习题二

1. 下列函数在何处可导？何处解析？

解：(1) $f(z)=x^2-\mathrm{i}y$;

由于

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0,\ \frac{\partial v}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v}{\partial y}=-1$$

在 z 平面上处处连续，且当且仅当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，u,v 满足 $\mathrm{C-R}$ 条件。故 $f(z)$ 仅在直线 $x=-\frac{1}{2}$ 上可导，在 z 平面上处处不解析。

(2) $f(z)=xy^2+\mathrm{i}x^2y$;

由于

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2,\ \frac{\partial u}{\partial y}=2xy,\ \frac{\partial v}{\partial x}=2xy,\ \frac{\partial v}{\partial y}=x^2$$

在 z 平面上处处连续，且当且仅当 $x=y=0$ 时，u,v 满足 $\mathrm{C-R}$ 条件。故 $f(z)$ 仅在点 $z=0$ 处可导，在 z 平面上处处不解析。

(3) $f(z)=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$;

由于

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-x^2-2xy+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x^2-2xy-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},\ \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-x^2+2xy+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{-x^2-2xy+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

在 z 平面上除 $z=0$ 外处处连续，且当 $z\neq 0$ 时，u,v 满足 $\mathrm{C-R}$ 条件。故 $f(z)$ 在 z 平面上除 $z=0$ 外可导，在 z 平面上除 $z=0$ 外处处解析。

(4) $f(z)=\operatorname{Im} z=y$ 。

由于

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ \frac{\partial u}{\partial y}=1,\ \frac{\partial v}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v}{\partial y}=0\,,$$

可知在 z 平面上 u,v 处处不满足 $\mathrm{C-R}$ 条件。故 $f(z)$ z 平面上处处不可导，在 z 平面上处处不解析。

2. 定义

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{x^2y(x+\mathrm{i}y)}{x^4+y^2}, & z=x+\mathrm{i}y\neq 0;\\ 0, & z=x+\mathrm{i}y=0。\end{cases}$$

证明：$f(z)$ 在 z 平面上处处连续，但在 $z=0$ 不可导。

证： 当 $z\neq 0$ 时，$f(z)$ 的实部 $u=\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}$ 和虚部 $v=\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^2}$ 都连续。从而当 $z\neq 0$ 时，$f(z)$ 连续。

当 $z=0$ 时，注意到

$$|u|=\frac{|x^3y|}{x^4+y^2}=\frac{|x^2y||x|}{x^4+y^2}\le\frac{\frac{1}{2}(x^4+y^2)|x|}{x^4+y^2}=\frac{1}{2}|x|\to 0,\ z=x+\mathrm{i}y\to 0;$$

$$|v|=\frac{|x^2y^2|}{x^4+y^2}=\frac{|x^2y||y|}{x^4+y^2}\le\frac{\frac{1}{2}(x^4+y^2)|y|}{x^4+y^2}=\frac{1}{2}|y|\to 0,\ z=x+\mathrm{i}y\to 0。$$

故 $\lim\limits_{z\to 0}f(z)=0=f(0)$。即 $f(z)$ 在 $z=0$ 连续。

现在，容易看到

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ y=x}}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\lim_{\substack{z\to 0\\ y=x}}\frac{f(z)}{z}=\lim_{\substack{z\to 0\\ y=x}}\frac{x^4(1+\mathrm{i})}{x^2(x^2+1)(x+\mathrm{i}x)}=0;$$

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ y=x^2}}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\lim_{\substack{z\to 0\\ y=x^2}}\frac{f(z)}{z}=\lim_{\substack{z\to 0\\ y=x^2}}\frac{x^5(1+x\mathrm{i})}{2x^4(x+\mathrm{i}x^2)}=\frac{1}{2}。$$

从而，$\lim\limits_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}$ 不存在。因此 $f(z)$ 在 $z=0$ 不可导。

3. 试证下列函数在 z 平面上处处不解析。

解：(1) $f(z)=x+y$;

