习题五

1. 下列各函数有哪些孤立奇点？各属于哪一类型？如果是极点，指出它的阶。

(1) $\dfrac{1}{z^3\left(z^2+1\right)^2}$;

解： 它的孤立奇点是 $z=0,\ z=\pm\mathrm{i}$ 及 $z=\infty$。

$z=0$ 是 3 阶极点；

$z=\pm\mathrm{i}$ 是 2 阶极点；

$z=\infty$ 是可去奇点因 $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{1}{z^3\left(z^2+1\right)^2}=0$。

(2) $\dfrac{\mathrm{e}^z\sin z}{z^2}$;

解： 它的孤立奇点是 $z=0$ 及 $z=\infty$。

注意到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}^z\sin z}{z^2}&=\frac{1}{z^2}\left(1+z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots\right)\left(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\cdots\right)\\&=\frac{1}{z}+1+\frac{1}{3}z+\cdots,\qquad\qquad 0<|z|<\infty。\end{aligned}$$

故 $z=0$ 是 1 阶极点； $z=\infty$ 是本性奇点。

(3) $\dfrac{1}{z^3-z^2-z+1}$;

解： 因 $z^3-z^2-z+1=(z-1)^2(z+1)$，它的孤立奇点是 $z=1$，$z=-1$ 及 $z=\infty$。

$z=1$ 是 2 阶极点；

$z=-1$ 是 1 阶极点；

$z=\infty$ 是可去奇点因 $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{1}{z^3-z^2-z+1}=0$。

(4) $\dfrac{z}{(1+z^2)(1+e^z)}$；

解： 注意到

$$(1+z^2)(1+e^z)=0 \Leftrightarrow z=\pm\,i,\ z=(2k+1)\pi i,\ k\in\mathbb{Z}\text{。}$$

它的孤立奇点是 $z=i$，$z=-i$ 及 $z=(2k+1)\pi i,\ k\in\mathbb{Z}$。

$z=\infty$ 不是孤立奇点因 $\lim\limits_{k\to\infty}(2k+1)\pi i=\infty$。

$z=i$ 是 1 阶极点；

$z=-i$ 是 1 阶极点；

因 $(1+e^z)'=e^z\neq 0$，故 $z=(2k+1)\pi i,\ k\in\mathbb{Z}$ 是 1 阶极点。

(5) $\dfrac{1}{z^2}+\sin\dfrac{1}{z}$；

解： 它的孤立奇点是 $z=0$ 及 $z=\infty$。

注意到

$$\frac{1}{z^2}+\sin\frac{1}{z}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}-\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\frac{1}{5!}\frac{1}{z^5}-\cdots$$
$$=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\frac{1}{5!}\frac{1}{z^5}-\cdots,\qquad 0<|z|<\infty。$$

故 $z=0$ 是本性奇点； $z=\infty$ 是可去奇点。

(6) $\dfrac{\ln(1+z)}{z}$；

解： $\ln(1+z)$ 的解析区域是去掉从 -1 向左的负实轴的复平面。从而 $z=0$ 是 $\dfrac{\ln(1+z)}{z}$ 的孤立奇点， $z=\infty$ 不是 $\dfrac{\ln(1+z)}{z}$ 的孤立奇点。

注意到

$$\frac{\ln(1+z)}{z}=\frac{1}{z}\left(z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3+\cdots\right)=1-\frac{1}{2}z+\frac{1}{3}z^2+\cdots,\ 0<|z|<1,$$

故 $z=0$ 是可去奇点。

2. 函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)^3}$ 在 $z=2$ 处有一个三阶极点，这个函数又有如下的洛朗展开式

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)^3}=\cdots+\frac{1}{(z-2)^6}+\frac{1}{(z-2)^5}+\frac{1}{(z-2)^4},\ 1<|z-2|<\infty。$$

所以“$z=2$ 又是 $f(z)$ 的一个本性奇点”，又因为上式不含有 $\dfrac{1}{z-2}$ 项，因此 $\operatorname{Res}[f(z),2]=0$，这些结论是否正确？

解： 这些结论不正确。判断孤立奇点$z=2$的类型应该是观察函数$f(z)$在$z=2$的一个邻域内的洛朗展开式，而不是在区域$1<|z-2|<\infty$内的洛朗展开式。由于

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)^3}=\frac{1}{(z-2)^3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n$$
$$=\frac{1}{(z-2)^3}-\frac{1}{(z-2)^2}+\frac{1}{z-2}-1+\cdots,\quad 0<|z-2|<1。$$

