习题四

1. (1) 设 $z_n=\frac{n-1}{n}+\mathrm{i}\frac{2n}{3n+1}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n$。

(2) 设 $z_n=1+\frac{\mathrm{i}}{n}$, $z_n'=\frac{n-1}{n}+\mathrm{i}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n\pm z_n'$, $\lim\limits_{n\to\infty}z_n\cdot z_n'$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{z_n}{z_n'}$。

解： (1) $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}+\mathrm{i}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{3n+1}=1+\frac{2}{3}\mathrm{i}$。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}z_n'=1+\mathrm{i}$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(z_n\pm z_n'\right)=1\pm(1+\mathrm{i})$;

$\lim\limits_{n\to\infty}z_n\cdot z_n'=\lim\limits_{n\to\infty}z_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}z_n'=1+\mathrm{i}$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{z_n}{z_n'}=\frac{1}{1+\mathrm{i}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$。

2. 确定下列复数项级数的敛散性。

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-\mathrm{i})^{2n}}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{\mathrm{i}}{2^n}\right)$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n}$

解： (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-\mathrm{i})^{2n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-2\mathrm{i})^n}==\frac{-\frac{1}{2\mathrm{i}}}{1-\left(-\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)}=\frac{1}{5}(-1+2\mathrm{i})$。收敛。

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{\mathrm{i}}{2^n}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\mathrm{i}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$。因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故原级数发散。

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k}+\mathrm{i}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$。因 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k}$ 和 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$ 都收敛，故原级数收敛。

3. 证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n-1+\mathrm{i}}$收敛，但不绝对收敛。

证： 因$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n-1+\mathrm{i}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n-1}{(n-1)^2+1}+\mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{(n-1)^2+1}$，而

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n-1}{(n-1)^2+1}$条件收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{(n-1)^2+1}$ 绝对收敛。故原级数条件收敛。

4. 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(1-z^n)(1-z^{n+1})}(|z|\neq 1)$的和函数。

解： 由于

$$\begin{aligned}S_n(z)&=\sum_{k=1}^{n}\frac{z^k}{(1-z^k)(1-z^{k+1})}=\frac{1}{1-z}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{z^k}{1-z^k}-\frac{z^{k+1}}{1-z^{k+1}}\right]\\&=\frac{1}{1-z}\left[\left(\frac{z}{1-z}-\frac{z^2}{1-z^2}\right)+\left(\frac{z^2}{1-z^2}-\frac{z^3}{1-z^3}\right)+\cdots+\left(\frac{z^n}{1-z^n}-\frac{z^{n+1}}{1-z^{n+1}}\right)\right]\\&=\frac{z}{(1-z)^2}-\frac{z^{n+1}}{(1-z)(1-z^{n+1})}。\end{aligned}$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(1-z^n)(1-z^{n+1})}=\begin{cases}\frac{z}{(1-z)^2}, & |z|<1;\\ \frac{1}{(1-z)^2}, & |z|>1。\end{cases}$$

5. 下列结论是否正确？为什么？

(1) 每一个幂级数在其收敛圆内与收敛圆上均收敛；

(2) 每一个幂级数收敛于一个解析函数；

(3) 每一个在点z_0连续的函数一定可以在点z_0的某一邻域内展开成泰勒级数；

(4) 每一个在点z_0处可导的函数一定可以在点z_0的某一邻域内展开成泰勒级数。

解： (1) 不正确。例如：幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$在$|z|<1$内收敛于$\frac{1}{1-z}$，但在收敛圆$|z|=1$上的$z=1$发散。

(2) 不正确。例如：幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$仅在$z=0$收敛，从而它不收敛于任一个解析函数。

(3) 不正确。例如：函数$f(z)=\bar{z}=x-yi$在点$z=0$连续，但它处处不可导。从而它在$z=0$的邻域内不能展开成泰勒级数。

(4) 不正确。例如：函数$f(z)=|z|^2=x^2+y^2$在点$z=0$可导，但它除$z=0$外处处不可导。从而它在$z=0$的邻域内不能展开成泰勒级数。

6. 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n$能否在$z=0$收敛而在$z=3$发散？

解 1： 不能。由于幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n$在$z=0$收敛，说明幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$在$z=-2$收敛。因而幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$的收敛半径$R\geq 2$。若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n$