由于

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\ \frac{\partial u}{\partial y}=1,\ \frac{\partial v}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

可知在 z 平面上 u,v 处处不满足 $\mathrm{C-R}$ 条件。故 $f(z)$ 在 z 平面上处处不解析。

(2) $f(z)=\mathrm{Re}\,z=x$;

由于

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0,\ \frac{\partial v}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v}{\partial y}=0\ ,$$

可知在z平面上u,v处处不满足$\mathrm{C-R}$条件。故$f(z)$在z平面上处处不解析。

(3) $f(z)=\frac{1}{|z|}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$。

由于

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}},\ \frac{\partial v}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v}{\partial y}=0\ ,$$

可知在$z\neq 0$时，u,v处处不满足$\mathrm{C-R}$条件。而在$z=0$时，$f(z)$无定义。故$f(z)$在z平面上处处不解析。

4. 设$f(z)=my^3+nx^2y+\mathrm{i}\left(x^3-3xy^2\right)$为解析函数，试确定$m$，$n$的值。

解：令$u=my^3+nx^2y,\ v=x^3-3xy^2$。因$f(z)$解析，由$\mathrm{C-R}$条件得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2nxy=\frac{\partial v}{\partial y}=-6xy;\ \ \frac{\partial u}{\partial y}=3my^2+nx^2=-\frac{\partial v}{\partial x}=-\left(3x^2-3y^2\right)。$$

解得$m=1,n=-3$。

5. 函数$f(z)$在区域D内解析。证明：如果对每一点$z\in D$，有$f'(z)=0$，那么$f(z)$在D内是常数。

证： 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，且对每一点 $z\in D$，有

$f'(z)=0$。则

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}=0\text{。}$$

从而

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0\text{。}$$

这说明 u,v 为常数。故 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是一个常数。

6. 试判断下述命题的真假，并举例说明。

(1) 如果 $f'(z_0)$ 存在，那么 $f(z)$ 在点 z_0 解析。

解： 命题假。如函数 $f(z)=|z|^2=x^2+y^2$ 仅在点 $z=0$ 处可导。故 $f(z)$ 在点 $z=0$ 处不解析。

(2) 如果 $f(z)$ 在点 z_0 连续，那么 $f'(z_0)$ 存在。

解： 命题假。如函数 $f(z)=|z|^2=x^2+y^2$ 在 z 平面上处处连续，但除 $z=0$ 外处处不可导。

(3) 实部与虚部满足柯西–黎曼方程的复变函数是解析函数；

解： 命题假。如函数 $f(z)=z\,\mathrm{Re}\,z=x^2+ixy$ 仅在点 $z=0$ 处满足 C−R 条件。故 $f(z)$ 在点 $z=0$ 处不解析。

7. 证明：如果函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在区域 D 内解析，并满足下列条件之一，那么 $f(z)$ 是常数。

1） $f(z)$ 恒取实值；

2） $\overline{f(z)}$ 在 D 内解析；

3） $|f(z)|$ 在 D 内是一个常数；

4） $\mathrm{Re}\, f(z)$ 在 D 内是一个常数。

解：1) 假设 $v=0$。因为 $f(z)$ 在区域 D 内解析，由 $\mathrm{C-R}$ 条件，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=0\text{。}$$

因而 u 为常数。从而 $f(z)=u+\mathrm{i}v=u$ 是一个常数。

2) 假设 $\overline{f(z)}=u-\mathrm{i}v$ 在 D 内解析。由 $\mathrm{C-R}$ 条件，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial(-v)}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial(-v)}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}\text{。}$$

又因为 $f(z)$ 在区域 D 内解析，由 $\mathrm{C-R}$ 条件，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\text{。}$$