故$z=2$是一个三阶极点，且$\mathrm{Res}\left[f(z),2\right]=1$。

3. 设函数$f(z)$和$g(z)$分别在点$z=a$处有m阶和n阶零点，那么

$$f(z)+g(z),\ f(z)g(z)\text{和}\frac{f(z)}{g(z)}$$

在点$z=a$处各有什么性质？

解： 设函数$f(z)$和$g(z)$分别在点$z=a$处有m阶和n阶零点，则

$$f(z)=(z-a)^m\varphi(z)$$

和

$$g(z)=(z-a)^n\psi(z),$$

其中$\varphi(z)$和$\psi(z)$在$z=a$解析，且$\varphi(a)\neq0,\ \psi(a)\neq0$。

(1) $f(z)+g(z)=(z-a)^m\varphi(z)+(z-a)^n\psi(z)$。

当$m=n$时，有

$$f(z)+g(z)=(z-a)^m\left[\varphi(z)+\psi(z)\right]。$$

若$\varphi(a)+\psi(a)\neq0$，$z=a$是$f(z)+g(z)$的m阶零点。若$\varphi(a)+\psi(a)=0$，$z=a$是$f(z)+g(z)$的高于m阶的零点。

当 $m>n$ 时，有

$$f(z)+g(z)=(z-a)^n\left[(z-a)^{m-n}\varphi(z)+\psi(z)\right]。$$

由于 $\left[(z-a)^{m-n}\varphi(z)+\psi(z)\right]\Big|_{z=a}=\psi(a)\neq 0$， $z=a$ 是 $f(z)+g(z)$ 的 n 阶零点。

当 $m<n$ 时，有

$$f(z)+g(z)=(z-a)^m\left[\varphi(z)+(z-a)^{n-m}\psi(z)\right]。$$

由于 $\left[\varphi(z)+(z-a)^{n-m}\psi(z)\right]\Big|_{z=a}=\varphi(a)\neq 0$， $z=a$ 是 $f(z)+g(z)$ 的 m 阶零点。

(2) $f(z)g(z)=(z-a)^{m+n}\varphi(z)\psi(z)$。

由于 $\varphi(a)\psi(a)\neq 0$， $z=a$ 是 $f(z)+g(z)$ 的 $m+n$ 阶零点。

(3) $\dfrac{f(z)}{g(z)}=(z-a)^{m-n}\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}, z\neq a$， 且 $\dfrac{\varphi(a)}{\psi(a)}\neq 0$。

当 $m\geq n$ 时， $z=a$ 是 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的可去奇点。

当 $m<n$ 时， $z=a$ 是 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 $n-m$ 阶极点。

4. 设函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 分别在点 $z=a$ 处解析和有本性奇点，那么

$$f(z)+g(z), f(z)g(z) 和 \frac{f(z)}{g(z)}$$

在点 $z=a$ 处各有什么性质？

解： 设函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 分别在点 $z=a$ 处解析和有本性奇点，则

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n,\ |z-a|<\delta(\delta>0)$$

和

$$g(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-a)^n,\ 0<|z-a|<\delta(\delta>0)。$$

(1) $f(z)+g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n+\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-a)^n, 0<|z-a|<\delta$。

右边级数有无穷多个负幂项，$z=a$ 是 $f(z)+g(z)$ 的本性奇点。

(2) $f(z)g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-a)^n, 0<|z-a|<\delta$。

右边级数有无穷多个负幂项，$z=a$ 是 $f(z)g(z)$ 的本性奇点。

(3) 令 $\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-a)^n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n,\ 0<|z-a|<\delta$。则

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-a)^n \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n,\ 0<|z-a|<\delta。$$

于是，级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ 必有无穷多个负幂项，$z=a$ 是 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的本性奇点。

5. 设函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 分别在点 $z=a$ 处有 m 阶和 n 阶极点，那么

$$f(z)+g(z), f(z)g(z) 和 \frac{f(z)}{g(z)}$$

在点 $z=a$ 处各有什么性质？

解： 设函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 分别在点 $z=a$ 处有 m 阶和 n 阶极点，则

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)^m}\varphi(z)$$

和

$$g(z)=\frac{1}{(z-a)^n}\psi(z),$$

其中$\varphi(z)$和$\psi(z)$在$z=a$解析，且$\varphi(a)\neq 0,\ \psi(a)\neq 0$。

(1) $f(z)+g(z)=\dfrac{1}{(z-a)^m}\varphi(z)+\dfrac{1}{(z-a)^n}\psi(z)$。

当$m=n$时，有

$$f(z)+g(z)=\frac{1}{(z-a)^m}\left[\varphi(z)+\psi(z)\right]。$$

若$\varphi(a)+\psi(a)\neq 0$，$z=a$是$f(z)+g(z)$的m阶极点。若$\varphi(a)+\psi(a)=0$，$z=a$是$f(z)+g(z)$的低于m阶的极点。

