

复变函数与积分变换同步训练

习

题

四

班级: _____

学号: _____

姓名: _____

心得 体会 拓广 疑问

① 证明: 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ 在其收敛圆内一致收敛.

② 下列结论是否正确? 为什么?

- (1) 每一个幂级数在它收敛圆内与收敛圆上收敛;
- (2) 每一个幂级数收敛于一个解析函数;
- (3) 每一个在点 z_0 连续的函数一定可以在点 z_0 的某一邻域内展开成泰勒级数.

心得 体会 拓广 疑问

3 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n$ 能否在 $z=0$ 收敛而在 $z=3$ 发散?

4 我们知道, 函数 $\frac{1}{1+x^2}$ 当 x 为任何实数时, 都有确定的值, 而且是可导的, 但它的泰勒展开式: $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 \cdots$ 却只当 $|x| < 1$ 时成立. 通过研究函数 $\frac{1}{1+z^2}$ 试说明其原因.

心得 体会 拓广 疑问

5 求下列函数在指定点 z_0 处的泰勒展开式, 并指出它们的收敛半径.

(1) $\frac{1}{z^2}, z_0 = -1;$

(2) $\frac{1}{4-3z}, z_0 = 1+i.$

心得 体会 拓广 疑问

6 把下列各函数在指定的圆环域内展开成罗伦级数.

(1) $\frac{1}{(z^2 + 1)(z - 2)}, 1 < |z| < 2;$

(2) $\frac{1}{z(1-z)^2}, 0 < |z| < 1, 0 < |z-1| < 1;$

心得 体会 拓广 疑问

$$(3) \frac{1}{(z-1)(z-2)}, 0 < |z-1| < 1, 1 < |z-2| < +\infty;$$

$$(4) \sin \frac{1}{1-z}, 0 < |z-1| < +\infty.$$

心得 体会 拓广 疑问

7 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径 $R > 0$, 其和函数为 $f(z)$, 证明:

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}, n = 0, 1, 2, \dots, \text{其中 } 0 < r < R, M(r) = \max_{0 \leq \theta < 2\pi} |f(re^{i\theta})|.$$

心得 体会 拓广 疑问

8 设 $f(z) = \frac{z-a}{z+a}$, $a \neq 0$, 求 $\oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$, 其中 C 为任一条包含原点且落在圆周 $|z| = |a|$ 内的简单光滑闭曲线.

心得 体会 拓广 疑问

9 试求下列函数在给定圆环域内的罗伦展开式.

(1) $\frac{1}{z(i-z)}, 0 < |z-i| < 1;$

(2) $\frac{1}{z(z+2)^3}, 0 < |z+2| < 2.$

10 设函数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $|z| < 1$ 内解析, 且 $\operatorname{Re}[f(z)] > 0$,
试证: $|a_n| \leq 2\operatorname{Re} a_0, n = 1, 2, \dots$.

心得 体会 拓广 疑问