在 $z=3$ 发散，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 在 $z=1$ 发散，这与幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 的收敛半径 $R\geq 2$ 矛盾。故幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-2)^n$ 在 $z=3$ 收敛。

解 2： 不能。由于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-2)^n$ 在 $z=0$ 收敛，说明 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-2)^n$ 的收敛半径 $R\geq|0-2|=2$。而 $3\in\{z\in\mathbb{C}:|z-2|<2\}$，故幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-2)^n$ 在 $z=3$ 收敛。

7. 若函数 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 内解析，且 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$，$|z|<R$。证明：

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\operatorname{Re}f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{\mathrm{i}}{\pi r^n}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\operatorname{Im}f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

这里 $0<r<R,\ n=1,2,\cdots$。

证： 当 $n\geq 1$ 时，函数 $f(\xi)\zeta^{n-1}$ 在 $|\xi|<R$ 内解析。由 Cauchy 定理，对 $0<r<R$ 有

$$0=\oint_{|\xi|=r}f(\zeta)\zeta^{n-1}\mathrm{d}\zeta=\int_0^{2\pi}f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^{n-1}\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\mathrm{i}r^n\int_0^{2\pi}f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta\ 。$$

从而

$$0=\frac{1}{2\pi r^{n}}\int_{0}^{2\pi}\overline{f\left(re^{i\theta}\right)e^{in\theta}d\theta}=\frac{1}{2\pi r^{n}}\int_{0}^{2\pi}\overline{f\left(re^{i\theta}\right)}e^{-in\theta}d\theta\text{。}$$

又

$$a_{n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{2\pi}\frac{f\left(re^{i\theta}\right)}{\left(re^{i\theta}\right)^{n+1}}ire^{i\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi r^{n}}\int_{0}^{2\pi}f\left(re^{i\theta}\right)e^{-in\theta}d\theta\text{。}$$

将上面二式相加，得

$$a_{n}=\frac{1}{2\pi r^{n}}\int_{0}^{2\pi}\left[f\left(re^{i\theta}\right)+\overline{f\left(re^{i\theta}\right)}\right]e^{-in\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{\pi r^{n}}\int_{0}^{2\pi}e^{-in\theta}\,\mathrm{Re}\,f\left(re^{i\theta}\right)d\theta\text{。}$$

再将上述结果应用于函数 $i f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}ia_{n}z^{n}$，则

$$ia_{n}=\frac{1}{\pi r^{n}}\int_{0}^{2\pi}e^{-in\theta}\,\mathrm{Re}\left[i f\left(re^{i\theta}\right)\right]d\theta=-\frac{1}{\pi r^{n}}\int_{0}^{2\pi}e^{-in\theta}\,\mathrm{Im}\left[f\left(re^{i\theta}\right)\right]d\theta\text{。}$$

$$\therefore a_{n}=\frac{1}{\pi r^{n}}\int_{0}^{2\pi}e^{-in\theta}\,\mathrm{Im}\left[f\left(re^{i\theta}\right)\right]d\theta\text{。}$$

8. 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}z^{n}$ 在它的收敛圆周 z_0 处绝对收敛，证明它在收敛圆周所围的闭区域上处处绝对收敛。

证： 设级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}z^{n}$ 在它的收敛圆周 z_0 处绝对收敛，则级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_{n}z_{0}{}^{n}\right|=\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_{n}\right|\left|z_{0}\right|^{n}$$

收敛。令$R=|z_0|$，对任意z, $|z|\le R$有

$$|a_nz^n|=|a_n||z|^n\le|a_n||z_0|^n。$$

由正项级数的比较判别法，知级数$\sum_{n=0}^{\infty}|a_nz^n|$收敛。即级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$在收敛圆周$|z|=R$所围的闭区域上处处绝对收敛。

9. 我们知道，函数$\frac{1}{1+x^2}$当x为任何实数时，都有确定的值，而且是可导的。但它的泰勒展开式：$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots$ 却只当$|x|<1$时成立，通过研究函数$\frac{1}{1+z^2}$试说明其原因。

