习题一

1. 求下列复数的实部，虚部，共轭复数，模与辐角

(1) $\dfrac{1}{3+2\mathrm{i}}$； (2) $\dfrac{1}{\mathrm{i}}-\dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$； (3) $\dfrac{(3+4\mathrm{i})(2-5\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}$； (4) $\mathrm{i}^8-4\mathrm{i}^{21}+\mathrm{i}$。

解：(1) $\dfrac{1}{3+2\mathrm{i}}=\dfrac{3}{13}-\dfrac{2}{13}\mathrm{i}$。

$$\therefore\ \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{3+2\mathrm{i}}\right\}=\frac{3}{13},\quad \mathrm{Im}\left\{\frac{1}{3+2\mathrm{i}}\right\}=-\frac{2}{13},\quad \overline{\left(\frac{1}{3+2\mathrm{i}}\right)}=\frac{3}{13}+\frac{2}{13}\mathrm{i}\text{。}$$

$$\left|\frac{1}{3+2\mathrm{i}}\right|=\left|\frac{3-2\mathrm{i}}{13}\right|=\sqrt{\left(\frac{3}{13}\right)^2+\left(-\frac{2}{13}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{13}\text{。}$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{1}{3+2\mathrm{i}}\right)=\mathrm{Arg}\left(\frac{3-2\mathrm{i}}{13}\right)=-\arctan\frac{2}{3}+2k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots\text{。}$$

(2) $\dfrac{1}{\mathrm{i}}-\dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=-\mathrm{i}-\dfrac{1}{2}(-3+3\mathrm{i})=\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}\mathrm{i}$。

$$\therefore\ \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\mathrm{i}}-\frac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right\}=\frac{3}{2},\quad \mathrm{Im}\left\{\frac{1}{\mathrm{i}}-\frac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right\}=-\frac{5}{2},\quad \overline{\left(\frac{1}{\mathrm{i}}-\frac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)}=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\mathrm{i}\text{。}$$

$$\left|\frac{1}{\mathrm{i}}-\frac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right|=\left|\frac{3}{2}-\frac{5}{2}\mathrm{i}\right|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{34}}{2}\text{。}$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{1}{\mathrm{i}}-\frac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)=\mathrm{Arg}\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{2}\mathrm{i}\right)=-\arctan\frac{5}{3}+2k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots\text{。}$$

(3) $\dfrac{(3+4\mathrm{i})(2-5\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}=-\dfrac{7}{2}-13\mathrm{i}$。

$$\therefore\ \mathrm{Re}\left\{\frac{(3+4\mathrm{i})(2-5\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}\right\}=-\frac{7}{2},\quad \mathrm{Im}\left\{\frac{(3+4\mathrm{i})(2-5\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}\right\}=-13,$$

$$\overline{\left(\frac{(3+4\mathrm{i})(2-5\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}\right)}=-\frac{7}{2}+13\mathrm{i}\text{。}$$

$$\left|\frac{(3+4\mathrm{i})(2-5\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}\right|=\frac{5\sqrt{29}}{2}\text{。}$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{(3+4\mathrm{i})(2-5\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}\right)=\operatorname{Arg}\left(-\frac{7}{2}-13\mathrm{i}\right)=\arctan\frac{26}{7}-\pi+2k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots。$$

(4) $\mathrm{i}^8-4\mathrm{i}^{21}+\mathrm{i}=\left(\mathrm{i}^2\right)^4-4\left(\mathrm{i}^2\right)^{10}\mathrm{i}+\mathrm{i}=1-3\mathrm{i}$。

$\therefore\ \operatorname{Re}\left\{\mathrm{i}^8-4\mathrm{i}^{21}+\mathrm{i}\right\}=1,\ \operatorname{Im}\left\{\mathrm{i}^8-4\mathrm{i}^{21}+\mathrm{i}\right\}=-3,\ \overline{\left(\mathrm{i}^8-4\mathrm{i}^{21}+\mathrm{i}\right)}=1+3\mathrm{i}$。

$\left|\mathrm{i}^8-4\mathrm{i}^{21}+\mathrm{i}\right|=|1-3\mathrm{i}|=\sqrt{(1)^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$。

$\operatorname{Arg}\left(\mathrm{i}^8-4\mathrm{i}^{21}+\mathrm{i}\right)=\operatorname{Arg}(1-3\mathrm{i})=-\arctan3+2k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots$。