当$m>n$时，有

$$f(z)+g(z)=\frac{1}{(z-a)^m}\left[\varphi(z)+(z-a)^{m-n}\psi(z)\right]。$$

由于$\left[\varphi(z)+(z-a)^{m-n}\psi(z)\right]\Big|_{z=a}=\varphi(a)\neq 0$，$z=a$是$f(z)+g(z)$的$m$阶极点。

当$m<n$时，有

$$f(z)+g(z)=\frac{1}{(z-a)^n}\left[(z-a)^{n-m}\varphi(z)+\psi(z)\right]。$$

由于$\left[(z-a)^{n-m}\varphi(z)+\psi(z)\right]\Big|_{z=a}=\psi(a)\neq 0$，$z=a$是$f(z)+g(z)$的$n$阶极点。

(2) $f(z)g(z)=\dfrac{1}{(z-a)^{m+n}}\varphi(z)\psi(z)$。

由于$\varphi(a)\psi(a)\neq 0$，$z=a$是$f(z)+g(z)$的$m+n$阶极点。

(3) $\dfrac{f(z)}{g(z)}=(z-a)^{n-m}\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)},\ z\neq a$，且$\dfrac{\varphi(a)}{\psi(a)}\neq 0$。

当$n\geq m$时，$z=a$是$\dfrac{f(z)}{g(z)}$的可去奇点。

当 $n<m$ 时，$z=a$ 是 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 的 $m-n$ 阶极点。

6. 设点 $z=a$ 是函数 $f(z)$ 的孤立奇点，$(z-a)^k f(z)$(k 为正整数)在点 a 的某个去心邻域有界。证明：点 $z=a$ 是 $f(z)$ 的不高于 k 阶的极点或可去奇点。

证： 设点 $z=a$ 是函数 $f(z)$ 的孤立奇点，$(z-a)^k f(z)$(k 为正整数)在点 a 的某个去心邻域有界。则 $\exists\delta>0,$ 当 $0<|z-a|<\delta$ 时，$(z-a)^k f(z)$ 解析且 $\left|(z-a)^k f(z)\right|<M$。令

$$\varphi(z)=(z-a)^k f(z)。$$

当 $0<|z-a|<\delta$ 时，$\varphi(z)$ 解析且 $|\varphi(z)|<M$。由洛朗展开定理， 有

$$\varphi(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-a)^n,\ 0<|z-a|<\delta\text{，、}$$

其中 $a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-a|=r}\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\ 0<r<\delta$。从而

$$\begin{aligned}|a_{-n}|&=\left|\frac{1}{2\pi}\oint_{|\zeta-a|=r}\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-a)^{-n+1}}\mathrm{d}\zeta\right|\le\frac{1}{2\pi}\oint_{|\zeta-a|=r}\frac{|\varphi(\zeta)|}{|\zeta-a|^{-n+1}}\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{2\pi}r^{n-1}M\cdot2\pi r=Mr^n。\end{aligned}$$

让 $r\to0$，即得 $a_{-n}=0,\ n=1,2,\cdots$。因而，有

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n,\ 0<|z-a|<\delta\text{。}$$

即 $z=a$ 是 $\varphi(z)$ 的可去奇点。令 $\varphi(a)=a_0$，则 $\varphi(z)$ 在 $z=a$ 解析且

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)^k}\varphi(z),\ 0<|z-a|<\delta\text{。}$$

若 $\varphi(a)\neq0$，由上式知点 $z=a$ 是 $f(z)$ 的 k 阶的极点

若$\varphi(a)=0$且$z=a$是$\varphi(z)$的$m(>1)$阶零点，则

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)^k}(z-a)^m\psi(z)=\frac{1}{(z-a)^{k-m}}\psi(z),\ 0<|z-a|<\delta,$$

其中$\psi(z)$在$z=a$解析且$\psi(a)\neq 0$。此时，点$z=a$是$f(z)$的低于k阶的极点或可去奇点。

7. 证明：若z_0是解析函数$f(z)$的本性奇点，且$f(z)\neq 0$，则z_0也是$\dfrac{1}{f(z)}$的本性奇点。

证： 设z_0是解析函数$f(z)$的本性奇点，且$f(z)\neq 0$。则

$$\lim_{z\to z_0} f(z)$$

不存在也不为∞。从而

$$\lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)}$$

不存在也不为∞。故z_0也是$\dfrac{1}{f(z)}$的本性奇点。

8. 判断$z=\infty$是下列函数的什么奇点。

(1) $\dfrac{z}{5-z^4}$；

解： 由于$\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z}{5-z^4}=0$，故$z=\infty$是所给函数的可去奇点。

(2) $1+z+z^2$；

解： 所给函数在$|z|<\infty$的洛朗展开式为$1+z+z^2$，故$z=\infty$是所给函数的2阶极点。

(3) $e^{\frac{1}{z}}+z^3-2$;

解： 注意到

$$e^{\frac{1}{z}}+z^3-2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n+z^3-2=\cdots+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}-1+z^3,\ 0<|z|<\infty\text{。}$$