综合上面两组方程，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0\text{。}$$

因而 u,v 为常数。从而 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是一个常数。

3) 假设$\left|f(z)\right|$在D内是一个常数。故有$u^2+v^2=C$ $(C为常数)$。因为$f(z)$在区域D内解析，从而u,v在D内可微且满足$\mathrm{C-R}$条件。在$u^2+v^2=C$两边分别对x和y求偏导，有

$$\begin{cases} 2u\dfrac{\partial u}{\partial x}+2v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \\ 2u\dfrac{\partial u}{\partial y}+2v\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \end{cases}。$$

代入$\mathrm{C-R}$条件$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$于上式，可解得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0。$$

因而u,v为常数。从而$f(z)=u+\mathrm{i}v$是一个常数。

4) 假设$\mathrm{Re}\,f(z)$在D内是一个常数，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0。$$

利用$f(z)$在区域D内解析，其实，虚部满足$\mathrm{C-R}$条件可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0。$$

因而u,v为常数。从而$f(z)=u+\mathrm{i}v$是一个常数。

8. 验证下列函数是调和函数，并求出以$z=x+\mathrm{i}y$为自变量的解析函数$w=f(z)=u+\mathrm{i}v$。

1） $v=\arctan\dfrac{y}{x},\ \ x>0;$

2） $u=\mathrm{e}^{x}\left(y\cos y+x\sin y\right)+x+y,\ \ f\left(0\right)=\mathrm{i};$

3） $u=\left(x-y\right)\left(x^{2}+4xy+y^{2}\right);$

4） $v=\dfrac{y}{x^{2}+y^{2}}$，$f\left(2\right)=0$。

解：1)由于

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^{2}}\frac{-y}{x^{2}}=-\frac{y}{x^{2}+y^{2}};$$

$$\frac{\partial^{2}v}{\partial x^{2}}=\frac{2xy}{\left(x^{2}+y^{2}\right)^{2}};$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^{2}}\frac{1}{x}=\frac{x}{x^{2}+y^{2}};$$

$$\frac{\partial^{2}v}{\partial x^{2}}=\frac{-2xy}{\left(x^{2}+y^{2}\right)^{2}}\text{。}$$

显然$\dfrac{\partial^{2}v}{\partial x^{2}}+\dfrac{\partial^{2}v}{\partial y^{2}}=0$,故在右半平面内$v=\arctan\dfrac{y}{x}$是调和函数。利用$\mathrm{C-R}$条件，得

$$u=\int\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\partial v}{\partial y}\,\mathrm{d}x=\int\frac{x}{x^{2}+y^{2}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left(x^{2}+y^{2}\right)+\varphi\left(y\right)\text{。}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^{2}+y^{2}}+\varphi'\left(y\right)=-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{y}{x^{2}+y^{2}}\text{。}$$

于是，有$\varphi'\left(y\right)=0$。从而$\varphi\left(y\right)=C$。故

$$u=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)+C\text{，}$$

及 $f(z)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)+C+\mathrm{i}\arctan\frac{y}{x}=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z+C$。

2) 由于

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{e}^x\left(y\cos y+x\sin y+\sin y\right)+1\text{；}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\mathrm{e}^x\left(y\cos y+x\sin y+2\sin y\right);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\mathrm{e}^x\left(\cos y+x\cos y-y\sin y\right)+1\text{；}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\mathrm{e}^x\left(-y\cos y-x\sin y-2\sin y\right)\text{。}$$

显然 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, 故在 z 平面 $u=\mathrm{e}^x\left(y\cos y+x\sin y\right)+x+y$ 是调和函数。利用 $\mathrm{C-R}$ 条件及 v 是可微函数，得

$$\begin{aligned}
v&=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\mathrm{d}v+C=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y+C=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y+C\\
&=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\left[\mathrm{e}^x\left(-\cos y-x\cos y+y\sin y\right)-1\right]\mathrm{d}x+\left[\mathrm{e}^x\left(y\cos y+x\sin y+\sin y\right)+1\right]\mathrm{d}y+C\\
&=\int_0^x\left[\mathrm{e}^x\left(-1-x\right)-1\right]\mathrm{d}x+\int_0^y\left[\mathrm{e}^x\left(y\cos y+x\sin y+\sin y\right)+1\right]\mathrm{d}y+C\qquad(\text{积分与路经无关})\\
&=-x-x\mathrm{e}^x+\left[\mathrm{e}^x\left(y\sin y+\cos y-x\cos y-\cos y\right)+y\right]\Big|_0^y+C\\
&=\mathrm{e}^x\left(y\sin y-x\cos y\right)+y-x+C\text{。}
\end{aligned}$$