2. 设 $z=x+\mathrm{i}y$，求 $\frac{1}{z}$ 和 $\frac{z-1}{z+1}$ 的实部，虚部。

解：$\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}$。

$\therefore \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{z}\right\}=\frac{x}{x^2+y^2},\ \operatorname{Im}\left\{\frac{1}{z}\right\}=\frac{-y}{x^2+y^2}$。

$\frac{z-1}{z+1}=\frac{(z-1)\overline{(z+1)}}{(z+1)\overline{(z+1)}}=\frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{|z+1|^2}=\frac{x^2+y^2-1+2y\mathrm{i}}{(x+1)^2+y^2}$。

$\therefore \operatorname{Re}\left\{\frac{z-1}{z+1}\right\}=\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2},\ \operatorname{Im}\left\{\frac{z-1}{z+1}\right\}=\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}$。

3. 将下列复数化简成 $x+\mathrm{i}y$ 的形式。

(1) $(1+2\mathrm{i})^3$；(2) $(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n$；(3) $\sqrt{5+12\mathrm{i}}$；(4) $\sqrt{-\mathrm{i}}$；(5) $\sqrt{\mathrm{i}}-\sqrt{-\mathrm{i}}$；

(6) $\sqrt[4]{-1}$。

解：(1) $(1+2\mathrm{i})^3=(1+2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})=(-3+4\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})=-11-2\mathrm{i}$。

(2) $(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n=\left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\right)^n+\left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\right)^n=2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}$。

(3) $\sqrt{5+12\mathrm{i}}=\left[13\mathrm{e}^{\left(\arctan\frac{12}{5}\right)\mathrm{i}}\right]^{\frac{1}{2}}$

$$=\sqrt{13}\left[\cos\frac{1}{2}\left(\arctan\frac{12}{5}+2k\pi\right)+\mathrm{i}\sin\frac{1}{2}\left(\arctan\frac{12}{5}+2k\pi\right)\right],\ k=0,1。$$

(4) $\sqrt{-\mathrm{i}}=\left(\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}\right)^{\frac{1}{2}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}+n\pi\right)}=\cos\left(-\frac{\pi}{4}+n\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}+n\pi\right),\ n=0,1$。

即 $\sqrt{-\mathrm{i}}=\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)$。

(5) $\sqrt{\mathrm{i}}-\sqrt{-\mathrm{i}}$

$$=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+m\pi\right)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}+n\pi\right)}$$

$$=\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+m\pi\right)-\cos\left(-\frac{\pi}{4}+n\pi\right)\right]+\mathrm{i}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}+m\pi\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{4}+n\pi\right)\right],\ m,n=0,1。$$

(6) $\sqrt[4]{-1}=\left(\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}\right)^{\frac{1}{4}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi+2n\pi}{4}\right)}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}\right),\ n=0,1,2,3$。

4. 如果等式 $\frac{x+1+\mathrm{i}(y-3)}{5+3\mathrm{i}}=1+\mathrm{i}$ 成立，试求实数 x,y 为何值？

解：注意到

$$\frac{x+1+\mathrm{i}(y-3)}{5+3\mathrm{i}}=\frac{[x+1+\mathrm{i}(y-3)](5+3\mathrm{i})}{(5+3\mathrm{i})(5-3\mathrm{i})}=\frac{1}{34}[(5x+3y-4)+\mathrm{i}(-3x+5y-18)]。$$

我们有

$$\frac{1}{34}[(5x+3y-4)+\mathrm{i}(-3x+5y-18)]=1+\mathrm{i}。$$

比较等式两边的实，虚部，得

$$\begin{cases}5x+3y-4=34\\-3x+5y-18=34\end{cases}。$$

解得 $x=1,y=11$。

5. 设 $0\le\theta\le\pi$，证明：

$$(1+\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{n\theta}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{n\theta}{2}\right)。$$

证： $(1+\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n$

$$=\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}+\mathrm{i}2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)^n=\left[2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\right)\right]^n$$

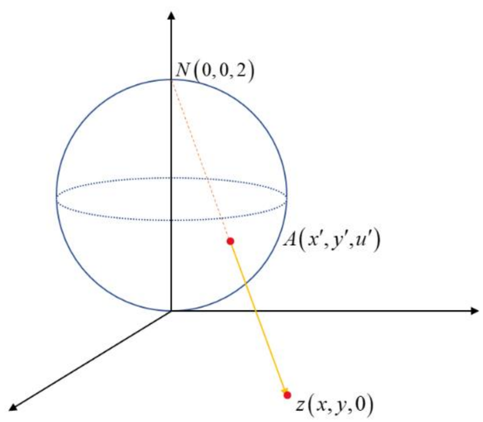
$$=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{n\theta}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{n\theta}{2}\right)。$$