解： 函数$\frac{1}{1+z^2}$在$\mathbb{C}$上仅有两个奇点$z=\pm\mathrm{i}$。根据泰勒展开定理，它在$z=0$的泰勒展开式

$$\frac{1}{1+z^2}=1-z^2+z^4-\cdots+(-1)^nz^{2n}+\cdots \qquad (*)$$

的收敛半径$R=1$。因此当$|z|<1$时，$(*)$式成立。当$|z|>1$时，$(*)$式处处不成立，不然与收敛半径$R=1$矛盾。

特别把z限制在实轴上有

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^nx^{2n}+\cdots,\qquad |x|<1。\qquad (**)$$

当$|x|>1$时，$(**)$式不成立。

当$|x|=1$时，$(**)$式左边$=\frac{1}{2}$，右边$=1-1+1-1+\cdots$发散。故$|x|=1$时，$(**)$式不成立。

10. 证明如下不等式：

(1) 对于任意的$z\in\mathbb{C}$，有

$$\left|e^z-1\right|\le e^{|z|}-1\le|z|e^{|z|}。$$

(2) 当 $0<|z|<1$ 时，有

$$\frac{1}{4}|z|<\left|e^z-1\right|<\frac{7}{4}|z|。$$

证： 注意到

$$e^z=1+\frac{1}{1!}z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\cdots,\qquad |z|<\infty,$$

于是

(1) 对于任意的 $z\in\mathbb{C}$，有

$$\begin{aligned}
\left|e^z-1\right|&=\left|\frac{1}{1!}z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\cdots\right|\\
&\le\frac{1}{1!}|z|+\frac{1}{2!}|z|^2+\cdots+\frac{1}{n!}|z|^n+\cdots\\
&=\left(1+\frac{1}{1!}|z|+\frac{1}{2!}|z|^2+\cdots+\frac{1}{n!}|z|^n+\cdots\right)-1\\
&=e^{|z|}-1\\
&=|z|\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}|z|+\cdots+\frac{1}{n!}|z|^{n-1}+\cdots\right)\\
&\le|z|\left(1+\frac{1}{1!}|z|+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}|z|^{n-1}+\cdots\right)\\
&=|z|e^{|z|}。
\end{aligned}$$

(2) 当 $0<|z|<1$ 时，有

$$\begin{aligned}
\left|e^z-1\right|&=|z|\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}|z|+\cdots+\frac{1}{n!}|z|^{n-1}+\cdots\right)\\
&\le|z|\left[\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}+\cdots\right)-1\right]
\end{aligned}$$

$$=|z|(e-1)$$

$$\leq\frac{7}{4}|z|。$$

另一方面，有

$$\begin{aligned}
\left|e^{z}-1\right| &= |z|\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}|z|+\cdots+\frac{1}{n!}|z|^{n-1}+\cdots\right)\\
&\geq |z|\left(1-\frac{1}{2!}|z|-\cdots-\frac{1}{(n-1)!}|z|^{n-1}-\cdots\right)\\
&\geq |z|\left(1-\frac{1}{2!}-\cdots-\frac{1}{(n-1)!}-\cdots\right)\\
&= |z|\left(3-1-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-\cdots-\frac{1}{(n-1)!}-\cdots\right)\\
&= |z|(3-e)\\
&\geq \frac{1}{4}|z|。
\end{aligned}$$

因此，有

$$\frac{1}{4}|z|<\left|e^{z}-1\right|<\frac{7}{4}|z|。$$

11. 求下列函数在指定点 z_0 处的泰勒展开式，便指出它们的收敛半径。

(1) $\frac{1}{z^2}$，$z_0=-1$;

解： $\frac{1}{z^2}$ 的奇点是 $z=0$，故 $R=|0-(-1)|=1$，且

$$\frac{1}{z^2}=\frac{1}{1-(z+1)}\cdot\frac{1}{1-(z+1)}$$

$$=\left[1+(z+1)+(z+1)^2+\cdots\right]\left[1+(z+1)+(z+1)^2+\cdots\right]$$
$$=1+2(z+1)+3(z+1)^2+\cdots+n(z+1)^n+\cdots,\qquad |z+1|<1。$$

(2) $\dfrac{1}{4-3z}$, $z_0=1+\mathrm{i}$;

