复变函数与积分变换同步训练

习 题 五

班级：________________

学号：________________

姓名：________________

心得 体会 拓广 疑问

1 问下列各函数有哪些孤立奇点？各属于哪一类型？如果是极点，指出它的阶.

(1) $\dfrac{1}{z^3(z^2+1)^2}$；　　(2) $\dfrac{e^z \sin z}{z^2}$；

(3) $\dfrac{1}{z^3-z^2-z+1}$；　　(4) $\dfrac{z}{(1+z^2)(1+e^z)}$；

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

(5) $\frac{1}{z^2}+\sin\frac{1}{z}$; (6) $\sin\frac{1}{1-z}$;

(7) $\frac{z^{2n}}{1+z^n}$; (8) $\frac{\ln(z+1)}{z}$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

❷ 函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)^3}$ 在 $z=2$ 处有一个三阶极点；这个函数又有如下的罗伦展开式

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)^3}=\cdots+\frac{1}{(z-2)^6}-\frac{1}{(z-2)^5}+\frac{1}{(z-2)^4},$$

$$|z-2|>1$$

所以“$z=2$ 又是 $f(z)$ 的一个本性奇点”；又因为上式不含有 $(z-2)^{-1}$ 项，因此 $\text{Res}[f(z),2]=0$. 这些结论是否正确？

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

3 求下列各函数 $f(z)$ 在孤立奇点(不考虑无穷远点)的留数.

(1) $f(z)=\dfrac{1}{z^3-z^5}$;

(2) $f(z)=\dfrac{z^2}{(1+z^2)^2}$;

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

(3) $f(z)=\dfrac{z^{2n}}{1+z^n}, n=1,2,\cdots$;

(4) $f(z)=\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$;

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

(5) $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$;

(6) $f(z)=\tan z$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

4 利用留数定理计算下列各积分.

(1) $\oint_C \frac{z\,\mathrm{d}z}{(z-1)(z-2)^2}$，$C$：$|z-2|=\frac{1}{2}$；

(2) $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{1+z^4}$，$C$：$x^2+y^2=2x$；

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

(3)$\oint_C \frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z, C: |z|=\frac{3}{2}$;

(4)$\oint_C \frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}\mathrm{d}z, C: |z|=4$;

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

(5)$\oint_C \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}dz$,C：$|z|=2$；

(6)$\oint_C \frac{1-\cos z}{z^m}dz$,C：$|z|=\frac{3}{2}$，$m$ 为整数.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

❺ 试求下列各积分的值.

(1) $\int_{0}^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{\alpha+\cos\theta}, \alpha > 1$;

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$;

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

(3) $\int_0^{\infty} \frac{x\sin ux}{a^2+x^2}\mathrm{d}x, u>0, a>0$;

(4) $\int_0^{\infty} \frac{\sin 2x}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

❻ 计算下列各积分.

(1)$\oint_C \tan(\pi z)\mathrm{d}z$,$C$:$|z|=n, n=1,2,3,\cdots$;

(2)$\oint_C \dfrac{z^{2n}}{1+z^n}\mathrm{d}z$,$C$:$|z|=r>1$,$n$ 为自然数.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

7 若函数 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 上及所围成的有界区域内除去点 z_0 外处处解析，且 z_0 是 $f(z)$ 的 n 阶极点，记 $g(z)=(z-z_0)^n f(z)$，证明

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=\frac{2\pi\mathrm{i}}{(n-1)!}g^{(n-1)}(z_0)$$

年 月 日