6. 求复平面上的点 $z=(x,y)\in\mathbb{C}$ 在单位球面上的球极投影点 $A(x',y',u')$ 的坐标，并证明若点列 $\{z_n\}\subset\mathbb{C}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\infty$，则 $\{z_n\}$ 的球极投影点列 $\{A_n\}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=(0,0,2)$。

解： 因 $\overrightarrow{NA}\parallel\overrightarrow{Nz}$ 且 A 在单位球面上，有

$$\begin{cases}(x',y',u'-2)=t(x,y,-2)\,;\\(x')^2+(y')^2+(u'-1)^2=1\,。\end{cases}\qquad 0<t\le 1\quad。$$

或



$$\begin{cases}x'=xt\\y'=yt\\u'=2-2t\\(x')^2+(y')^2+(u'-1)^2=1\end{cases}\qquad 0<t\le 1。$$

解得

$$t=\frac{4}{x^2+y^2+4}。$$

$$x'=\frac{4x}{x^2+y^2+4},\ y'=\frac{4y}{x^2+y^2+4},\ u'=\frac{2\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2+4}。$$

故投影点 A 的坐标为 $\left(\dfrac{4x}{x^2+y^2+4},\dfrac{4y}{x^2+y^2+4},\dfrac{2\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2+4}\right)$。

设点列$\{z_n\}\subset\mathbb{C}$，有$\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\infty$，则$\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=\infty$。从而，有

$$\lim_{n\to\infty} x_n' = \lim_{n\to\infty}\frac{4x_n}{x_n^{\ 2}+y_n^{\ 2}+4} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\left(z_n+\overline{z}_n\right)}{|z_n|^2+4}=0;$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n' = \lim_{n\to\infty}\frac{4y_n}{x_n^{\ 2}+y_n^{\ 2}+4} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\left(z_n-\overline{z}_n\right)}{\mathrm{i}\left(|z_n|^2+4\right)}=0;$$

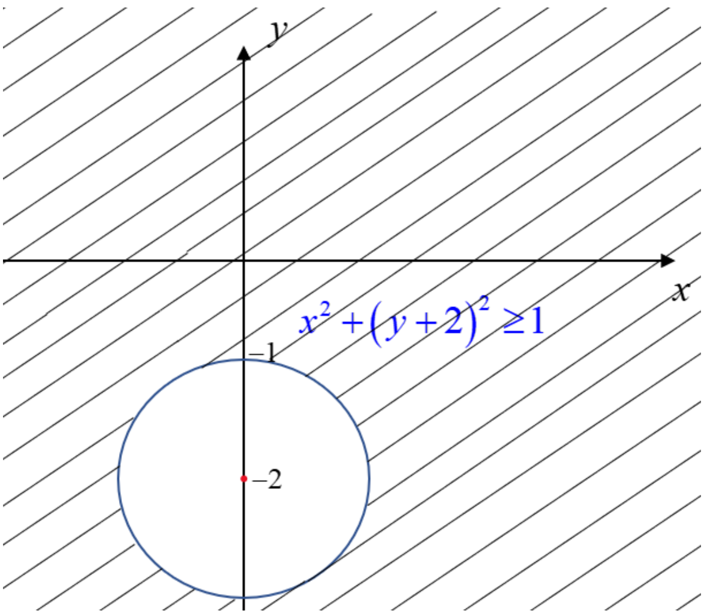
$$\lim_{n\to\infty} u_n' = \lim_{n\to\infty}\frac{2\left(x_n^{\ 2}+y_n^{\ 2}\right)}{x_n^{\ 2}+y_n^{\ 2}+4} = \lim_{n\to\infty}\frac{2|z_n|^2}{|z_n|^2+4}=2。$$

即$\lim\limits_{n\to\infty} A_n=(0,0,2)$。

7. 指出下列各题中点z的存在范围，并作图。

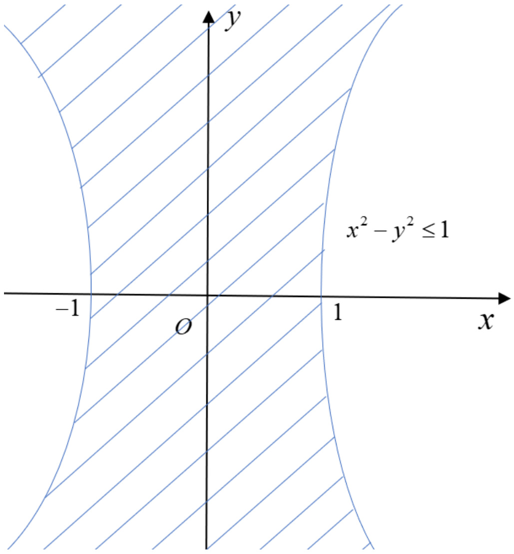
解： (1) $|z+2\mathrm{i}|\ge 1 \Leftrightarrow x^2+(y+2)^2\ge 1$。