解： $\dfrac{1}{4-3z}$ 的奇点是 $z=\dfrac{4}{3}$，故 $R=\left|\dfrac{4}{3}-(1+\mathrm{i})\right|=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$，且

$$\frac{1}{4-3z}=\frac{1}{4-3(1+\mathrm{i})-3\left[z-(1+\mathrm{i})\right]}=\frac{1}{1-3\mathrm{i}-3\left[z-(1+\mathrm{i})\right]}$$
$$=\frac{1}{1-3\mathrm{i}}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{3\left[z-(1+\mathrm{i})\right]}{1-3\mathrm{i}}}$$
$$=\frac{1}{1-3\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{3\left[z-(1+\mathrm{i})\right]}{1-3\mathrm{i}}\right\}^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(1-3\mathrm{i})^{n+1}}\left[z-(1+\mathrm{i})\right]^n,\quad \left|z-(1+\mathrm{i})\right|<\frac{\sqrt{10}}{3}。$$

(3) $\dfrac{\mathrm{e}^{z^2}}{\cos z}$, $z_0=0$;

解： $\dfrac{\mathrm{e}^{z^2}}{\cos z}$ 离 $z=0$ 最近的奇点是 $z=\dfrac{\pi}{2}$，故 $R=\left|0-\dfrac{\pi}{2}\right|=\dfrac{\pi}{2}$，且

$$\frac{\mathrm{e}^{z^2}}{\cos z}=\frac{1+\dfrac{1}{1!}z^2+\dfrac{1}{2!}z^4+\cdots}{1-\dfrac{1}{2!}z^2+\dfrac{1}{4!}z^4-\cdots}=1+\frac{3}{2}z^2+\frac{29}{24}z^4+\cdots,\quad |z|<\frac{\pi}{2}。$$

(4) $\sin\dfrac{1}{1-z}$，$z_0=0$。

解： $\sin\dfrac{1}{1-z}$ 离 $z=0$ 最近的奇点是 $z=1$，故 $R=|0-1|=1$。

$$\sin\frac{1}{1-z}=\sin\left(1+\frac{z}{1-z}\right)=\sin1\cos\frac{z}{1-z}+\cos1\sin\frac{z}{1-z}\text{。}$$

又

$$\begin{aligned}\cos\frac{z}{1-z}&=1-\frac{1}{2!}\left(\frac{z}{1-z}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{z}{1-z}\right)^4-\cdots\\&=1-\frac{z^2}{2!}\left(1+z+z^2+\cdots\right)^2+\frac{z^4}{4!}\left(1+z+z^2+\cdots\right)^4-\cdots\\&=1-\frac{z^2}{2!}\left(1+2z+3z^2+\cdots\right)+\frac{z^4}{4!}\left(1+4z+10z^2+\cdots\right)-\cdots\\&=1-\frac{z^2}{2}-z^3-\frac{35}{24}z^4+\cdots\text{。}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\frac{z}{1-z}&=\frac{z}{1-z}-\frac{1}{3!}\left(\frac{z}{1-z}\right)^3+\cdots\\&=\left(z+z^2+z^3+z^4+\cdots\right)-\frac{z^3}{3!}\left(1+z+z^2+\cdots\right)^3+\cdots\\&=z+z^2+\frac{5}{6}z^3+\frac{1}{2}z^4+\cdots\text{。}\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\sin\frac{1}{1-z}&=\sin1\cos\frac{z}{1-z}+\cos1\sin\frac{z}{1-z}\\&=\sin1+(\cos1)z+\left(\cos1-\frac{1}{2}\sin1\right)z^2+\left(\frac{5}{6}\cos1-\sin1\right)z^3+\cdots,\quad |z|<1\text{。}\end{aligned}$$

注： 直接用

$$\sin\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{1-z}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{1}{1-z}\right)^5-\cdots$$

很难写出前几项。

12. 证明：(1) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛，但 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ 发散，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径为 1；

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径为 R。则 $\sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{Re}\, a_n) z^n$ 的收敛半径大于或等于 R。

证： (1) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $z=1$ 处收敛。由阿贝尔定理，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $|z|<1$ 内收敛，从而幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径 $R \geq 1$。另一方面，如 $R>1$，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $z=1$ 绝对收敛。这与 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ 发散矛盾。故 $R=1$。

(2) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径为 R。则对 $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z|<R$，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ 收敛。

注意到

$$\left|(\mathrm{Re}\, a_n) z^n\right| = |\mathrm{Re}\, a_n||z^n| \leq |a_n||z^n| = |a_n z^n|。$$