于是

$$f(z)=u+\mathrm{i}v=\mathrm{e}^x\left(y\cos y+x\sin y\right)+x+y+\mathrm{i}\left[\mathrm{e}^x\left(y\sin y-x\cos y\right)+y-x+C\right]\text{。}$$

令 $y=0$，得

$$f(x)=x+\mathrm{i}\mathrm{e}^{x}(-x)-\mathrm{i}x+\mathrm{i}C=-\mathrm{i}x\mathrm{e}^{x}+(1-\mathrm{i})x+\mathrm{i}C \text{ 。}$$

可知解析函数

$$f(z)=-\mathrm{i}z\mathrm{e}^{z}+(1-\mathrm{i})z+\mathrm{i}C \text{ 。}$$

令 $z=0,$ 及 $f(0)=\mathrm{i}$，得 $C=1$。故 $f(z)=-\mathrm{i}z\mathrm{e}^{z}+(1-\mathrm{i})z+\mathrm{i}$ 。

3) 由于

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+6xy-3y^2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6x+6y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2-6xy-3y^2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-6x-6y \text{ 。}$$

显然 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$ 故在 z 平面 $u=(x-y)\left(x^2+4xy+y^2\right)$ 是调和函数。注意到 $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$，利用 $\mathrm{C-R}$ 条件，有

$$\begin{aligned} f'(z)&=\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2+6xy-3y^2-\mathrm{i}\left(3x^2-6xy-3y^2\right)\\ &=3\left[\left(x^2-y^2\right)+\mathrm{i}2xy\right]-3\mathrm{i}\left[\left(x^2-y^2\right)+\mathrm{i}2xy\right]\\ &=3(1-\mathrm{i})z^2 \text{。}\end{aligned}$$

于是所求的解析函数为

$$f(z)=\int f'(z)\,\mathrm{d}z=\int 3(1-\mathrm{i})\,z^2\mathrm{d}z=(1-\mathrm{i})z^3+C\text{。}$$

4) 由于

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{2y\left(3x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3};$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-\frac{2y\left(3x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}\text{。}$$

显然 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$, 故在 $z\neq 0$ 的区域里 $v=\frac{y}{x^2+y^2}$ 是调和函数。利用 C−R 条件，得

$$u=\int\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y=\int-\frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}y=\int\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,\mathrm{d}y=x\int\frac{\mathrm{d}\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$
$$=\frac{-x}{x^2+y^2}+\varphi(x)\text{。}$$

又

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\varphi'(x)=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\text{。}$$

得 $\varphi'(x)=0$，从而 $\varphi(x)=C$。故

$$u=\frac{-x}{x^2+y^2}+C\text{。}$$

$$f(z)=\frac{-x}{x^2+y^2}+C+\mathrm{i}\frac{y}{x^2+y^2}=-\frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}+C$$
$$=-\frac{x-\mathrm{i}y}{(x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y)}+C=C-\frac{1}{x+\mathrm{i}y}=C-\frac{1}{z}。$$

由初始条件$0=f(2)=C-\frac{1}{2}$，得$C=\frac{1}{2}$。从而所求的解析函数为

$$f(z)=\frac{1}{2}-\frac{1}{z}。$$

9. 设$u=u(x,y)$为调和函数，则实函数$w=f(u)$满足什么条件，可以使复合函数

$$w=f\left[u(x,y)\right]$$

为一个调和函数。

解： 设$f(u)$有二阶连续导数。则

$$\frac{\partial w}{\partial x}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial x},\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=f''(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+f'(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}。$$

