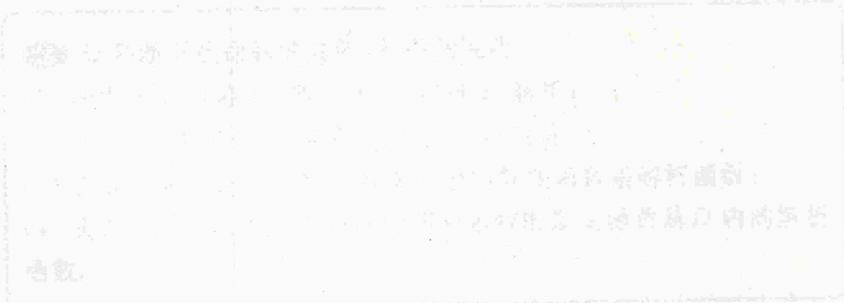


复变函数与积分变换同步训练

习

题

二



班级：_____

学号：_____

姓名：_____

心得 体会 拓广 疑问

1 下列函数在何处可导? 何处解析?

$$(1) f(z) = x^2 - iy;$$

$$(2) f(z) = xy^2 + ix^2 y;$$

复变函数与积分变换同步训练

$$(3) f(z) = \frac{x+y}{x^2+y^2} + i \frac{x-y}{x^2+y^2};$$

$$(4) f(z) = \operatorname{Im} z.$$

心得 体会 拓广 疑问

2 试证下列函数在 z 平面上处处不解析.

$$(1) f(z) = x + y; \quad (2) f(z) = \operatorname{Re} z; \quad (3) f(z) = \frac{1}{|z|}.$$

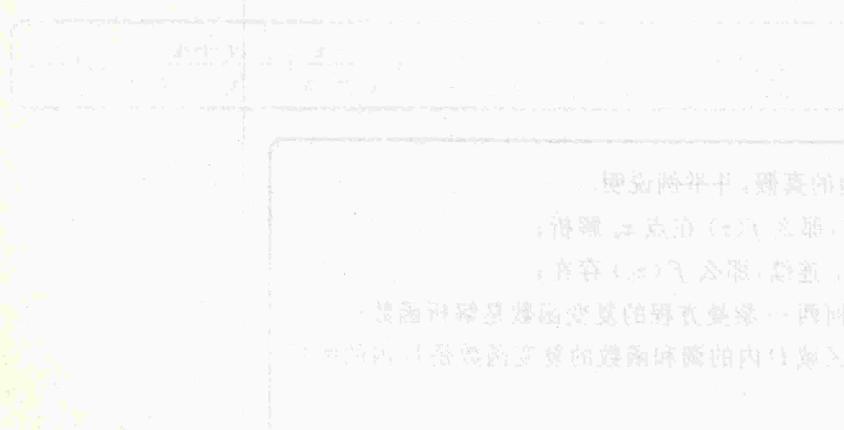
3 试判断下述命题的真假,并举例说明.

- (1) 如果 $f'(z_0)$ 存在,那么 $f(z)$ 在点 z_0 解析;
- (2) 如果 $f(z)$ 在点 z_0 连续,那么 $f'(z_0)$ 存在;
- (3) 实部与虚部满足柯西-黎曼方程的复变函数是解析函数;
- (4) 实部与虚部均为区域 D 内的调和函数的复变函数是 D 内的解析函数.

心得 体会 拓广 疑问

④ 证明: 如果函数 $f(z) = u + iv$ 在区域 D 内解析, 并满足下列条件之一, 那么 $f(z)$ 是常数.

- (1) $f(z)$ 恒取实值;
- (2) $\overline{f(z)}$ 在 D 内解析;
- (3) $|f(z)|$ 在 D 内是一个常数;
- (4) $\arg f(z)$ 在 D 内是一个常数.



或

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

5 验证下列函数是调和函数，并求出以 $z=x+iy$ 为自变量的解析
函数 $w=f(z)=u+iv$.

$$(1) v = \arctan \frac{y}{x}, x > 0;$$

$$(2) u = e^x (y \cos y + x \sin y) + x + y, f(0) = i;$$

心得 体会 拓广 疑问

$$(3) u = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2);$$

$$(4) v = \frac{y}{x^2 + y^2}, f(2) = 0.$$

心得 体会 拓广 疑问

6 如果 $f(z) = u + iv$ 是一解析函数, 试证:

- (1) $\overline{f(z)}$ 也是解析函数;
- (2) $-u$ 是 v 的共轭调和函数.

7 如果 $f(z) = u + iv$ 是 z 的解析函数, 证明:

$$(1) \left(\frac{\partial}{\partial x} |f(z)| \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} |f(z)| \right)^2 = |f'(z)|^2;$$

$$(2) \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = |f'(z)|^2.$$

心得 体会 拓广 疑问

⑧ 将下列函数值写成 $x + iy$ 的形式.

(1) $e^{1+\pi i} + \cos i;$

(2) $\operatorname{ch} \frac{\pi}{4}i;$

(3) $\cos(i \ln 5).$

心得 体会 拓广 疑问

9. 求 $\ln(-i)$, $\ln(-3+4i)$ 和它们的主值.

10. 求 $e^{1-i\frac{\pi}{2}}$, $\exp[(1+i\pi)/4]$, 3^i 和 $(1+i)^i$ 的值.

心得 体会 拓广 疑问

- 11 由 $z = \sin w$ 及 $z = \cos w$ 所定义的函数 w 分别称为 z 的反正弦函数及反余弦函数, 求出它们的解析表达式.