可见幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{Re}\, a_n) z^n$ 在 $|z|<R$ 内绝对收敛。从而 $\sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{Re}\, a_n) z^n$ 的收敛半径大于或等于 R。

13. 设 $f(z) = \dfrac{z-a}{z+a}$, $a \neq 0$，求 $\oint_C \dfrac{f(z)}{z^{n+1}}\, \mathrm{d}z$, $n \geq 0$，其中 C 为任一条包含原点且落在圆周 $|z|=|a|$ 内的简单光滑闭曲线。

解： $z=-a$ 是函数 $f(z)$ 的唯一奇点。故 $f(z)$ 在 $|z|<|a|$ 内解析，从而在 C 上及 C 内部解析。由于 C 包含原点，由高阶导数公式及泰勒展开定理可知

$$\oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z=\frac{2\pi\mathrm{i}}{n!}f^{(n)}(0)=2\pi\mathrm{i}c_n,\ n=0,1,2,\cdots,$$

其中 c_n 为 $f(z)$ 在 $|z|<|a|$ 内泰勒级数展开式的系数。

另一方面，在 $|z|<|a|$ 内有

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{z-a}{z+a}=1-\frac{2a}{z+a}\\&=1-2\frac{1}{1+\frac{z}{a}}\\&=1-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{a}\right)^n\\&=-1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2}{a^n}z^n。\end{aligned}$$

于是，有

$$c_n=\begin{cases}-1, & n=0;\\(-1)^{n+1}\dfrac{2}{a^n}, & n\geq 1。\end{cases}$$

因而，得

$$\oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z=\begin{cases}-2\pi\mathrm{i}, & n=0;\\(-1)^{n+1}\dfrac{4\pi\mathrm{i}}{a^n}, & n\geq 1。\end{cases}$$

14. 设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，$|z|<R$。记 $S_n(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$，证明：

(1) $S_n(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=r} f(\zeta)\dfrac{\zeta^{n+1}-z^{n+1}}{(\zeta-z)\zeta^{n+1}}\mathrm{d}\zeta, |z|<r<R$；

(2) $f(z)-S_n(z)=\dfrac{z^{n+1}}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=r}\dfrac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}(\zeta-z)}\mathrm{d}\zeta, |z|<r<R$。

证： (1) 设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$，$|z|<R$，则

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\ n=0,1,2,\cdots。$$

于是

$$\begin{aligned}
S_n(z)&=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n\\
&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta}\mathrm{d}\zeta+\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta^2}\mathrm{d}\zeta\right)z+\cdots+\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right)z^n\\
&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=r}f(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta}+\frac{z}{\zeta^2}+\frac{z^2}{\zeta^3}+\cdots+\frac{z^n}{\zeta^{n+1}}\right)\mathrm{d}\zeta\\
&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=r}f(\zeta)\left(\frac{\zeta^n+z\zeta^{n-1}+z^2\zeta^{n-2}+\cdots+z^n}{\zeta^{n+1}}\right)\mathrm{d}\zeta\\
&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=r}f(\zeta)\frac{\zeta^{n+1}-z^{n+1}}{(\zeta-z)\zeta^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\ |z|<r<R。
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2)\ f(z)-S_n(z)&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta-\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=r}f(\zeta)\frac{\zeta^{n+1}-z^{n+1}}{(\zeta-z)\zeta^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\\
&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=r}\frac{f(\zeta)\left(\zeta^{n+1}-\zeta^{n+1}+z^{n+1}\right)}{(\zeta-z)\zeta^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\\
&=\frac{z^{n+1}}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)\zeta^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\ |z|<r<R。
\end{aligned}$$

15. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 的收敛半径 $R>0$，其和函数为 $f(z)$，证明：

$$|a_n| \le \frac{M(r)}{r^n},\ n = 0,1,2,\cdots,$$

其中 $0 < r < R,\ M(r) = \max\limits_{0\le\theta\le 2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|$。

证： 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径 $R > 0$，其和函数为 $f(z)$。则

$$\begin{aligned}
|a_n| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right| \le \frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=r}\frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}}ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{M(r)}{r^{n+1}}\oint_{|z|=r}ds \\
&= \frac{M(r)}{r^n},\ n = 0,1,2,\cdots,
\end{aligned}$$

其中 $0 < r < R,\ M(r) = \max\limits_{0\le\theta\le 2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|$。