点z的范围是复平面上以$-2\mathrm{i}$为圆心，1 为半径的圆周及它的外部。



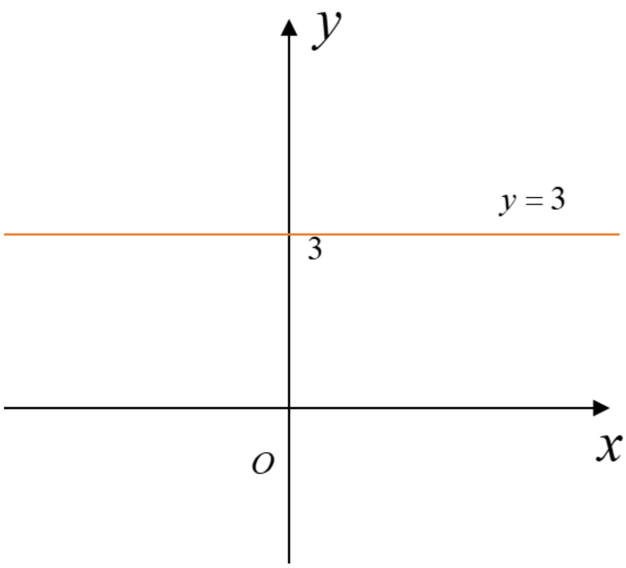
(2) $\mathrm{Re}\, z^2\le 1 \Leftrightarrow x^2-y^2\le 1$。

点z的范围是双曲线$x^2-y^2=1$及其内部。



(3) $\operatorname{Re}(\mathrm{i}\bar{z})=3 \Leftrightarrow y=3$。

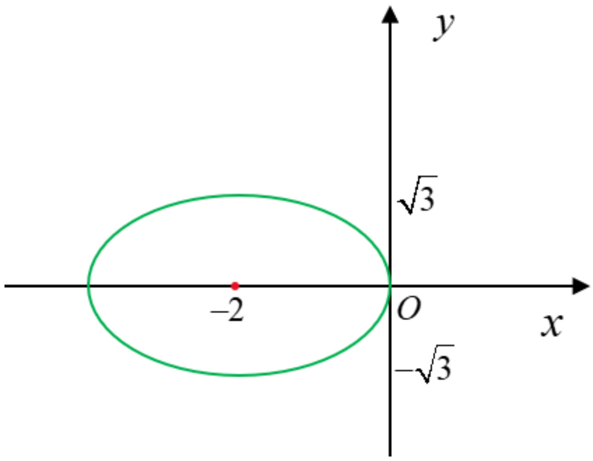
点z的范围是直线$y=3$。



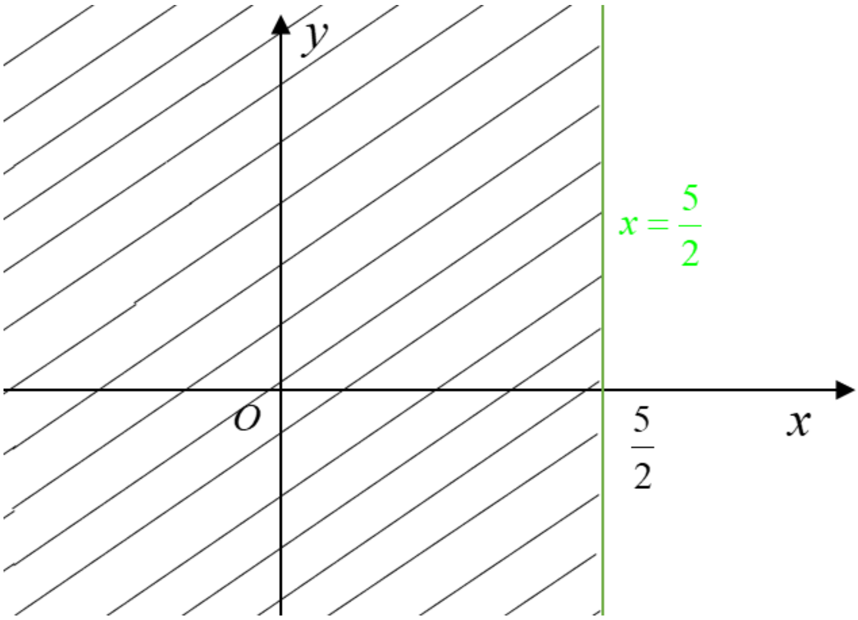
(4) $|z+3|+|z+1|=4 \Leftrightarrow |z+3|^2=\left(4-|z+1|\right)^2 \Leftrightarrow x-2=-2|z+1|$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+2)^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 。

