习题三

1. 沿下列路径计算积分$\int_0^{3+\mathrm{i}} z^2\mathrm{d}z$。

(1) 自原点到$3+\mathrm{i}$的直线段;

(2) 自原点沿实轴至 3，再由 3 垂直向上至$3+\mathrm{i}$。

(3) 自原点沿虚轴至 i，再由 i 水平向右至$3+\mathrm{i}$。

解：(1) $\int_0^{3+\mathrm{i}} z^2\mathrm{d}z=\int_0^1 t^2\left(3+\mathrm{i}\right)^3\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\left(3+\mathrm{i}\right)^3$。

(2) $\int_0^{3+\mathrm{i}} z^2\mathrm{d}z=\int_0^3 x^2\mathrm{d}x+\int_0^1\left(3+\mathrm{i}y\right)^2\mathrm{i}\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\left(3+\mathrm{i}\right)^3$。

(3) $\int_0^{3+\mathrm{i}} z^2\mathrm{d}z=\int_0^1\left(\mathrm{i}y\right)^2\mathrm{i}\mathrm{d}y+\int_0^3\left(x+\mathrm{i}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left(3+\mathrm{i}\right)^3$。

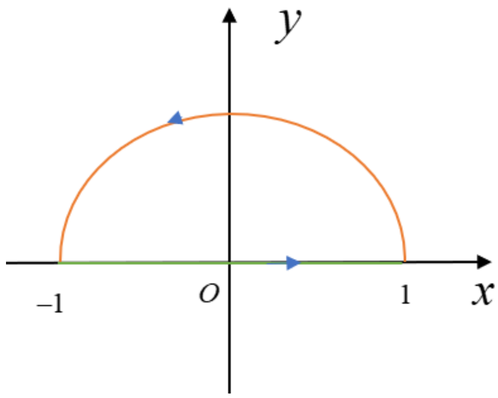
2. 分别沿 $y=x$ 与 $y=x^2$ 算出积分 $\int_0^{1+\mathrm{i}}\left(x^2+\mathrm{i}y\right)\mathrm{d}z$ 的值。

解：(1) $\int_0^{1+\mathrm{i}}\left(x^2+\mathrm{i}y\right)\mathrm{d}z=\int_0^1\left(x^2+\mathrm{i}x\right)\left(1+\mathrm{i}\right)\mathrm{d}x=\left(1+\mathrm{i}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=-\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\mathrm{i}$。

(2) $\int_0^{1+\mathrm{i}}\left(x^2+\mathrm{i}y\right)\mathrm{d}z=\int_0^1\left(x^2+\mathrm{i}x^2\right)\left(1+2x\mathrm{i}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\mathrm{i}$。

3. 计算下列积分。

(1) $\oint_C |z|\,\bar{z}\,\mathrm{d}z$，其中 C 是一条闭曲线，由直线段：$-1\le x\le 1, y=0$ 与上半单位圆周组成，取逆时针方向。



解：$\oint_C |z|\,\bar{z}\,\mathrm{d}z=\int_0^{\pi}1\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta+\int_{-1}^1|x|\,x\,\mathrm{d}x$

$$=\pi \mathrm{i}。$$

(2) $\oint\limits_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z}$; $\oint\limits_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{|z|}$; $\oint\limits_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}s}{z}$; $\oint\limits_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}s}{|z|}$。

解： $\oint\limits_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z}=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta}{e^{\mathrm{i}\theta}}=2\pi \mathrm{i}$ 。

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{|z|}=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta}{\left|e^{\mathrm{i}\theta}\right|}=\int_0^{2\pi}\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta=0\text{ 。}$$

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}s}{z}=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{e^{\mathrm{i}\theta}}=0\text{ 。}$$

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}s}{|z|}=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1}=2\pi\text{ 。}$$

(3) $\int\limits_{1-\mathrm{i}}^{3+2\mathrm{i}}\left(2z^2-5z+1\right)\mathrm{d}z$， 积分曲线是由$1-\mathrm{i}$到$3+2\mathrm{i}$的直线段。