同理，有

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=f''(u)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+f'(u)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}。$$

注意到$u=u(x,y)$为调和函数，我们得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=f''(u)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+f'(u)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]$$
$$=f''(u)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]。$$

当 $u=$ 常数时，$f(u)$ 为任意有二阶连续导数函数。

当 $u\neq$ 常数时，上式当且仅当 $f''(u)=0$ 时，$w=f(u)$ 为调和函数。而

$$f''(u)=0\Leftrightarrow f(u)=au+b,\ a,b\in\mathbb{R}\text{。}$$

故 $f(u)$ 为 u 的线性函数时，$w=f\left[u(x,y)\right]$ 为一个调和函数。

10. 设 f 和 g 均在点 z_0 处可导，$g(z)$ 在 z_0 的某个邻域内不为 0，且

$$f(z_0)=g(z_0)=0,\ g'(z_0)\neq 0,$$

证明：$\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$。

证： 设 f 和 g 均在点 z_0 处可导，$g(z)$ 在 z_0 的某个邻域内不为 0，且

$$f(z_0)=g(z_0)=0,\ g'(z_0)\neq 0,$$

则

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{\dfrac{f(z)}{z-z_0}}{\dfrac{g(z)}{z-z_0}}=\lim_{z\to z_0}\frac{\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\dfrac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}\text{。}$$

11. 如果 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是一解析函数，试证：

1）$\overline{\mathrm{i}\,\overline{f(z)}}$ 也是解析函数；

2）$-u$ 是 v 的共轭调和函数。

证： 1) 注意到

$$\overline{\mathrm{i}\ \overline{f(z)}}=\overline{\mathrm{i}\ (u-\mathrm{i}v)}=\overline{v+\mathrm{i}u}=v-\mathrm{i}u=-\mathrm{i}(u+\mathrm{i}v)=-\mathrm{i}f(z)。$$

因为 $f(z)$ 是一解析函数，故 $\mathrm{i}\ \overline{f(z)}$ 也是解析函数。

2) 因为 $f(z)$ 是一解析函数，所以 u 和 v 都是调和函数。从而 $-u$ 和 v 也是调和函数。又 u 和 v 满足 C−R 条件，即

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}。$$

从而

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial(-u)}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial(-u)}{\partial x}。$$

故 $-u$ 是 v 的共轭调和函数。

12. 若 $u=u(x,y),\ v=v(x,y)$ 为调和函数，问下列函数是否为调和函数？

(1) $u[v(x,y),y]$；　(2) $u[x,v(x,y)]$；

(3) $u(x,y)v(x,y)$；　(4) $u(x,y)+v(x,y)$。

解： (1) 不是。例如：$u=2xy$ 及 $v=y$ 均在 $\mathbb{C}$ 上调和，但

$$u[v(x,y),y]=2y\cdot y=y^2$$

不是调和函数。

(2) 不是。例如：$u=2xy$ 及 $v=x$ 均在 $\mathbb{C}$ 上调和，但

$$u\left[x, v(x, y)\right] = 2x \cdot x = x^2$$

不是调和函数。

(3) 不是。例如: $u = x$ 及 $v = x$ 均在$\mathbb{C}$上调和，但

$$u(x, y)v(x, y) = x^2$$

不是调和函数。

(4) 是。由调和函数定义可知。

13. 设 $f(z) = u + \mathrm{i}v$ 在区域D内解析，则其实,虚部 u 和 v 是D内的调和函数。其逆命题是否成立？肯定给出严格证明，否定请举一反例。

解: 逆命题不成立。例如: $u = y$ 及 $v = x$ 均在$\mathbb{C}$上调和。但

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 1 \neq -\frac{\partial v}{\partial x} = -1。$$