16. 若函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 均在圆盘 $|z| < R$ 内解析，且

$$g(0) \ne 0,\quad f(z)g(z) \equiv 0,\quad |z| < R$$

证明：$f(z) \equiv 0,\ |z| < R$。

证： 由 $g(0) \ne 0$，$f(0)g(0) = 0$，知

$$f(0) = 0。$$

又由

$$0 = \left[f(z)g(z)\right]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k f^{(k)}(z) g^{(n-k)}(z) + f^{(n)}(z)g(z),$$

有

$$0=\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_n^k f^{(k)}(0)g^{(n-k)}(0)+f^{(n)}(0)g(0)\text{。}\qquad(*)$$

下面利用数学归纳法证 $f^{(n)}(0)=0,\ n=0,1,2,\cdots$。

(i) 当$k=0$ 时, $f(0)=0$。命题为真。

(ii) 假设 $f^{(k)}(0)=0\ (0\le k\le n-1)$。由$(*)$式及$g(0)\ne0$必有 $f^{(n)}(0)=0$。

从而根据归纳原理，得

$$f^{(n)}(0)=0,\ n=0,1,2,\cdots\text{。}$$

再由泰勒展开定理，有

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\ z^n\equiv0,\ |z|<R\text{。}$$

17. (1) 若 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\ |z|<\infty$，且$M(r)\le kr^n$($k$ 为大于零的正数，n 为大于或等于 1 的自然数，$M(r)=\max\limits_{0\le\theta\le2\pi}\left|f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right|$)，证明：$f(z)$是一个次数至多为 n 的多项式。

(2) 若$P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0$是 n 次多项式,即$a_n\ne0,\ n\ge1$。证明：存在正常数 k 和$r_0>0$，使得当$|z|>r_0$时，有

$$|P(z)|\ge k|z|^n\text{。}$$

(3) 证明一个$n\ge1$次的多项式的值不可能对于一切 z 都相同。

证：(1) 设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n,\ |z|<\infty$，且 $M(r)=\max_{0\le\theta\le 2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|\le kr^n$ (k 为大于零的正数，n 为大于或等于 1 的自然数)。由上题知

$$|a_m|\le\frac{M(r)}{r^m}\le k\frac{1}{r^{m-n}}\to 0,\quad r\to\infty\quad (m>n)\text{。}$$

可见

$$a_{n+1}=a_{n+2}=\cdots=0\text{。}$$

因此，$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots a_nz^n$。它是一个次数至多为 n 的多项式。

(2) 设 $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0$， $a_n\ne 0,\ n\ge 1$ 是 n 次多项式，则有

$$\begin{aligned}|P(z)|&=\left|a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0\right|\\&=|z|^n\left|a_n+a_{n-1}\frac{1}{z}+\cdots a_0\frac{1}{z^n}\right|\\&\ge|z|^n\left(|a_n|-\left|a_{n-1}\frac{1}{z}+\cdots a_0\frac{1}{z^n}\right|\right)\text{。}\end{aligned}$$

注意到 $\lim_{z\to\infty}\left(|a_n|-\left|a_{n-1}\frac{1}{z}+\cdots a_0\frac{1}{z^n}\right|\right)=|a_n|>0$。故存在常数 $r_0>0$，使得当 $|z|>r_0$ 时，有

$$|a_n|-\left|a_{n-1}\frac{1}{z}+\cdots a_0\frac{1}{z^n}\right|\ge\frac{|a_n|}{2}$$

令 $k=\frac{|a_n|}{2}$，则有 $|P(z)|\ge k|z|^n$。

(3) 设有一个 $n\ge 1$ 次的多项式 $P(z)$ 的值对于一切 z 都相同。则

$$|P(z)|=l>0,\ \ \forall z\in\mathbb{C}\text{。}$$

另一方面，由(2)存在常数k和$r_0>0$，使得当$|z|>r_0$时，有

$$|P(z)|\geq k|z|^n。$$

这说明$\lim\limits_{z\to\infty}|P(z)|=\infty$。矛盾。故一个$n\geq1$次的多项式的值不可能对于一切$z$都相同。

18. 设$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$在$|z|<1$内解析，且$\mathrm{Re}\left[f(z)\right]>0$，证明：