故$z=\infty$是所给函数的3阶极点。

(4) $\exp\left(\frac{1}{1-z}\right)$;

解： 注意到

$$\exp\left(\frac{1}{1-z}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{1-z}\right)^n\text{。}$$

$$=1+\frac{1}{1-z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{(1-z)^2}+\frac{1}{3!}\frac{1}{(1-z)^3}+\cdots$$

$$=1-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\cdots\right)+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\cdots\right)^2+\cdots,\ 1<|z|<\infty$$

故$z=\infty$是所给函数的可去奇点。

(5) e^z。

解： 注意到

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n,\ |z|<\infty\text{。}$$

故$z=\infty$是所给函数的本性奇点。

9. 求下列各函数 $f(z)$ 在孤立奇点(不考虑∞)的留数。

(1) $f(z)=\dfrac{1}{z^3-z^5}$；

解： $\operatorname{Res}\left[f(z),0\right]=\dfrac{1}{2!}\lim\limits_{z\to0}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}z^3\left(\dfrac{1}{z^3-z^5}\right)=\lim\limits_{z\to0}\left[\left(1-z^2\right)^{-2}+4z\left(1-z^2\right)^{-3}\right]=1$。

$\operatorname{Res}\left[f(z),1\right]=\lim\limits_{z\to1}(z-1)\left(\dfrac{1}{z^3-z^5}\right)=\lim\limits_{z\to1}\dfrac{-1}{z^3(1+z)}=-\dfrac{1}{2}$。

$\operatorname{Res}\left[f(z),-1\right]=\lim\limits_{z\to-1}(z+1)\left(\dfrac{1}{z^3-z^5}\right)=\lim\limits_{z\to-1}\dfrac{1}{z^3(1-z)}=-\dfrac{1}{2}$。

(2) $f(z)=\dfrac{z^2}{\left(1+z^2\right)^2}$；

解： $\operatorname{Res}\left[f(z),\mathrm{i}\right]=\lim\limits_{z\to\mathrm{i}}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z-\mathrm{i})^2\dfrac{z^2}{\left(1+z^2\right)^2}=\lim\limits_{z\to\mathrm{i}}\dfrac{2z\mathrm{i}}{(z+\mathrm{i})^3}=-\dfrac{\mathrm{i}}{4}$。

$\operatorname{Res}\left[f(z),-\mathrm{i}\right]=\lim\limits_{z\to-\mathrm{i}}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z+\mathrm{i})^2\dfrac{z^2}{\left(1+z^2\right)^2}=\lim\limits_{z\to-\mathrm{i}}\dfrac{-2z\mathrm{i}}{(z-\mathrm{i})^3}=\dfrac{\mathrm{i}}{4}$。

(3) $f(z)=\dfrac{z^{2n}}{1+z^n}$，$n=1,2,\cdots$。

解： 由于$1+z^n=0\Leftrightarrow z=\mathrm{e}^{\frac{(2k+1)\pi\mathrm{i}}{n}}$，$k=0,1,2,\cdots,n-1$。故函数 $f(z)$ 有 n 个孤立奇点 $z_k=\mathrm{e}^{\frac{(2k+1)\pi\mathrm{i}}{n}}$，$k=0,1,2,\cdots,n-1$，且它们都是一阶极点。因此，有

$$\operatorname{Res}\left[f(z),z_k\right]=\lim_{z\to z_k}(z-z_k)\left(\frac{z^{2n}}{1+z^n}\right)=\lim_{z\to z_k}z^{2n}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{z\to z_k}\dfrac{\left(1+z^n\right)-\left(1+z^n\right)\big|_{z=z_k}}{z-z_k}}=\left.\frac{z^{2n}}{\left(1+z^n\right)'}\right|_{z=z_k}$$

$$=\left.\frac{z^{2n}}{nz^{n-1}}\right|_{z=z_k}=\frac{z_k^{n+1}}{n}=-\frac{z_k}{n},\ k=0,1,2,\cdots,n-1。$$

(4) $f(z)=\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$；

解： 函数 $f(z)$ 的孤立奇点是 $z=0$，且

$$f(z)=\frac{1-e^{2z}}{z^4}=\frac{1}{z^4}\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(2z)^n\right)=-\frac{1}{z^4}\left(2z+\frac{4}{2!}z^2+\frac{8}{3!}z^3+\frac{16}{4!}z^4+\cdots\right)$$
$$=-\frac{2}{z^3}-\frac{2}{z^2}-\frac{4}{3}\frac{1}{z}-\frac{2}{3}\cdots,\qquad 0<|z|<\infty。$$