解： $\int\limits_{1-\mathrm{i}}^{3+2\mathrm{i}}\left(2z^2-5z+1\right)\mathrm{d}z=\left(\frac{2}{3}z^3-\frac{5}{2}z^2+z\right)\Big|_{1-\mathrm{i}}^{3+2\mathrm{i}}=-\frac{91}{6}-48\mathrm{i}$ 。

(4) $\int\limits_{-1}^{\mathrm{i}}\frac{1}{z^2+z-2}\mathrm{d}z$， 积分曲线是由$-1$到$\mathrm{i}$的直线段。

解： $\int\limits_{-1}^{\mathrm{i}}\frac{1}{z^2+z-2}\mathrm{d}z=\frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{\mathrm{i}}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+2}\right)\mathrm{d}z=\frac{1}{3}\left[\ln(z-1)-\ln(z+2)\right]\Big|_{-1}^{\mathrm{i}}$

$$=\frac{1}{3}\left[\ln(\mathrm{i}-1)-\ln(-1-1)-\ln(\mathrm{i}+2)+\ln(-1+2)\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[\ln(\mathrm{i}-1)-\ln(-2)-\ln(\mathrm{i}+2)\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left[\ln\sqrt{2}+\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}-\ln 2-\mathrm{i}\pi-\ln\sqrt{5}-\mathrm{i}\arctan\frac{1}{2}\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2}\ln 10+\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{2}\right)\right]。$$

4. 是否有等式 $\mathrm{Re}\left(\int_C f(z)\mathrm{d}z\right)=\int_C \mathrm{Re}\left[f(z)\right]\mathrm{d}z$？

解： 一般不成立，例如 $f(z)=z,\ C: z=\mathrm{i}t,\ 0\le t\le 1$。有

$$\mathrm{Re}\left(\int_C f(z)\mathrm{d}z\right)=\mathrm{Re}\left(\int_0^1 \mathrm{i}t\cdot i\ \mathrm{d}t\right)=-\frac{1}{2}。$$

$$\int_C \mathrm{Re}\left[f(z)\right]\mathrm{d}z=\int_C \mathrm{Re}(\mathrm{i}t)\ \mathrm{d}z=0。$$

可见

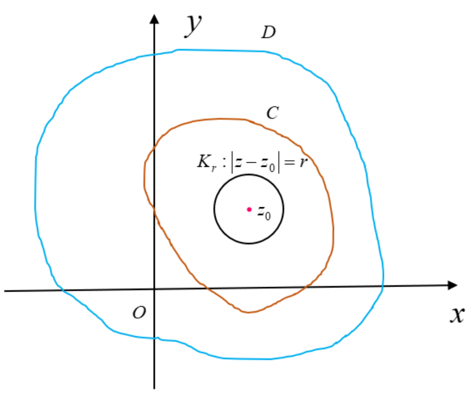
$$\mathrm{Re}\left(\int_C f(z)\mathrm{d}z\right)\ne\int_C \mathrm{Re}\left[f(z)\right]\mathrm{d}z。$$

5. 设 $f(z)$在单连通区域 D 内除 z_0 外处处解析，且

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=M\quad(M\in\mathbb{C}),$$

则对于任一属于 D 且围绕 z_0 的简单光滑闭曲线 C，恒有

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=M。$$



证： 设 $f(z)$在单连通区域 D 内除 z_0

外处处解析，且

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=M\ \ (M\in\mathbb{C})。$$

于是，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $0<|z-z_0|<\delta$

时，有

$$|(z-z_0)f(z)-M|<\varepsilon\ 。\qquad\qquad (*)$$

对于任一属于 D 且围绕 z_0 的简单光滑闭曲线 C，在 C 内作圆周

$$K_r:|z-z_0|=r,$$

使得 $r<\delta$。由复合闭路定理及$(*)$，得

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z-M\right|&=\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{K_r} f(z)\,\mathrm{d}z-M\right|\\&=\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{K_r} f(z)\,\mathrm{d}z-M\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{K_r}\frac{1}{z-z_0}\,\mathrm{d}z\right|\\&=\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{K_r}\frac{(z-z_0)f(z)-M}{z-z_0}\,\mathrm{d}z\right|\\&\le\frac{1}{2\pi}\oint_{K_r}\frac{|(z-z_0)f(z)-M|}{|z-z_0|}\,\mathrm{d}S\\&<\frac{1}{2\pi}\cdot\varepsilon\cdot\oint_{K_r}\frac{1}{r}\,\mathrm{d}S\\&=\varepsilon\ 。\end{aligned}$$