故 $f(z) = y + \mathrm{i}x$ 在$\mathbb{C}$上不是解析函数。

14. 如果 $f(z) = u + \mathrm{i}v$ 是 z 的解析函数，证明:

1) $\left(\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}|f(z)|\right)^2 = |f'(z)|^2$。

2) $\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = |f'(z)|^2$。

3） $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2=4|f'(z)|^2$。

4） $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^\rho=\rho^2|f(z)|^{\rho-2}|f'(z)|^2$。

5） $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|u|^\rho=\rho(\rho-1)|u|^{\rho-2}|f'(z)|^2\,(u\neq 0)$。

证： 1) 注意到 $|f(z)|=\sqrt{u^2+v^2}$。我们有

$$\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|=\frac{u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}}{\sqrt{u^2+v^2}},\quad \frac{\partial}{\partial y}|f(z)|=\frac{u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}}{\sqrt{u^2+v^2}}。$$

于是

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}|f(z)|\right)^2$$
$$=\frac{1}{u^2+v^2}\left[u^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+v^2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+2uv\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+u^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+v^2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2uv\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right]。$$

由于 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是解析函数，故

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}。$$

从而

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}|f(z)|\right)^2$$

$$=\frac{1}{u^2+v^2}\left[u^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+v^2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+2uv\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+u^2\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+v^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2uv\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

$$=\frac{1}{u^2+v^2}\left\{u^2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]+v^2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]\right\}$$

$$=\left|f'(z)\right|^2。$$

2) 由于 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是解析函数，故

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}。$$

从而

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}-\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2=\left|f'(z)\right|^2。$$

3) $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left|f(z)\right|^2=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(u^2+v^2\right)$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(2u\frac{\partial u}{\partial y}+2v\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$=2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+v\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right]$$

$$=2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right]$$

$$=2\left(\left|f'(z)\right|^2+\left|f'(z)\right|^2\right)$$

$$=4\left|f'(z)\right|^2。$$

4) $\left|f\right|^{\rho}=\left(u^2+v^2\right)^{\frac{\rho}{2}}$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|f\right|^{\rho}\right)=\frac{\rho}{2}\left(u^2+v^2\right)^{\frac{\rho}{2}-1}\left(2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\rho\left(u^2+v^2\right)^{\frac{\rho}{2}-1}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}\right)。$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(|f|^\rho\right)=\rho(\rho-2)\left(u^2+v^2\right)^{\frac{\rho}{2}-2}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+$$
$$\rho\left(u^2+v^2\right)^{\frac{\rho}{2}-1}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)。$$

同理

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(|f|^\rho\right)=\rho(\rho-2)\left(u^2+v^2\right)^{\frac{\rho}{2}-2}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+$$
$$\rho\left(u^2+v^2\right)^{\frac{\rho}{2}-1}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+v\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)。$$

从而

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f|^\rho=\rho(\rho-2)|f|^{\rho-4}\left[\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]+$$
$$\rho|f|^{\rho-2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+v\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$
$$=\rho(\rho-2)|f|^{\rho-4}|f|^2|f'|^2+\rho|f|^{\rho-2}2|f'|^2\quad(C-R\text{ 条件，调和条件})$$
$$=\rho^2|f|^{\rho-2}|f'|^2。$$

5) $\frac{\partial}{\partial x}|u|^\rho=\rho|u|^{\rho-1}\left(\pm\frac{\partial u}{\partial x}\right)$,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}|u|^\rho=\rho(\rho-1)|u|^{\rho-2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\rho|u|^{\rho-1}\left(\pm\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)。$$

同理

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}|u|^\rho=\rho(\rho-1)|u|^{\rho-2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\rho|u|^{\rho-1}\left(\pm\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)。$$

故

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|u|^\rho=\rho(\rho-1)|u|^{\rho-2}\left|f'(z)\right|^2(u\neq 0)。$$