故

$$\operatorname{Res}\left[f(z),0\right]=-\frac{4}{3}。$$

(5) $f(z)=\cot^2 z$；

解： $f(z)=\cot^2 z=\dfrac{\cos^2 z}{\sin^2 z}$。由于 $\sin^2 z=0\Leftrightarrow z=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$。故函数 $f(z)$ 的孤立奇点是 $z_k=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$，且它们都是二阶极点。故

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left[\cot^2,k\pi\right]&=\lim_{z\to k\pi}\left[(z-k\pi)^2\frac{\cos^2 z}{\sin^2 z}\right]'\\
&=\lim_{z\to k\pi}\frac{\left[2(z-k\pi)\cos^2 z-(z-k\pi)^2\,2\cos z\sin z\right]\sin^2 z-(z-k\pi)^2\cos^2 z\,2\sin z\cos z}{\sin^4 z}\\
&=2\lim_{z\to k\pi}\frac{(z-k\pi)\cos z\sin z-(z-k\pi)^2}{\sin^3 z}\cos z\\
&=2\lim_{z\to k\pi}\cos z\cdot\lim_{z\to k\pi}\frac{z-k\pi}{\sin z}\cdot\lim_{z\to k\pi}\frac{\cos z\sin z-(z-k\pi)}{\sin^2 z}\\
&=2(-1)^k\frac{1}{(-1)^k}\lim_{z\to k\pi}\frac{\cos^2 z-\sin^2 z-1}{2\sin z\cos z}\\
&=2\lim_{z\to k\pi}\frac{\cos 2z-1}{\sin 2z}\\
&=0,\qquad k\in\mathbb{Z}。
\end{aligned}$$

(6) $f(z)=\dfrac{1}{1-z}e^{\frac{1}{z}}$；

解： 函数 $f(z)$ 的孤立奇点是 $z=0$ 和 $z=1$。由于

$$f(z)=\frac{1}{1-z}e^{\frac{1}{z}}=\left(1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{1!}\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}+\cdots\right)$$
$$=\cdots+\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots\right)\frac{1}{z}+\cdots,\quad 0<|z|<\infty,$$

故

$$\mathrm{Res}\left[f(z),0\right]=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots=e-1。$$

又

$$\mathrm{Res}\left[f(z),1\right]=\lim_{z\to1}(z-1)\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}=-e。$$

10. 设函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 均在点 z_0 处解析，且

$$f(z_0)\neq0，\quad g(z_0)=g'(z_0)=0，\quad g''(z_0)\neq0。$$

证明：点 z_0 是 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 2 阶极点，且

$$\mathrm{Res}\left[\frac{f(z)}{g(z)},z_0\right]=2\frac{f'(z_0)}{g''(z_0)}-\frac{2}{3}\frac{f(z_0)g^{(3)}(z_0)}{\left[g''(z_0)\right]^2}。$$

证： 由题设条件，知点 z_0 是 $g(z)$ 的 2 阶零点。从而在 z_0 的附近，有

$$g(z)=(z-z_0)^2\varphi(z),$$

其中 $\varphi(z)$ 在 $z=z_0$ 解析，且 $\varphi(z_0)\neq0$。于是

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^2}\frac{f(z)}{\varphi(z)}。$$

因函数 $f(z)$ 和 $\varphi(z)$ 均在点 z_0 处解析且 $f(z_0)\neq0$，$\varphi(z_0)\neq0$，故 $\dfrac{f(z)}{\varphi(z)}$

在点z_0处解析且$\dfrac{f(z_0)}{\varphi(z_0)}\neq 0$。这说明点$z_0$是$\dfrac{f(z)}{g(z)}$的2阶极点。于是

$\dfrac{f(z)}{g(z)}$在z_0附近的洛朗展开式为

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{a_{-1}}{(z-z_0)}+a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots\text{。}\qquad(*)$$

又因函数$f(z)$和$g(z)$均在点z_0处解析，且

$$f(z_0)\neq 0,\quad g(z_0)=g'(z_0)=0,\quad g''(z_0)\neq 0,$$

有

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\cdots,\ |z-z_0|<\delta,$$

和

$$g(z)=\frac{g''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\frac{g'''(z_0)}{3!}(z-z_0)^3+\cdots,\ |z-z_0|<\delta\text{。}$$

再由$(*)$，得

$$\begin{aligned}&f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\cdots\\&=\left(\frac{g''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\frac{g'''(z_0)}{3!}(z-z_0)^3+\cdots\right)\left(\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{a_{-1}}{(z-z_0)}+a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots\right)\\&=\frac{g''(z_0)}{2!}a_{-2}+\left[\frac{g''(z_0)}{2!}a_{-1}+\frac{g'''(z_0)}{3!}a_{-2}\right](z-z_0)+\cdots\text{。}\end{aligned}$$

比较两端系数，得

$$f(z_0)=\frac{g''(z_0)}{2!}a_{-2},\ f'(z_0)=\frac{g''(z_0)}{2!}a_{-1}+\frac{g'''(z_0)}{3!}a_{-2}\text{。}$$