由 ε 的任意性，知

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=M。$$

6. 设 $f(z)=\oint_{|\zeta|=3}\frac{3\zeta^2+7\zeta+1}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$，求 $f'(1+\mathrm{i})$，$f(3(1+\mathrm{i}))$。

解： $f(z)=\oint_{|\zeta|=3}\frac{3\zeta^2+7\zeta+1}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$

$$=\begin{cases}2\pi\mathrm{i}\left(3z^2+7z+1\right), & |z|<3;\\ 0, & |z|>3。\end{cases}$$

故

$$f'(1+\mathrm{i})=2\pi\mathrm{i}\left(3z^2+7z+1\right)'\Big|_{z=1+\mathrm{i}}=2\pi\mathrm{i}\left[6(1+\mathrm{i})+7\right]=2\pi\mathrm{i}(13+6\mathrm{i})。$$

$$f\left(3(1+\mathrm{i})\right)=0。$$

7. 直接得出下列积分的结果，并说明理由。

(1) $\oint_{|z|=1}\frac{3z+5}{z^2+2z+4}\,\mathrm{d}z$;

解： z^2+2z+4的零点$-1\pm\mathrm{i}\sqrt{3}$在$|z|\le 1$外，故函数$f(z)=\frac{3z+5}{z^2+2z+4}$在$|z|\le 1$处处解析。由柯西积分定理，知

$$\oint_{|z|=1}\frac{3z+5}{z^2+2z+4}\,\mathrm{d}z=0。$$

(2) $\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{e}^z}{\cos z}\,\mathrm{d}z$;

解： 注意到$\cos z=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)=0\Leftrightarrow\mathrm{e}^{\mathrm{i}2z}=-1\Leftrightarrow z=z_k=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$。

但是$|z_k|>1$。故函数$f(z)=\frac{\mathrm{e}^z}{\cos z}$在$|z|\le 1$处处解析。由柯西积分定理，

知

$$\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{\cos z}\,dz=0\text{。}$$

8. 沿指定闭曲线的正向计算下列各积分。

(1) $\oint_C \frac{e^z}{z-2}\,dz,\ C:|z-2|=1;$

解： $\oint_{|z-2|=1}\frac{e^z}{z-2}\,dz=2\pi i\,e^z\Big|_{z=2}=2\pi e^2 i$。

(2) $\oint_C \frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}\,dz,\ C:|z|=2;$

解： $\oint_{|z|=2}\frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}\,dz=2\pi i(\sin z)'\Big|_{z=\frac{\pi}{2}}=0$。

(3) $\oint_C \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)},\ C:|z|=\frac{3}{2};$

解： $\oint_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}=\oint_{|z-i|=\frac{1}{4}}\frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}+\oint_{|z+i|=\frac{1}{4}}\frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}$

$$=\oint_{|z-i|=\frac{1}{4}}\frac{\frac{dz}{(z+i)(z^2+4)}}{z-i}+\oint_{|z+i|=\frac{1}{4}}\frac{\frac{dz}{(z-i)(z^2+4)}}{z+i}$$

$$=2\pi i\left[\frac{1}{(z+i)(z^2+4)}\right]_{z=i}+2\pi i\left[\frac{1}{(z-i)(z^2+4)}\right]_{z=-i}$$

$=0$ 。

(4) $\oint_C \frac{e^z}{(z-a)^3}dz$，其中 a 为 $|a|\neq 1$ 的任何复数，C：$|z|=1$；

解： 当 $|a|<1$ 时，有

$$\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{(z-a)^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}\left(e^z\right)''\Big|_{z=a}=\pi e^a i\text{。}$$

