfrac{2}{3}\right)\sin\left(t-\tfrac{2}{3}\right)e^{-st}\,dt$$
$$= \int_{\frac{2}{3}}^{\infty} u\left(t-\tfrac{2}{3}\right)\sin\left(t-\tfrac{2}{3}\right)e^{-st}\,dt$$
$$\underline{\underline{x=t-\tfrac{2}{3}}} \int_0^{\infty} u(x)\sin x\, e^{-s(x+\frac{2}{3})}\,dx$$
$$= e^{-\frac{2}{3}s}\int_0^{\infty} u(t)\sin t\, e^{-st}\,dt$$
$$= e^{-\frac{2}{3}s}\, L[\sin t]$$
$$= e^{-\frac{2}{3}s}\,\frac{1}{s^2+1}.$$

对比两者结果,我们可以看到单位阶跃函数的作用。$f_1(t)$是将 $\sin t$ 的图像做了位移,但信号响应还是0时刻。$f_2(t)$是将 $\sin t$ 的图像做了位移,同时信号响应时刻延迟到$\frac{2}{3}$。

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

10 求下列函数拉氏逆变换.

(1) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+4}$;　　(2) $F(s)=\dfrac{1}{(s+1)^4}$;

(1) $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+4}\right]=\dfrac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2}{s^2+4}\right]=\dfrac{1}{2}\sin 2t$

(2) $F(s)=\text{Res}\left[\dfrac{1}{(s+1)^4}e^{st},-1\right]$

$=\dfrac{1}{3!}\lim\limits_{s\to-1}\left(e^{st}\right)'''$

$=\dfrac{1}{6}t^3e^{-t}$

(3) $F(s)=\dfrac{s+3}{(s+1)(s-3)}$;　　(4) $F(s)=\dfrac{2s+5}{s^2+4s+13}$;

(3) $f(t)=\text{Res}\left[\dfrac{(s+3)e^{st}}{(s+1)(s-3)},-1\right]+\text{Res}\left[\dfrac{(s+3)e^{st}}{(s+1)(s-3)},3\right]$

$=-\dfrac{1}{2}e^{-t}+\dfrac{3}{2}e^{3t}$.

(4) $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2s+5}{s^2+4s+13}\right]$

$=\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2(s+2)}{(s+2)^2+3^2}+\dfrac{1}{(s+2)^2+3^2}\right]$

$=2e^{-2t}\cos 3t+\dfrac{1}{3}e^{-2t}\sin 3t$.

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

13 试求下列函数的拉氏逆变换.

(1) $F(s)=\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$;

$$f(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)^2}\right]$$

$$= \mathrm{Res}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)^2}e^{st}, ai\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)^2}e^{st}, -ai\right]$$

$$= \lim_{s\to ai}\left(\frac{e^{st}}{(s+ai)^2}\right)' + \lim_{s\to -ai}\left(\frac{e^{st}}{(s-ai)^2}\right)'$$

$$= \lim_{s\to ai}\frac{te^{st}(s+ai)-e^{st}\cdot 2}{(s+ai)^3} + \lim_{s\to -ai}\frac{te^{st}(s-ai)-e^{st}\cdot 2}{(s-ai)^3}$$

$$= \frac{1}{2a^3}(\sin at - at\cos at)$$

(2) $F(s)=\frac{(s+1)e^{-\pi s}}{s^2+s+1}$.

$$L^{-1}\left[\frac{s+1}{s^2+s+1}\right] = L^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right]$$

$$= \mathrm{Res}\left[\frac{s+1}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\cdot e^{st}, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$$

$$+ \mathrm{Res}\left[\frac{s+1}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}e^{st}, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{3}i}+\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{t}{2}}\cdot e^{\frac{\sqrt{3}}{2}ti} + \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}i}+\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{t}{2}}\cdot e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}ti}$$

$$= e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$\therefore f(t) = L^{-1}\left[\frac{(s+1)e^{-\pi s}}{s^2+s+1}\right]$$

$$\xlongequal{\text{延迟性质}} e^{-\frac{t-\pi}{2}}\left[\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi)\right].$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

14 求下列函数的拉氏逆变换.

(1) $F(s)=\dfrac{1}{(s+4)^2}$;

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{(s+4)^2}\right]$$
$$=\mathrm{Res}\left[\frac{e^{st}}{(s+4)^2},-4\right]$$
$$=te^{-4t}.$$

(2) $F(s)=\dfrac{1}{s^4+5s^2+4}$;

$$F(s)=\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+4}\right]$$

$$\therefore\ f(t)=\frac{1}{3}L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]-\frac{1}{3}L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left[\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t\right].$$

(3) $F(s)=\dfrac{2s+1}{s(s+1)(s+2)}$;

$$f(t)=\mathrm{Res}[F(s)e^{st},0]+\mathrm{Res}[F(s)e^{st},-1]$$
$$+\mathrm{Res}[F(s)e^{st},-2]$$
$$=\frac{1}{2}+e^{-t}-\frac{3}{2}e^{-2t}$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

16 试求下列微分方程或微分方程组初值问题的解.

(1) $x''+4x'+3x=e^{-t}$, $x(0)=x'(0)=1$;

令 $L[x(t)]=X(s)$, 则

$$[s^2X(s)-s-1]+4[sX(s)-1]+3X(s)=\frac{1}{s+1}$$

$$(s^2+4s+3)X(s)=\frac{1}{s+1}+s+1+4$$

$$\therefore X(s)=\frac{1}{(s+1)^2(x+3)}+\frac{1}{x+3}+\frac{4}{(s+1)(s+3)}$$

$$\therefore x(t)=\frac{1}{4}(2t-1)e^{-t}+\frac{1}{4}e^{-3t}+e^{-3t}+2e^{-t}-2e^{-3t}=\frac{1}{4}(2t+7)e^{-t}-\frac{3}{4}e^{-3t}$$

(2) $x''-x'=4\sin t+5\cos 2t$, $x(0)=-1$, $x'(0)=-2$;

令 $L[x(t)]=X(s)$, 则

$$s^2X(s)+s+2-sX(s)-1=\frac{4}{s^2+1}+\frac{5s}{s^2+4}$$

$$\therefore X(s)=-\frac{s+1}{s(s-1)}+\frac{4}{s(s-1)(s^2+1)}+\frac{5}{(s-1)(s^2+4)}$$

$$\therefore x(t)=1-2e^{t}-4+2e^{t}+(1+i)e^{it}+(1-i)e^{-it}+e^{t}-\frac{1}{4}(2-i)e^{2it}-\frac{1}{4}(2+i)e^{-2it}$$

$$=-3+2\cos t-2\sin t-\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t.$$

(3) $\begin{cases}x'+x-y=e^t\\3x+y'-2y=2e^t\end{cases}$, $x(0)=y(0)=1$;

令 $L[x(t)]=X(s)$, $L[y(t)]=Y(s)$, 则

$$\begin{cases}sX(s)-1+X(s)-Y(s)=\dfrac{1}{s-1};\\[2mm]3X(s)+sY(s)-1-2Y(s)=\dfrac{2}{s-1}.\end{cases}$$

$$\therefore X(s)=\frac{1}{s-1},\quad Y(s)=\frac{1}{s-1}.$$

$$\therefore x(t)=e^{t},\quad y(t)=e^{t}.$$

年 月 日