

# 复变函数与积分变换同步训练

习

题

三

班级: \_\_\_\_\_

学号: \_\_\_\_\_

姓名: \_\_\_\_\_

心得 体会 拓广 疑问

① 沿下列路径计算积分  $\int_0^{3+i} z^2 dz$ .

- (1) 自原点到  $3+i$  的直线段;
- (2) 自原点沿实轴至 3, 再由 3 垂直向上至  $3+i$ ;
- (3) 自原点沿虚轴至  $i$ , 再由  $i$  水平向右至  $3+i$ .

② 分别沿  $y=x$  与  $y=x^2$  算出积分  $\int_0^{1+i} (x^2 + iy) dz$  的值.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

3 计算积分  $\oint_C |z| \bar{z} dz$ , 其中  $C$  是一条闭曲线, 由直线段:  $-1 \leq x \leq 1, y=0$  与上半单位圆周组成, 取逆时针方向.

4 利用在单位圆上  $\bar{z} = 1/z$  的性质及柯西积分公式说明  $\oint_C \bar{z} dz = 2\pi i$ , 其中  $C$  表示单位圆周  $|z|=1$ , 取逆时针方向.

心得 体会 拓广 疑问

**5** 计算积分  $\int_C \frac{\bar{z}}{|z|} dz$  的值, 其中  $C$  为逆时针方向圆周.

(1)  $|z|=2$ ;

(2)  $|z|=4$ .

**6** 直接得出下列积分的结果, 并说明理由.

(1)  $\oint_{|z|=1} \frac{3z+5}{z^2+2z+4} dz$ ;

心得 体会 拓广 疑问

$$(2) \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{\cos z} dz;$$

$$(3) \oint_{|z|=2} e^z (z^2 + 1) dz;$$

$$(4) \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{(z^2 - 1)(z^3 - 1)}.$$

心得 体会 拓广 疑问

7 沿指定闭曲线的正向计算下列各积分.

$$(1) \oint_C \frac{e^z}{z-2} dz, C: |z-2|=1;$$

$$(2) \oint_C \frac{\sin z}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2} dz, C: |z|=2;$$

$$(3) \oint_C \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}, C: |z| = \frac{3}{2};$$

心得 体会 拓广 疑问

$$(4) \oint_C \frac{3z^2 + 7z + 1}{(z+1)^3} dz, C: |z+i|=1;$$

$$(5) \oint_C \frac{e^z}{(z-a)^3} dz, \text{其中 } a \text{ 为 } |a| \neq 1 \text{ 的任何复数, } C: |z|=1;$$

$$(6) \oint_C \frac{3z+2}{z^4-1} dz, C: |z-(1+i)|=\sqrt{2}.$$

心得 体会 拓广 疑问

⑧ 设  $C$  为不经过  $a$  与  $-a$  的正向简单闭曲线,  $a$  为不等于零的任何复数, 试根据  $a$  与  $-a$  同  $C$  的各种不同位置, 计算积分  $\oint_C \frac{z}{z^2 - a^2} dz$ .

⑨ 设  $f(z)$  与  $g(z)$  在域  $D$  内处处解析,  $C$  为  $D$  内一条正向的简单光滑闭曲线, 它的内部含于  $D$ . 如果  $f(z) = g(z)$  在  $C$  上所有点都成立, 试证在  $C$  的内部所有点处  $f(z) = g(z)$  也成立.



心得 体会 拓广 疑问

**10** 设  $f(z)$  在单连域  $D$  内解析, 且不为零,  $C$  为  $D$  内任何一条简单光滑闭曲线, 问积分  $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$  是否为零? 为什么?

**11** 设函数  $f(z)$  在  $0 < |z| < 1$  内解析, 且沿任何圆周  $C: |z|=r, 0 < r < 1$  的积分为零, 那么  $f(z)$  是否必须在  $z=0$  处解析? 肯定请给出证明, 否定请举出反例.