① 对任意的$0<r<1,\ n=1,2,\cdots$，

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|\zeta|=r}\zeta^{n-1}f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta=0;$$

② 对任意的$0<r<1,\ n=1,2,\cdots$，

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)+\overline{f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}\right]r^{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta;$$

③ $|a_n|\leq2\left(\mathrm{Re}\,a_0\right),\ n=1,2,\cdots$。

证： 设$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$在$|z|<1$内解析，且$\mathrm{Re}\left[f(z)\right]>0$。

① 对任意的$0<r<1,\ n=1,2,\cdots$，由于$\zeta^{n-1}f(\zeta)$在$|\zeta|=r$上及内部解析，据柯西积分定理，有

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|\zeta|=r}\zeta^{n-1}f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta=0。\qquad(*)$$

② 对任意的$0<r<1,\ n=1,2,\cdots$，利用泰勒系数和高阶导数公式，有

$$a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta。\qquad (**)$$

现在利用圆周$|\zeta|=r$的参数方程$\zeta=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ 0\le\theta\le 2\pi$将$(*)$和$(**)$中的线积分转换为定积分，得

$$\begin{cases} 0=\dfrac{r^n}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{d}\theta \\ a_n=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)r^{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta \end{cases}。$$

在上式第一个方程的两边取共轭复数并除以r^{2n}，得

$$\begin{cases} 0=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\overline{f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}\,r^{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta \\ a_n=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)r^{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta \end{cases}。$$

上式中两个方程相加，有

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)+\overline{f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}\right]r^{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta。$$

③ 对任意的$0<r<1,\ n=1,2,\cdots$，注意到$\mathrm{Re}\left[f(z)\right]>0$，利用②的结论，得

$$\begin{aligned}|a_n|&\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\left[f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)+\overline{f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}\right]r^{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\right|\mathrm{d}\theta\\ &=\frac{r^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|2\,\mathrm{Re}\left[f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right]\right|\mathrm{d}\theta\\ &=\frac{r^{-n}}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\left[f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right]\mathrm{d}\theta。\end{aligned}$$

而泰勒系数a_0为

$$a_0=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(re^{\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{d}\theta;$$
$$\operatorname{Re}a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\left[f\left(re^{\mathrm{i}\theta}\right)\right]\mathrm{d}\theta。$$

所以

$$|a_n|\le\frac{2}{r^n}(\operatorname{Re}a_0),\ (n=1,2,\cdots)。$$

令$r\to1$，即得所要证明的结论。

19. 把下列函数在指定的圆环域内展开成洛朗级数。

(1) $\dfrac{1}{(z^2+1)(z-2)}$, $1<|z|<2$;

解： $$\frac{1}{(z^2+1)(z-2)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{z-2}-\frac{z}{z^2+1}-2\cdot\frac{1}{z^2+1}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}-\frac{2}{z^2}\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}\right]$$
$$=\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z^2}\right)^n-\frac{2}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z^2}\right)^n\right]$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{5\cdot2^{n+1}}\right)z^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z^{2n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{z^{2n+2}}。$$

(2) $\sin\dfrac{1}{1-z}$, $0<|z-1|<+\infty$;

解： 注意到

$$\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} + \cdots 。$$

故

$$\sin\frac{1}{1-z} = -\sin\frac{1}{z-1}$$
$$= -\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!}\frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{(z-1)^5} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{(z-1)^{2n+1}} + \cdots\right]。$$

(3) $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, $1<|z|<2,\ 2<|z|<+\infty,\ 0<|z-1|<1,\ 1<|z-1|<+\infty,$

$0<|z-2|<1,\ 1<|z-2|<+\infty;$

解： $$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{2^{n+1}}z^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)\frac{1}{z^{n+1}}, \qquad 1<|z|<2。$$

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$
$$= \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}2^n\frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)\frac{1}{z^{n+1}}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(2^n-1)\frac{1}{z^{n+1}}, \qquad 2<|z|<+\infty。$$

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$$

$$=-\frac{1}{1-(z-1)}-\frac{1}{z-1}$$

$$=-\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)(z-1)^n, \qquad 0<|z-1|<1。$$

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$$

$$=-\frac{1}{1-(z-1)}-\frac{1}{z-1}$$

$$=\frac{1}{z-1}\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}}-\frac{1}{z-1}$$

$$=-\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^{n+1}}, \qquad 1<|z-1|<+\infty。$$