点 z 的范围是以 $(-3,0)$ 和 $(-1,0)$ 为焦点，长半轴为 2，短半轴为 $\sqrt{3}$ 的一个椭圆。

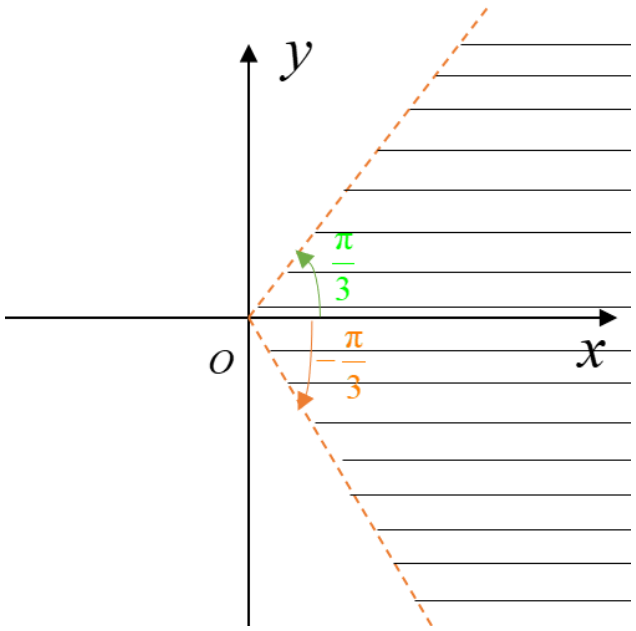


(5) $\left|\dfrac{z-3}{z-2}\right|\ge 1 \Leftrightarrow |z-3|^2 \ge |z-2|^2 \Leftrightarrow (z-3)(\bar{z}-3)\ge(z-2)(\bar{z}-2) \Leftrightarrow x\le \dfrac{5}{2}$。点 z 的范围是直线 $x=\dfrac{5}{2}$，及直线 $x=\dfrac{5}{2}$ 左边的区域。



(6) $|\arg z|<\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3}<\arg z<\frac{\pi}{3}$。

点 z 的范围是两条从原点出发的射线 $\arg z=\pm\frac{\pi}{3}$ 所夹的区域，不含边界。



8. 设 z, z_1, z_2 是三个复数，证明：

(1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$，$\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$，$\overline{\overline{z}}=z$;

(2) 当且仅当 $z=\overline{z}$ 时，z 是实数。

(3) $|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)$;

(4) $\operatorname{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)\le\left|z_1\overline{z_2}\right|=|z_1||z_2|$。

证： 设 $z=x+\mathrm{i}y$，$z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$。于是

(1) $\overline{z_1+z_2}=(x_1+x_2)-\mathrm{i}(y_1+y_2)=x_1-\mathrm{i}y_1+x_2-\mathrm{i}y_2=\overline{z_1}+\overline{z_2}$;

$\overline{z_1 z_2}=(x_1x_2-y_1y_2)-\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)=(x_1-\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$;

$\overline{\overline{z}}=\overline{x-\mathrm{i}y}=x+\mathrm{i}y=z$。

(2) $z=\overline{z} \Leftrightarrow x+\mathrm{i}y=x-\mathrm{i}y \Leftrightarrow y=0 \Leftrightarrow z=x\in\mathbb{R}$。

(3) $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})=|z_1|^2+|z_2|^2+(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)$

$$=|z_1|^2+|z_2|^2+(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}})=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})。$$

(4) $\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)=x_1x_2+y_1y_2\le\sqrt{(x_1x_2+y_1y_2)^2+(-x_1y_2+x_2y_1)^2}$

$$=|z_1\overline{z}_2|=\sqrt{x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2}$$

$$=\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}=|z_1||z_2|。$$

9. 试求下列极限

解：(1) $\lim\limits_{z\to1+\mathrm{i}}\dfrac{\overline{z}}{z}=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{1}{2}(1-\mathrm{i})^2=-\mathrm{i}$。