因此，有

$$\operatorname{Res}\left[\frac{f(z)}{g(z)},z_0\right]=a_{-1}=2\frac{f'(z_0)}{g''(z_0)}-\frac{1}{3}\frac{g'''(z_0)}{g''(z_0)}a_{-2}$$

$$=2\frac{f'(z_0)}{g''(z_0)}-\frac{2}{3}\frac{f(z_0)g^{(3)}(z_0)}{\left[g''(z_0)\right]^2}。$$

11. 假设 $z=\infty$ 是解析函数 $f(z)$ 的孤立奇点。证明：

(1) 若 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点，则

$$\operatorname{Res}[f,\infty]=\lim_{z\to\infty} z^2 f'(z)。$$

(2) 若 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的 m 阶极点，则

$$\operatorname{Res}[f,\infty]=\frac{(-1)^m}{(m+1)!}\lim_{z\to\infty} z^{m+2} f^{(m+1)}(z)。$$

证： 设 $z=\infty$ 是解析函数 $f(z)$ 的孤立奇点，则有

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n,\quad R<|z|<\infty。$$

(1) 若 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点，则

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{0} a_n z^n=\cdots a_{-n}\frac{1}{z^n}+\cdots+a_{-1}\frac{1}{z}+a_0,\quad R<|z|<\infty。$$

从而

$$f'(z)=\cdots-a_{-n}n\frac{1}{z^{n+1}}-\cdots-2a_{-2}\frac{1}{z^3}-a_{-1}\frac{1}{z^2},\quad R<|z|<\infty；$$

$$z^2 f'(z)=\cdots-a_{-n}n\frac{1}{z^{n-1}}-\cdots-2a_{-2}\frac{1}{z}-a_{-1},\quad R<|z|<\infty。$$

故

$$\operatorname{Res}[f,\infty]=-a_{-1}=\lim_{z\to\infty} z^2 f'(z)。$$

(2) 若 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的 m 阶极点，则

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{m} a_n z^n=\cdots a_{-n}\frac{1}{z^n}+\cdots+a_{-1}\frac{1}{z}+a_0+a_1 z+\cdots+a_m z^m,\quad R<|z|<\infty。$$

从而

$$f^{(m+1)}(z)=\cdots+(-1)^{m+1}a_{-2}(m+2)!\frac{1}{z^{m+3}}+(-1)^{m+1}a_{-1}(m+1)!\frac{1}{z^{m+2}},\quad R<|z|<\infty。$$

$$z^{m+2}f^{(m+1)}(z)=\cdots+(-1)^{m+1}a_{-2}(m+2)!\frac{1}{z}+(-1)^{m+1}a_{-1}(m+1)!,\quad R<|z|<\infty。$$

故

$$\mathrm{Res}[f,\infty]=-a_{-1}=\frac{(-1)^m}{(m+1)!}\lim_{z\to\infty}z^{m+2}f^{(m+1)}(z)。$$

12. 求下列函数在 $z=\infty$ 的留数。

(1) $z^2\sin\frac{1}{z}$；

解： $\mathrm{Res}\left[z^2\sin\frac{1}{z},\infty\right]=-\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^2}\sin z\frac{1}{z^2},0\right]=-\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^4}\sin z,0\right]$。

又

$$\frac{\sin z}{z^4}=\frac{1}{z^4}\left(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5+\cdots\right)=\frac{1}{z^3}-\frac{1}{6}\frac{1}{z}+\frac{1}{5!}z+\cdots。$$

故

$$\mathrm{Res}\left[z^2\sin\frac{1}{z},\infty\right]=-\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^4}\sin z,0\right]=\frac{1}{6}。$$

(2) $e^{z+\frac{1}{z}}$；

解： 由于

$$e^{z+\frac{1}{z}}=e^ze^{\frac{1}{z}}=\left(1+z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\cdots\right)$$

$$=\cdots+\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}\frac{1}{3!}+\frac{1}{3!}\frac{1}{4!}+\cdots\right)\frac{1}{z}+\cdots,\qquad 0<|z|<\infty。$$

故

$$\operatorname{Res}\left[e^{z+\frac{1}{z}},\infty\right]=-\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}\frac{1}{3!}+\frac{1}{3!}\frac{1}{4!}+\cdots\right)。$$