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$$

$$=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{1+(z-2)}$$

$$=\frac{1}{z-2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-2)^n, \qquad 0<|z-2|<1。$$

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$$

$$=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{1+(z-2)}$$

$$=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-2}\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}}$$

$$=\frac{1}{z-2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(z-2)^{n+1}}, \qquad 1<|z-2|<+\infty。$$

(4) $\frac{1}{z(z+2)^3}$, $0<|z+2|<2$。

解： $\dfrac{1}{z(z+2)^3}=\dfrac{1}{(z+2)^3}\dfrac{1}{(z+2)-2}$

$$=\frac{1}{(z+2)^3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z+2}{2}}$$

$$=\frac{1}{(z+2)^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{z+2}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2^{n+1}}\right)(z+2)^{n-3}。$$

20. 求函数 $f(z)=\dfrac{2z+1}{z^2+z-2}$ 的以 $z=0$ 为心的解析的各个圆环区域内的洛朗展开式。

解： 函数 $f(z)=\dfrac{2z+1}{z^2+z-2}$ 在 $\mathbb{C}$ 上有两个不解析点 $z=1$ 和 $z=-2$。所以它以 $z=0$ 为心的解析圆区域为 $1<|z|<2$ 和 $2<|z|<+\infty$。现分别在这两个圆环区域内求它的洛朗展开式如下。

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}\\&=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\dfrac{z}{2}}+\frac{1}{z}\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}},\qquad\qquad 1<|z|<2。\end{aligned}$$

和

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-1} \\
&= \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}} + \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} \\
&= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{z}\right)^n + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n \frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n 2^n + 1\right]\frac{1}{z^{n+1}}, \qquad 2<|z|<+\infty。
\end{aligned}
$$

21. 若函数 $f(z)$ 在 $r<|z|<R$ $(r<1<R)$ 内解析，且

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{z^n}+1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n,\ r<|z|<R。$$

证明

$$2-a_n-a_{-n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(e^{i\theta}\right)\sin^2\left(\frac{n\theta}{2}\right)d\theta,\ \ n=1,2,\cdots。$$

证： 设函数 $f(z)$ 在 $r<|z|<R$ $(r<1<R)$ 内解析，且

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{z^n}+1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n,\ r<|z|<R。$$

由解析函数洛朗展开式的系数表达式， 有

$$1=a_0=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{f(z)}{z}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f\left(e^{i\theta}\right)}{e^{i\theta}}ie^{i\theta}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(e^{i\theta}\right)d\theta;$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f\left(e^{i\theta}\right)}{e^{i(n+1)\theta}}ie^{i\theta}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(e^{i\theta}\right)e^{-in\theta}d\theta,\ n=\pm1,\pm2,\cdots。$$

于是

$$
\begin{aligned}
2-a_n-a_{-n}&=2\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{d}\theta-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\left(2-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\right)\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\left(2-2\cos n\theta\right)\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\left[2\sin^2\left(\frac{n\theta}{2}\right)\right]\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\sin^2\left(\frac{n\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta。
\end{aligned}
$$

22. 设函数 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 内解析，且

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n。$$

若 $f(z)$ 在区间 $(-R,R)$ 上取实值，证明：a_n 为实数，$n=0,1,2,\cdots$。

证： 设函数 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 内解析，且

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n。$$

由解析函数泰勒展开式的系数表达式， 有

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!},\ n=0,1,2,\cdots。$$

若 $f(z)$ 在区间 $(-R,R)$ 上取实值，则 $f(x),\ x\in(-R,R)$ 是实函数。由于函数 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 内解析，故 $f(x)$ 在 $(-R,R)$ 有任意阶导数。

$\forall x_0\in(-R,R)$，由于函数 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 内解析，故 $f(z)$ 在 x_0 可导。于是

$$f'(x_0)=\lim_{z\to x_0}\frac{f(z)-f(x_0)}{z-x_0}=\lim_{x\to x_0,y=0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

是实数。从而 $f'(x), x\in(-R,R)$ 是实函数。再由数学归纳法可知 $f^{(n)}(x)$ 是实函数。这样 $f^{(n)}(0)$ 是实数。因此，a_n 为实数，$n=0,1,2,\cdots$。