(2) $\lim\limits_{z\to\mathrm{i}}\dfrac{z\overline{z}+2z-\overline{z}-2}{z^2-1}=\lim\limits_{z\to\mathrm{i}}\dfrac{(\overline{z}+2)(z-1)}{(z+1)(z-1)}=\lim\limits_{z\to\mathrm{i}}\dfrac{\overline{z}+2}{z+1}=\dfrac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$。

10. 记 $z=x+\mathrm{i}y$，$\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$。证明：$\lim\limits_{z\to0}\dfrac{\mathrm{e}^z-1}{z}=1$。

证：$\because \mathrm{e}^z-1-z$

$$=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)-1-x-\mathrm{i}y$$

$$=\mathrm{e}^x-1-x-\mathrm{e}^x(1-\cos y)+\mathrm{i}\mathrm{e}^x(\sin y-y)+\mathrm{i}(\mathrm{e}^x-1)y。$$

$$\therefore\left|\frac{\mathrm{e}^z-1}{z}-1\right|=\left|\frac{\mathrm{e}^z-1-z}{z}\right|$$

$$=\left|\frac{x}{z}\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}-1\right)-\frac{y}{z}\mathrm{e}^x\left(\frac{1-\cos y}{y}\right)+\mathrm{i}\frac{y}{z}\mathrm{e}^x\left(\frac{\sin y}{y}-1\right)+\mathrm{i}\frac{x}{z}\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right)y\right|$$

$$\le\left|\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}-1\right|+\mathrm{e}^x\left|\frac{1-\cos y}{y}\right|+\mathrm{e}^x\left|\frac{\sin y}{y}-1\right|+\left|\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right||y|。$$

由于 $z\to0\Leftrightarrow x\to0$ 且 $y\to0$，于是

$$\lim_{z\to0}\left(\frac{\mathrm{e}^z-1}{z}-1\right)=0。$$

即 $\lim\limits_{z\to0}\dfrac{\mathrm{e}^z-1}{z}=1$。

11. 证明：z 平面上的圆的方程可以写成

$$az\bar{z}+\bar{e}z+e\bar{z}+d=0$$

的形式，其中 $a,d\in\mathbb{R},\ a>0,\ e\in\mathbb{C}$，且 $|e|^2-ad>0$。

证：设直角坐标系的圆的方程为

$$a\left(x^2+y^2\right)+bx+cy+d=0 \qquad (*)\ ,$$

其中 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ 且 $a>0$。于是

$$a\left(z\bar{z}\right)+b\frac{z+\bar{z}}{2}+c\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}+d=0$$

$$a\left(z\bar{z}\right)+\frac{b-\mathrm{i}c}{2}z+\frac{b+\mathrm{i}c}{2}\bar{z}+d=0$$

$$az\bar{z}+\bar{e}z+e\bar{z}+d=0$$

其中 $e=\dfrac{b+\mathrm{i}c}{2}$。又 $(*)$ 可以写成

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+a\left(y^2+\frac{c}{a}y\right)=-d$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+a\left(y+\frac{c}{2a}\right)^2=-d+\frac{b^2}{4a}+\frac{c^2}{4a}。$$

由 $-d+\dfrac{b^2}{4a}+\dfrac{c^2}{4a}=\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{b^2}{4}+\dfrac{c^2}{4}-ad\right)=\dfrac{1}{a}\left(|e|^2-ad\right)>0$，得

$$|e|^2-ad>0。$$

12. 解方程：$z^2-3\mathrm{i}z-(3-\mathrm{i})=0$。

解：$z=\dfrac{1}{2}\left(3\mathrm{i}+\sqrt{-9+4(3-\mathrm{i})}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(3\mathrm{i}+\sqrt{3-4\mathrm{i}}\right)$$

$$=\frac{3\mathrm{i}}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\left(-\arctan\frac{4}{3}+2k\pi\right)}$$

$$=\frac{3\mathrm{i}}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\left[\cos\frac{1}{2}\left(-\arctan\frac{4}{3}+2k\pi\right)+\mathrm{i}\sin\frac{1}{2}\left(-\arctan\frac{4}{3}+2k\pi\right)\right], k=0,1。$$