(3) $\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$；

解： $$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{\sin\frac{1}{z}},\infty\right]=-\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2\sin z},0\right]$$

$$=-\frac{1}{2!}\lim_{z\to0}\left[z^3\frac{1}{z^2\sin z}\right]''=-\frac{1}{2}\lim_{z\to0}\left(\frac{\sin z-z\cos z}{\sin^2 z}\right)'$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{z\to0}\frac{z\sin^2 z-2\cos z\left(\sin z-z\cos z\right)}{\sin^3 z}$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\lim_{z\to0}\frac{z}{\sin z}-2\lim_{z\to0}\cos z\cdot\lim_{z\to0}\frac{\sin z-z\cos z}{z^3}\right]$$

$$=-\frac{1}{6}。$$

(4) $\dfrac{z^{2n}}{1+z^n}$。

解： 当 $n=1,2,3,\cdots$ 时，有

$$\frac{z^{2n}}{1+z^n}=z^{2n}\cdot\frac{1}{z^n}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z^n}}=z^n\left(1-\frac{1}{z^n}+\frac{1}{z^{2n}}-\frac{1}{z^{3n}}+\cdots\right)$$

$$=z^n-1+\frac{1}{z^n}-\frac{1}{z^{2n}}+\cdots,\qquad 1<|z|<\infty。$$

故

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z^{2n}}{1+z^n},\infty\right]=\begin{cases}-1, & n=1;\\ 0, & n\geq2。\end{cases}$$

当 $n=0$ 时，有

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z^{2n}}{1+z^n},\infty\right]=\operatorname{Res}\left[\frac{1}{2},\infty\right]=0。$$

当 $n=-1,-2,-3,\cdots$ 时，有

$$\begin{aligned}\frac{z^{2n}}{1+z^n}&=z^{2n}\cdot\cdot\frac{1}{1+z^n}=z^{2n}\left(1-z^n+z^{2n}-z^{3n}+\cdots\right)\\&=z^{2n}-z^{3n}+z^{4n}-z^{5n}+\cdots,\qquad 1<|z|<\infty。\end{aligned}$$

故

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z^{2n}}{1+z^n},\infty\right]=0。$$

13. 举例说明若 $z=\infty$ 是解析函数 $f(z)$ 的可去奇点，则 $\operatorname{Res}[f(z),\infty]$ 可能不等于零。

解： 设 $f(z)=1+\frac{1}{z},0<|z|<\infty$。由于它的洛朗展开式中没有正幂项，知 $z=\infty$ 是函数 $f(z)$ 的可去奇点。但

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-a_{-1}=-1\neq 0。$$

14. 设多项式 $P(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$ 有 n 个彼此相异的零点 $z_1,z_2,\cdots,z_n$；$Q(z)=z^{n-1}+b_1z^{n-2}+\cdots+b_{n-1}$。证明：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{Q(z_k)}{P'(z_k)}=1。$$

证： 函数 $\frac{Q(z)}{P(z)}$ 在 z 平面上除去一阶极点 $z_1,z_2,\cdots z_n$ 外处处解析。由推广的留数基本定理，有

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left[\frac{Q(z)}{P(z)},z_k\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{Q(z)}{P(z)},\infty\right]=0。$$

而

$$\operatorname{Res}\left[\frac{Q(z)}{P(z)},z_k\right]=\lim_{z\to z_k}(z-z_k)\frac{Q(z)}{P(z)}=\lim_{z\to z_k}\frac{Q(z)}{\frac{P(z)-P(z_k)}{z-z_k}}=\frac{Q(z_k)}{P'(z_k)}\text{。}$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{Q(z)}{P(z)},\infty\right]=-\operatorname{Res}\left[\frac{Q\left(\frac{1}{z}\right)}{P\left(\frac{1}{z}\right)}\frac{1}{z^2},0\right]=-\operatorname{Res}\left[\frac{\frac{1}{z^{n-1}}+\frac{b_1}{z^{n-2}}+\cdots+b_{n-1}}{\frac{1}{z^n}+\frac{a_1}{z^{n-1}}+\cdots+a_n}\frac{1}{z^2},0\right]$$

$$=-\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z}\frac{1+b_1z+\cdots+b_{n-1}z^{n-1}}{1+a_1z+\cdots+a_nz^n},0\right]=-1\text{。}$$

于是

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{Q(z_k)}{P'(z_k)}=1\text{。}$$

15. 计算下列各积分。

(1) $\oint_C\frac{z\mathrm{d}z}{(z-1)(z-2)^2}$, $C:|z-2|=\frac{1}{2}$；

解： $\oint_C\frac{z\mathrm{d}z}{(z-1)(z-2)^2}=2\pi\mathrm{i}\cdot\operatorname{Res}\left[\frac{z}{(z-1)(z-2)^2},2\right]=2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to 2}\left(\frac{z}{z-1}\right)'=-2\pi\mathrm{i}$。

(2) $\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{1+z^4}$, $C:x^2+y^2=2x$；