当 $|a|>1$ 时，有

$$\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{(z-a)^3}dz=0\text{。}$$

(5) $\oint_C \frac{3z+2}{z^4-1}dz$，$C:\left|z-(1+i)\right|=\sqrt{2}$ 。

解： 注意到 $z^4-1=0 \Leftrightarrow z=\pm 1,\ \pm i$。这些零点仅 $z=1$ 和 $z=i$ 在 C 内。

故

$$\oint_C \frac{3z+2}{z^4-1}dz=\oint_{|z-1|=0.1}\frac{3z+2}{z^4-1}dz+\oint_{|z-i|=0.1}\frac{3z+2}{z^4-1}dz$$

$$=\oint_{|z-1|=0.1}\frac{\frac{3z+2}{(z+1)(z^2+1)}}{z-1}dz+\oint_{|z-i|=0.1}\frac{\frac{3z+2}{(z+i)(z^2-1)}}{z-i}dz$$

$$=2\pi i\left(\frac{3+2}{(1+1)(1^2+1)}+\frac{3i+2}{(i+i)(i^2-1)}\right)=\pi i(1+i)=\pi(-1+i)\text{。}$$

9. 计算积分$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z+2}$，其中$C$是圆周$|z|=1$正向，并由此证明：

$$\int_0^{\pi} \frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = 0。$$

解： 函数$f(z)=\frac{1}{z+2}$在$|z|\le 1$解析，故

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z+2} = 0。$$

另一方面，将圆周$|z|=1$正向写成参数方程$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$-\pi\le\theta\le\pi$，有

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z+2} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}\,\mathrm{d}\theta}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+2} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(-\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta)}{(\cos\theta+2)+\mathrm{i}\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(-\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta)\left[(\cos\theta+2)-\mathrm{i}\sin\theta\right]}{\left[(\cos\theta+2)+\mathrm{i}\sin\theta\right]\left[(\cos\theta+2)-\mathrm{i}\sin\theta\right]}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\sin\theta(\cos\theta+2)+\cos\theta\sin\theta+\mathrm{i}\left[(\cos\theta+2)\cos\theta+\sin^2\theta\right]}{5+4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{i}\left[(\cos\theta+2)\cos\theta+\sin^2\theta\right]}{5+4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{i}(1+2\cos\theta)}{5+4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta。
\end{aligned}$$

因此， 有

$$\int_0^{\pi} \frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = 0。$$

10. 如果多项式$Q(z)$比多项式$P(z)$的次数至少高 2 次，证明：

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{|z|=R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z = 0。$$

证： 设 $\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0}{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_1 z+b_0}$，$a_n\neq 0,\ b_m\neq 0,\ m-n\geq 2$。于是，有

$$\begin{aligned}\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right|&=\left|\frac{a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0}{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_1 z+b_0}\right|\\&=\frac{1}{|z|^{m-n}}\frac{\left|a_n+a_{n-1}\frac{1}{z}+\cdots+a_1\frac{1}{z^{n-1}}+a_0\frac{1}{z^n}\right|}{\left|b_m+b_{m-1}\frac{1}{z}+\cdots+b_1\frac{1}{z^{m-1}}+b_0\frac{1}{z^m}\right|}\\&\leq\frac{1}{|z|^{m-n}}\frac{|a_n|+\left|a_{n-1}\frac{1}{z}+\cdots+a_1\frac{1}{z^{n-1}}+a_0\frac{1}{z^n}\right|}{|b_m|-\left|b_{m-1}\frac{1}{z}+\cdots+b_1\frac{1}{z^{m-1}}+b_0\frac{1}{z^m}\right|}。\end{aligned}$$

注意到

$$\lim_{z\to\infty}\left|a_{n-1}\frac{1}{z}+\cdots+a_1\frac{1}{z^{n-1}}+a_0\frac{1}{z^n}\right|=0,$$
$$\lim_{z\to\infty}\left|b_{m-1}\frac{1}{z}+\cdots+b_1\frac{1}{z^{m-1}}+b_0\frac{1}{z^m}\right|=0。$$