15. 将下列函数值写成 $x+\mathrm{i}y$ 的形式。

1） $\mathrm{e}^{1+\pi \mathrm{i}}+\cos \mathrm{i}$;

2） $\mathrm{ch}\frac{\pi}{4}\mathrm{i}$;

3） $\cos(\mathrm{i}\ln 5)$;

4） $\mathrm{Ln}(-3+4\mathrm{i})$。

解： 1) $\mathrm{e}^{1+\pi \mathrm{i}}+\cos \mathrm{i}=\mathrm{e}\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}}+\cos \mathrm{i}=\mathrm{e}(\cos \pi+\mathrm{i}\sin \pi)+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}}}{2}$

$$=-\mathrm{e}+\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-1}+\mathrm{e})$$
$$=-\frac{1}{2}(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1})。$$

2) $\mathrm{ch}\frac{\pi}{4}\mathrm{i}=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{4}}+\mathrm{e}^{-\frac{\pi \mathrm{i}}{4}}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

3) $\cos(\mathrm{i}\ln 5)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}\ln 5}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}\ln 5})=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\ln 5}+\mathrm{e}^{\ln 5})=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}+5\right)=\frac{13}{5}$ 。

4) $\mathrm{Ln}(-3+4\mathrm{i})=\ln|-3+4\mathrm{i}|+\mathrm{i}[\arg(-3+4\mathrm{i})+2k\pi]$

$$=\ln 5+\mathrm{i}\left(\pi-\arctan\frac{4}{3}+2k\pi\right)$$
$$=\ln 5-\mathrm{i}\left[\arctan\frac{4}{3}-(2k+1)\pi\right],\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots;$$

16. 求方程 $\cos z=5$ 在复平面上的全部解。

解： 由余弦函数的定义， 有

$$\frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)=5。$$

从而，有

$$\left(e^{iz}\right)^2-10e^{iz}+1=0。$$

$$\therefore e^{iz}=\frac{1}{2}\left(10\pm\sqrt{96}\right)=5\pm\sqrt{24}。$$

故

$$iz=\mathrm{Ln}\left(5\pm\sqrt{24}\right)=\ln\left(5\pm\sqrt{24}\right)+i2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}。$$

因此，有

$$z=2k\pi-i\ln\left(5\pm\sqrt{24}\right),\quad k\in\mathbb{Z}。$$

17. 证明 $f(z)=e^{\bar{z}}$ 不是 z 的解析函数。

证： 令 $z=x+iy$，则

$$f(x)=u+iv=e^{x-iy}=e^x(\cos y-i\sin y)。$$

于是

$$u=e^x\cos y,\ v=-e^x\sin y。$$

若 $f(z)=e^{\bar{z}}$ 是 z 的解析函数，则 u,v 满足 $C-R$ 条件。即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y=\dfrac{\partial v}{\partial y}=-e^x\cos y\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos y=0\\ \sin y=0\end{cases}。$$

但$\cos y$ 和 $\sin y$ 不可能同时为 0。 矛盾。故 $f(z)=e^{\bar{z}}$ 不是 z 的解析函数。

18. 由 $z=\sin w$ 及 $z=\cos w$ 所定义的函数 w 分别称为 z 的反正弦函数及反余弦函数，求出它们的解析表达式。

解：由正弦函数的定义， 有

$$z=\sin w=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}w}-e^{-\mathrm{i}w}\right)。$$

于是， $e^{2\mathrm{i}w}-2\mathrm{i}ze^{\mathrm{i}w}-1=0$。

解得

$$e^{\mathrm{i}w}=\mathrm{i}z\pm\sqrt{1-z^2}=\mathrm{i}z+\sqrt{1-z^2}。$$

利用对数的定义，得

$$\mathrm{i}w=\mathrm{Ln}\left(\mathrm{i}z+\sqrt{1-z^2}\right)。$$

故

$$w=-\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}\left(\mathrm{i}z+\sqrt{1-z^2}\right)。$$