13. 试证：$\arg z\ (-\pi<\arg z\le\pi)$在负实轴上(包括原点)不连续，除此之外在 z 平面上处处连续。

证：设 $f(z)=\arg z$。因为 $f(0)$ 无定义，所以 $f(z)$ 在原点不连续。

当 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 为负实轴上的点时，有 $x_0<0, y_0=0$ 且

$$\lim_{y\to0^+,x=x_0}\left(\arctan\frac{y}{x}+\pi\right)=\pi;$$

$$\lim_{y\to0^-,x=x_0}\left(\arctan\frac{y}{x}-\pi\right)=-\pi。$$

所以 $\lim\limits_{z\to z_0}\arg z$ 不存在，即 $\arg z$ 在负实轴上不连续。而在 z 平面上的其它点处

$$\arg z=\begin{cases}0 & x>0, y=0;\\ \arctan\frac{y}{x} & x>0, y>0;\\ \frac{\pi}{2} & x=0, y>0;\\ \arctan\frac{y}{x}+\pi & x<0, y>0;\\ \arctan\frac{y}{x}-\pi & x<0, y<0;\\ -\frac{\pi}{2} & x=0, y<0;\\ \arctan\frac{y}{x} & x>0, y<0。\end{cases}$$

它是连续的。

14. 将函数 $w=x\left(1+\frac{1}{x^2+y^2}\right)+\mathrm{i}y\left(1-\frac{1}{x^2+y^2}\right)$表示成变量 z 的表达式。

证： 因为 $x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $y=\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$, $x^2+y^2=z\bar{z}$，故

$$\begin{aligned}w&=x\left(1+\frac{1}{x^2+y^2}\right)+\mathrm{i}y\left(1-\frac{1}{x^2+y^2}\right)\\&=\frac{1}{2}(z+\bar{z})\left(1+\frac{1}{z\bar{z}}\right)+\mathrm{i}\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})\left(1-\frac{1}{z\bar{z}}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(z+\bar{z}+\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{z}}+z-\bar{z}-\frac{1}{\bar{z}}+\frac{1}{z}\right)\\&=z+\frac{1}{z}\text{。}\end{aligned}$$

15. 设 $|z_0|<1$。证明：若 $|z|=1$，则 $\left|\frac{z-z_0}{1-\bar{z_0}z}\right|=1$。若 $|z|<1$，则

(1) $\left|\frac{z-z_0}{1-\bar{z_0}z}\right|<1$;

(2) $\frac{\left||z|-|z_0|\right|}{1-|z_0||z|}\le\left|\frac{z-z_0}{1-\bar{z_0}z}\right|\le\frac{\left||z|+|z_0|\right|}{1+|z_0||z|}$。

证： 若 $|z|=1$，则

$$\left|\frac{z-z_0}{1-\bar{z_0}z}\right|=\frac{|z-z_0|}{|1-\bar{z_0}z||\bar{z}|}=\frac{|z-z_0|}{|\bar{z}-\bar{z_0}|}=1\text{。}$$

若 $|z|<1$，注意到

$$\left|\frac{z-z_0}{1-\bar{z_0}z}\right|^2=\frac{|z-z_0|^2}{|1-\bar{z_0}z|^2}=\frac{(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z_0})}{(1-\bar{z_0}z)(1-z_0\bar{z})}=\frac{|z|^2-z\bar{z_0}-z_0\bar{z}+|z_0|^2}{1-z_0\bar{z}-z\bar{z_0}+|z|^2|z_0|^2}\text{。}$$

由 $|z_0|<1$ 和 $|z|<1$，有

$$\left(1-|z|^2\right)\left(1-|z_0|^2\right)>0\text{。}$$

于是，得

$$|z|^2+|z_0|^2-1-|z|^2|z_0|^2<0\text{。}$$

从而，有

$$|z|^2-z\bar{z_0}-z_0\bar{z}+|z_0|^2<1-z_0\bar{z}-z\bar{z_0}+|z|^2|z_0|^2\text{。}$$

故 $\left|\dfrac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|^2<1$，即(1)成立。

对于(2)，注意到

$$\frac{\left||z|-|z_0|\right|}{1-|z_0||z|}\le\left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|\le\frac{\left||z|+|z_0|\right|}{1+|z_0||z|}\Leftrightarrow\left(\frac{\left||z|-|z_0|\right|}{1-|z_0||z|}\right)^2\le\left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|^2\le\left(\frac{\left||z|+|z_0|\right|}{1+|z_0||z|}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\frac{|z|^2+|z_0|^2-2|z||z_0|}{1+|z|^2|z_0|^2-2|z||z_0|}\le\frac{|z|^2+|z_0|^2-\left(z\overline{z_0}+\overline{z}z_0\right)}{1+|z|^2|z_0|^2-\left(z\overline{z_0}+\overline{z}z_0\right)}\le\frac{|z|^2+|z_0|^2+2|z||z_0|}{1+|z|^2|z_0|^2+2|z||z_0|}。$$