从而，当 $R=|z|$ 充分大以后，有

$$\left|a_{n-1}\frac{1}{z}+\cdots+a_1\frac{1}{z^{n-1}}+a_0\frac{1}{z^n}\right|<\frac{|a_n|}{2},$$
$$\left|b_{m-1}\frac{1}{z}+\cdots+b_1\frac{1}{z^{m-1}}+b_0\frac{1}{z^m}\right|<\frac{|b_m|}{2}。$$

于是

$$\left|\oint_{|z|=R}\frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z\right|\leq\oint_{|z|=R}\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right|\mathrm{d}S<\oint_{|z|=R}\frac{1}{R^{m-n}}\frac{|a_n|+\frac{|a_n|}{2}}{|b_m|-\frac{|b_m|}{2}}\,\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{R^{m-n}}\frac{\frac{3|a_n|}{2}}{\frac{|b_m|}{2}}2\pi R=\frac{1}{R^{m-n-1}}\frac{6\pi|a_n|}{|b_m|}<\frac{1}{R}\frac{6\pi|a_n|}{|b_m|}\to 0,\ R\to\infty。$$

即

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{|z|=R}\frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z=0。$$

11. 设 $f(z)$与 $g(z)$在区域 D 内处处解析，C 为 D 内一条正向的简单光滑闭曲线，它的内部含于 D。如果 $f(z) = g(z)$在 C 上所有点都成立。证明在 C 的内部所有点处 $f(z) = g(z)$也成立。

证：设 $f(z)$与 $g(z)$在区域 D 内处处解析，C 为 D 内一条正向的简单光滑闭曲线，它的内部含于 D。于是，$f(z)$与 $g(z)$在 C 上及 C 内处处解析。由柯西积分公式，在 C 的内部点 z 处，如果 $f(\zeta)=g(\zeta)$在 C 上所有点 ζ 都成立，有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta=g(z)。$$

12. 设函数 $f(z)$在区域 D 内除去点 z_0 外处处解析，又设

$$g(z)=(z-z_0)^n f(z)\ (z\neq z_0),\quad n=1,2,\cdots。$$

若函数 $g(z)$ 在区域 D 内解析。对于 D 内任一条围绕 z_0 的正向的简单光滑闭曲线 C，证明：

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=\frac{2\pi\mathrm{i}}{(n-1)!}g^{(n-1)}(z_0)。$$

证：由解析函数的高阶导数公式，有

$$g^{(n-1)}(z_0)=\frac{(n-1)!}{2\pi i}\oint_C \frac{g(z)}{(z-z_0)^n}\,dz=\frac{(n-1)!}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz。$$

故

$$\oint_C f(z)\,dz=\frac{2\pi i}{(n-1)!}g^{(n-1)}(z_0)。$$

13. 设 $f(z)$在单连通区域 D 内处处解析，且不为零，C 为 D 内任一条正向的简单光滑闭曲线。问：积分$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$是否为零？为什么？

解： $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=0$。

由于 $f(z)$在单连通区域 D 内处处解析，且不为零。故$\frac{f'(z)}{f(z)}$ 在单连通区域 D 内处处解析。对于 D 内任一条正向的简单光滑闭曲线 C，由柯西积分定理，有

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=0。$$

14. 设函数 $f(z)$在$0<|z|<1$内解析，且沿任何圆周$|z|=r,\ 0<r<1$的积分为零，那末 $f(z)$是否比须在$z=0$解析？肯定请给出证明，否定请举出反例。

解： 否定。

如函数$f(z)=\frac{1}{z^2}$在$0<|z|<1$内解析，且沿任何圆周$|z|=r,\ 0<r<1$的积分为零，但函数$f(z)=\frac{1}{z^2}$在$z=0$处不解析。

15. 若函数 $f(z)$在 z 平面解析，且有界，则 $f(z)$一定恒为常数。

证： 由题设，$\exists M>0$， 使

$$\left|f(z)\right|\le M,\ \forall z\in\mathbb{C}\text{。}$$

$\forall z_0\in\mathbb{C}$，作以 z_0 为心，任意正数 r 为半径的正向圆周 Γ_r。由解析函数的导数公式，有

$$\begin{aligned}\left|f'(z)\right| &= \left|\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{\Gamma_r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma_r}\frac{\left|f(z)\right|}{\left|z-z_0\right|^2}\mathrm{d}s \\ &\le \frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma_r}\frac{M}{r^2}\mathrm{d}s=\frac{M}{r}\text{。}\end{aligned}$$