即

$$\mathrm{Arcsin}\,z=-\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}\left(\mathrm{i}z+\sqrt{1-z^2}\right)。$$

同理，可得

$$\mathrm{Arccos}\,z=-\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)。$$

19. 证明如下恒等式。

(1) $\cos^2 z+\sin^2 z=1$；

证： $\cos^2 z+\sin^2 z=\left(\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2$

$$=\frac{1}{4}\left[\left(e^{i2z}+2+e^{-i2z}\right)-\left(e^{i2z}-2+e^{-i2z}\right)\right]$$
$=1$。

(2) $\text{ch}\left(z_1+z_2\right)=\text{ch}\, z_1\ \text{ch}\, z_2+\text{sh}\, z_1\ \text{sh}\, z_2$;

证： $\text{ch}\, z_1\ \text{ch}\, z_2+\text{sh}\, z_1\ \text{sh}\, z_2$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{z_1}+e^{-z_1}\right)\frac{1}{2}\left(e^{z_2}+e^{-z_2}\right)+\frac{1}{2}\left(e^{z_1}-e^{-z_1}\right)\frac{1}{2}\left(e^{z_2}-e^{-z_2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left[e^{z_1+z_2}+e^{-\left(z_1+z_2\right)}\right]$$
$=\text{ch}\left(z_1+z_2\right)$。

(3) $\text{sh}\left(z_1+z_2\right)=\text{sh}\, z_1\ \text{ch}\, z_2+\text{ch}\, z_1\ \text{sh}\, z_2$;

证： $\text{sh}\, z_1\ \text{ch}\, z_2+\text{ch}\, z_1\ \text{sh}\, z_2$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{z_1}-e^{-z_1}\right)\frac{1}{2}\left(e^{z_2}+e^{-z_2}\right)+\frac{1}{2}\left(e^{z_1}+e^{-z_1}\right)\frac{1}{2}\left(e^{z_2}-e^{-z_2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left[e^{z_1+z_2}-e^{-\left(z_1+z_2\right)}\right]$$
$=\text{sh}\left(z_1+z_2\right)$ 。

(4) $\text{ch}^2 z-\text{sh}^2 z=1$。

证： $\mathrm{ch}^2 z-\mathrm{sh}^2 z=\left(\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}\right)^2=1$ 。

20. 说明下列等式是否正确。

(1) $\ln z^2=2\ln z$;

(2) $\ln\sqrt{z}=\dfrac{1}{2}\ln z$ 。

解： (1) 不正确。例如：

$$\ln(-1)^2=\ln\left|(-1)^2\right|+\mathrm{i}\arg(-1)^2=0,\ 2\ln(-1)=2\left(\ln|-1|+\mathrm{i}\pi\right)=\mathrm{i}2\pi$$

。

$\ln(-1)^2\neq 2\ln(-1)$。

(2) 不正确。例如：

$$\ln\sqrt{-1}=\ln\left|\sqrt{-1}\right|+\mathrm{i}\arg\sqrt{-1}=\mathrm{i}\arg\sqrt{-1};$$

而

$$\sqrt{-1}=(-1)^{\frac{1}{2}}=\left|\sqrt{-1}\right|e^{\frac{\mathrm{i}(\arg(-1)+2k\pi)}{2}}=e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)},\ k=0,1。$$

$\therefore \arg\sqrt{-1}$有两值：$\dfrac{\pi}{2}$ 或$-\dfrac{\pi}{2}$。于是$\ln\sqrt{-1}=\mathrm{i}\dfrac{\pi}{2}$或$-\mathrm{i}\dfrac{\pi}{2}$。

但 $\dfrac{1}{2}\ln(-1)=\dfrac{1}{2}\left(\ln|-1|+\mathrm{i}\arg(-1)\right)=\mathrm{i}\dfrac{\pi}{2}$;

故

$$\ln\sqrt{-1}\neq\frac{1}{2}\ln(-1)$$ 。