现在，由$|z_0|<1$和$|z|<1$，得

$$\begin{aligned}&\left[|z|^2+|z_0|^2-\left(z\overline{z_0}+\overline{z}z_0\right)\right]\left(1+|z|^2|z_0|^2+2|z||z_0|\right)-\left[1+|z|^2|z_0|^2-\left(z\overline{z_0}+\overline{z}z_0\right)\right]\left(|z|^2+|z_0|^2+2|z||z_0|\right)\\&=2|z||z_0|\left(|z|^2+|z_0|^2\right)-\left(z\overline{z_0}+\overline{z}z_0\right)\left(1+|z|^2|z_0|^2\right)-2|z||z_0|\left(1+|z|^2|z_0|^2\right)+\left(z\overline{z_0}+\overline{z}z_0\right)\left(|z|^2+|z_0|^2\right)\\&=2|z||z_0|\left(|z|^2-1\right)\left(1-|z_0|^2\right)+\left(z\overline{z_0}+\overline{z}z_0\right)\left(|z|^2-1\right)\left(1-|z_0|^2\right)\\&=\left(|z|^2-1\right)\left(1-|z_0|^2\right)\left(2|z||z_0|+z\overline{z_0}+\overline{z}z_0\right)\\&=\left(|z|^2-1\right)\left(1-|z_0|^2\right)\left(2|\overline{z}z_0|+2\operatorname{Re}\{\overline{z}z_0\}\right)\\&<0\ 。\end{aligned}$$

故

$$\left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|^2\le\left(\frac{\left||z|+|z_0|\right|}{1+|z_0||z|}\right)^2。$$

从而

$$\left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|\le\frac{\left||z|+|z_0|\right|}{1+|z_0||z|}。$$

同理可证

$$\frac{\left||z|-|z_0|\right|}{1-|z_0||z|}\le\left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|。$$

16*. 证明：方程$\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=k\left(z_1\neq z_2,\ k>0,\ k\neq 1\right)$表示复平面上园心为

$z_0=\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2}$，半径为$\rho=k\frac{|z_1-z_2|}{|1-k^2|}$的圆周：$|z-z_0|=\rho$。

证： 因为$\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=k\Leftrightarrow\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|^2=k^2\Leftrightarrow\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{\overline{z}-\overline{z}_1}{\overline{z}-\overline{z}_2}=k^2$，所以

$$z\overline{z}-z\overline{z}_1-z_1\overline{z}+z_1\overline{z}_1=k^2\left(z\overline{z}-z\overline{z}_2-z_2\overline{z}+z_2\overline{z}_2\right)。$$

即

$$z\overline{z}\left(1-k^2\right)-z\left(\overline{z}_1-k^2\overline{z}_2\right)-\overline{z}\left(z_1-k^2z_2\right)=k^2z_2\overline{z}_2-z_1\overline{z}_1$$

$$\Leftrightarrow z\overline{z}-z\left(\frac{\overline{z}_1-k^2\overline{z}_2}{1-k^2}\right)-\overline{z}\left(\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2}\right)=\frac{k^2z_2\overline{z}_2-z_1\overline{z}_1}{1-k^2},\ k\neq 1$$

$$\Leftrightarrow z\overline{z}-z\left(\overline{\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2}}\right)-\overline{z}\left(\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2}\right)=\frac{k^2z_2\overline{z}_2-z_1\overline{z}_1}{1-k^2}。$$

因此

$$\left|z-\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2}\right|^2=\left(z-\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2}\right)\left(\overline{z}-\overline{\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2}}\right)$$

$$=z\overline{z}-z\left(\overline{\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2}}\right)-\overline{z}\left(\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2}\right)+\frac{\left|z_1-k^2z_2\right|^2}{\left(1-k^2\right)^2}$$

$$=\frac{k^2z_2\overline{z}_2-z_1\overline{z}_1}{1-k^2}+\frac{\left(z_1-k^2z_2\right)\left(\overline{z}_1-k^2\overline{z}_2\right)}{\left(1-k^2\right)^2}$$

$$=\frac{\left(k^2z_2\overline{z}_2-z_1\overline{z}_1\right)\left(1-k^2\right)+z_1\overline{z}_1-k^2z_1\overline{z}_2-k^2\overline{z}_1z_2+k^4z_z\overline{z}_2}{\left(1-k^2\right)^2}$$

$$=\frac{k^2\left|z_1-z_2\right|^2}{\left(1-k^2\right)^2}。$$

故 $|z-z_0|=\rho$，这里$z_0=\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2}$，$\rho=k\frac{|z_1-z_2|}{|1-k^2|}$。