上式对 $\forall r>0$ 均成立。于是令 $r\to\infty$， 有

$$f'(z_0)=0\text{。}$$

由 z_0 的任意性，知

$$f'(z)=0,\ \forall z\in\mathbb{C}\text{。}$$

故

$$f(z)=\text{常数},\ \forall z\in\mathbb{C}\text{。}$$

16. 设函数 $f(z)$在正向简单闭曲线 C 上及内部 D 处处解析， $z_0\in D$，证明

$$\oint_C\frac{f'(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z=\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z\text{。}$$

证： 设函数 $f(z)$在正向简单闭曲线 C 上及内部 D 处处解析，则函数 $f'(z)$也在正向简单闭曲线 C 上及内部 D 处处解析。对于$\forall z_0\in D$，由柯西积分公式，有

$$\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i}\, f'(z_0)\text{。}$$

再由高阶导数公式，得

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i}\, f'(z_0)\text{。}$$

可见

$$\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z\text{。}$$

17. 设函数 $f(z)$在$|z|<1$内解析， 并且$|f(z)|\le \frac{1}{1-|z|}$，证明

$$\left|f^{(n)}(0)\right| \le \frac{n!(n+1)^{n+1}}{n^n},\ n=1,2,\cdots\text{。}$$

证： 设函数 $f(z)$在$|z|<1$内解析，由高阶导数公式，得

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z,\quad 0<r<1\text{。}$$

取$r=\frac{n}{n+1}$，注意到$|f(z)|\le \frac{1}{1-|z|}$，有

$$\left|f^{(n)}(0)\right| \le \frac{n!}{2\pi} \oint_{|z|=\frac{n}{n+1}} \left|\frac{f(z)}{z^{n+1}}\right| \mathrm{d}s$$

$$\le \frac{n!}{2\pi} \oint_{|z|=\frac{n}{n+1}} \left|\frac{\frac{1}{1-\frac{n}{n+1}}}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}}\right| \mathrm{d}s$$

$$=\frac{n!}{2\pi}\frac{(n+1)^{n+2}}{n^{n+1}}\oint_{|z|=\frac{n}{n+1}}\mathrm{d}s$$

$$=\frac{n!}{2\pi}\frac{(n+1)^{n+2}}{n^{n+1}}2\pi\frac{n}{n+1}=\frac{n!(n+1)^{n+1}}{n^n},\ n=1,2,\cdots。$$

18. 称 $P_n(z)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}(z^2-1)^n$ 是 Legendre 多项式。证明 Legendre 多项式有如下的积分表示

$$P_n(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{(\zeta^2-1)^n}{2^n(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,$$

其中 C 是任意内部包含点 z 的简单闭曲线。

证： 注意到函数 $f(z)=(z^2-1)^n$ 在 z 平面上处处解析，由高阶导数公式，有

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{(\zeta^2-1)^n}{2^n(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2^n}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{(\zeta^2-1)^n}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$
$$=\frac{1}{2^n}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{2\pi\mathrm{i}}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\zeta^n}\left((\zeta^2-1)^n\right)\Big|_{\zeta=z}$$
$$=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}(z^2-1)^n。$$

19. 设 C 为一内部包含实轴上线段 $[a,b]$ 的简单光滑闭曲线。函数 $f(z)$ 在 C 内及其上解析且在 $[a,b]$ 上取实值。证明对于任意两点 $z_1,z_2\in[a,b]$,

总有点$z_0\in[a,b]$使

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}\mathrm{d}z=\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z\ 。$$

证: 设 C 为一内部包含实轴上线段$[a,b]$的简单光滑闭曲线。函数$f(z)$在 C 内及其上解析且在$[a,b]$上取实值。对于任意两点$z_1,z_2\in[a,b]$，在 C 内作两个分别包含 z_1 和 z_2 的小圆周C_1和C_2，它们互不相交也互不包含。由复合闭路定理， 有

