复变函数与积分变换同步训练

习 题 二

班级：________________

学号：________________

姓名：________________

心得 体会 拓广 疑问

1 下列函数在何处可导？何处解析？

(1) $f(z)=x^2-\mathrm{i}y$；

(2) $f(z)=xy^2+\mathrm{i}x^2y$；

(3) $f(z)=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$；

(4) $f(z)=\mathrm{Im}\,z$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

2 试证下列函数在 z 平面上处处不解析.

(1) $f(z)=x+y$；　(2) $f(z)=\mathrm{Re}\,z$；　(3) $f(z)=\dfrac{1}{|z|}$.

3 试判断下述命题的真假,并举例说明.

(1) 如果 $f'(z_0)$ 存在,那么 $f(z)$ 在点 z_0 解析；

(2) 如果 $f(z)$ 在点 z_0 连续,那么 $f'(z_0)$ 存在；

(3) 实部与虚部满足柯西－黎曼方程的复变函数是解析函数；

(4) 实部与虚部均为区域 D 内的调和函数的复变函数是 D 内的解析函数.

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

4 证明：如果函数 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，并满足下列条件之一，那么 $f(z)$ 是常数.

(1) $f(z)$ 恒取实值；

(2) $\overline{f(z)}$ 在 D 内解析；

(3) $|f(z)|$ 在 D 内是一个常数；

(4) $\arg f(z)$ 在 D 内是一个常数.

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

5 验证下列函数是调和函数，并求出以 $z=x+\mathrm{i}y$ 为自变量的解析函数 $w=f(z)=u+\mathrm{i}v$.

(1) $v=\arctan\dfrac{y}{x}, x>0$;

(2) $u=\mathrm{e}^{x}(y\cos y+x\sin y)+x+y, f(0)=\mathrm{i}$;

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

(3) $u=(x-y)(x^2+4xy+y^2)$;

(4) $v=\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $f(2)=0$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

6 如果 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是一解析函数,试证:

(1) $\mathrm{i}\,\overline{f(z)}$ 也是解析函数;

(2) $-u$ 是 v 的共轭调和函数.

7 如果 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是 z 的解析函数,证明:

(1) $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}|f(z)|\right)^2+\left(\dfrac{\partial}{\partial y}|f(z)|\right)^2=|f'(z)|^2$;

(2) $\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=|f'(z)|^2$.

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

8 将下列函数值写成 $x+\mathrm{i}y$ 的形式.

(1) $\mathrm{e}^{1+\pi\mathrm{i}}+\cos\mathrm{i}$;

(2) $\operatorname{ch}\frac{\pi}{4}\mathrm{i}$;

(3) $\cos(\mathrm{i}\ln 5)$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

9 求 $\ln(-i)$，$\ln(-3+4i)$ 和它们的主值.

10 求 $e^{1-i\frac{\pi}{2}}$，$\exp[(1+i\pi)/4]$，3^i 和 $(1+i)^i$ 的值.

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

11 由 $z=\sin w$ 及 $z=\cos w$ 所定义的函数 w 分别称为 z 的反正弦函数及反余弦函数，求出它们的解析表达式.