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}\mathrm{d}z&=\oint_{C_1}\frac{\frac{f(z)}{z-z_2}}{z-z_1}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{\frac{f(z)}{z-z_1}}{z-z_2}\mathrm{d}z\\&=2\pi\mathrm{i}\left(\frac{f(z_1)}{z_1-z_2}+\frac{f(z_2)}{z_2-z_1}\right)\\&=2\pi\mathrm{i}\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}。\end{aligned}\tag{1}$$

由于函数$f(z)$在 C 内解析且在$[a,b]$上取实值，从而$f(z)$在$[a,b]$上可导。对于$z_1,z_2\in[a,b]$，由数学分析中的 Lagrange 中值定理,$\exists z_0\in[a,b]$，使

$$f(z_2)-f(z_1)=f'(z_0)(z_2-z_1)。\tag{2}$$

再有柯西积分公式，有

$$f'(z_0)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z。\tag{3}$$

结合(1),(2),(3)，得

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}\mathrm{d}z=\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z\ 。$$

20. 设函数 $f(z)$ 在圆周 $C:|z|=R(>0)$ 上及内部 D 处处解析，对于任意的 $z\in D$，证明

① 函数 $g(\zeta)=\dfrac{R^2-z\overline{z}}{R^2-\zeta\overline{z}}f(\zeta)$ 在 C 上及内部解析;

② $f(z)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\dfrac{R^2-z\overline{z}}{(\zeta-z)\left(R^2-\zeta\overline{z}\right)}f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$。

证： 设函数 $f(z)$ 在圆周 $C:|z|=R(>0)$ 上及内部 D 处处解析。对于给定的 $z\in D$，及任意 ζ 在圆周 $C:|z|=R(>0)$ 上及内部 D，由于 $R^2-\zeta\overline{z}\neq 0$，函数 $g(\zeta)=\dfrac{R^2-z\overline{z}}{R^2-\zeta\overline{z}}f(\zeta)$ 在 C 上及内部解析。再由柯西积分公式，有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{R^2-z\overline{z}}{(\zeta-z)\left(R^2-\zeta\overline{z}\right)}f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\\
&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{\dfrac{R^2-z\overline{z}}{\left(R^2-\zeta\overline{z}\right)}f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta\\
&=\left.\frac{R^2-z\overline{z}}{\left(R^2-\zeta\overline{z}\right)}f(\zeta)\right|_{\zeta=z}\\
&=f(z)。
\end{aligned}$$

21. 设函数 $f(z)$在简单闭曲线 C 上及内部 D 处处解析且不为常数，n 为正整数。

(1) 对于任意的 $z\in D$，证明

$$\left[f(z)\right]^n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{\left[f(\zeta)\right]^n}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta。$$

(2) 设 $M=\max\limits_{\zeta\in C}\{|f(\zeta)|\}$, l 为 C 的长度， $d=\min\limits_{\zeta\in C}\{|\zeta-z|\}$。证明不等式

$$|f(z)|\le M\left(\frac{l}{2\pi d}\right)^{\frac{1}{n}}。$$

并进一步证明

$$|f(z)|\le M,\ z\in D。$$

证：设函数 $f(z)$在简单闭曲线 C 上及内部 D 处处解析且不为常数，n 为正整数。从而函数$\left[f(z)\right]^n$在简单闭曲线 C 上及内部 D 处处解析。

(1) 由柯西积分公式，有

$$\left[f(z)\right]^n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{\left[f(\zeta)\right]^n}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta。$$

(2) 利用(1)，得

$$\begin{aligned}|f(z)|^n&\le\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{|f(\zeta)|^n}{|\zeta-z|}\,\mathrm{d}S\le\frac{1}{2\pi}M^n\frac{1}{d}\oint_C\mathrm{d}S\\&=\frac{M^n l}{2\pi d}。\end{aligned}$$

从而，有

$$|f(z)|\le M\left(\frac{l}{2\pi d}\right)^{\frac{1}{n}},\ n=1,2,\cdots。$$

令 $n\to\infty$，得

$$\left|f\left(z\right)\right| \le M \lim_{n\to\infty}\left(\frac{l}{2\pi d}\right)^{\frac{1}{n}} = M$$ 。