解： $1+z^4=0\Leftrightarrow z=(-1)^{\frac{1}{4}}=\mathrm{e}^{\frac{(2k+1)\pi\mathrm{i}}{4}}$, $k=0,1,2,3$。在 C 内 $\frac{1}{1+z^4}$ 有一阶极点 $z_0=\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{4}}$ 和 $z_3=\mathrm{e}^{\frac{7\pi\mathrm{i}}{4}}$。故

$$\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{1+z^4}=2\pi\mathrm{i}\left[\operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^4},z_0\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^4},z_3\right)\right]\text{。}$$

而

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+z^4},z_0\right)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{1}{1+z^4}=\frac{1}{\left(1+z^4\right)'}\bigg|_{z=z_0}=\frac{1}{4z_0^{\ 3}}=-\frac{z_0}{4}$$
$$=-\frac{1}{4}e^{\frac{\pi i}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{8}i。$$

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+z^4},z_3\right)=\lim_{z\to z_0}(z-z_3)\frac{1}{1+z^4}=\frac{1}{\left(1+z^4\right)'}\bigg|_{z=z_3}=\frac{1}{4z_3^{\ 3}}=-\frac{z_3}{4}$$
$$=-\frac{1}{4}e^{\frac{7\pi i}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{\sqrt{2}}{8}i。$$

于是

$$\oint_C\frac{dz}{1+z^4}=2\pi i\left[\mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+z^4},z_0\right)+\mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+z^4},z_3\right)\right]=-\frac{\sqrt{2}\pi i}{2}。$$

(3) $\oint_C\frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}\,dz,\ C:|z|=4$；

解： $\oint_C\frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}\,dz$

$$=2\pi i\left\{\mathrm{Res}\left[\frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)},1\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)},3i\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)},-3i\right]\right\}$$
$$=2\pi i\left[\frac{3+2}{1+9}+\frac{3(3i)^3+2}{(3i-1)(3i+3i)}+\frac{3(-3i)^3+2}{(-3i-1)(-3i-3i)}\right]$$
$$=6\pi i。$$

(4) $\oint_C\frac{1-\cos z}{z^m}\,dz,\ C:|z|=\frac{3}{2},\ m\in\mathbb{Z}$；

解： $\oint_C\frac{1-\cos z}{z^m}\,dz=2\pi i\cdot\mathrm{Res}\left[\frac{1-\cos z}{z^m},0\right]$。

由于

$$\frac{1-\cos z}{z^m}=\frac{1}{z^m}\left(\frac{1}{2!}z^2-\frac{1}{4!}z^4+\frac{1}{6!}z^6-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}z^{2n}+\cdots\right)$$
$$=\frac{1}{2!}z^{2-m}-\frac{1}{4!}z^{4-m}+\frac{1}{6!}z^{6-m}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}z^{2n-m}+\cdots,\quad 0<|z|<\infty。$$

当 $m\le 2$ 时，有

$$\oint_C\frac{1-\cos z}{z^m}\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left[\frac{1-\cos z}{z^m},0\right]=2\pi\mathrm{i}\cdot 0=0。$$

当 $m>2$ 时。若 $m=2k,\ k=2,3,\cdots$，有

$$\oint_C\frac{1-\cos z}{z^m}\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left[\frac{1-\cos z}{z^m},0\right]=2\pi\mathrm{i}\cdot 0=0。$$

若 $m=2k+1,\ k=1,2,3,\cdots$，有

$$\oint_C\frac{1-\cos z}{z^m}\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left[\frac{1-\cos z}{z^m},0\right]=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!}=\frac{(-1)^{k-1}2\pi\mathrm{i}}{(2k)!}。$$

(5) $\oint_C\frac{z^{13}}{(z^2+2)(z^2-1)}\,\mathrm{d}z,\ C:|z|=3$；

解： $\oint_C\frac{z^{13}}{(z^2+2)^3(z^2-1)^4}\,\mathrm{d}z$

$$=2\pi\mathrm{i}\cdot\left\{\mathrm{Res}\left[\frac{z^{13}}{(z^2+2)^3(z^2-1)^4},\sqrt{2}\mathrm{i}\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{z^{13}}{(z^2+2)^3(z^2-1)^4},-\sqrt{2}\mathrm{i}\right]\right.$$
$$\left.+\mathrm{Res}\left[\frac{z^{13}}{(z^2+2)^3(z^2-1)^4},1\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{z^{13}}{(z^2+2)^3(z^2-1)^4},-1\right]\right\}$$

$$= -2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left[\frac{z^{13}}{\left(z^2+2\right)^3\left(z^2-1\right)^4}, \infty\right]$$

$$= 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left[\frac{\frac{1}{z^{13}}}{\left(\frac{1}{z^2}+2\right)^3\left(\frac{1}{z^2}-1\right)^4}\cdot\frac{1}{z^2}, 0\right]$$

$$= 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z\left(1+2z^2\right)^3\left(1-z^2\right)^4}, 0\right]$$

$$= 2\pi i。$$

(6) $\oint_C z^3 \sin^5 \frac{1}{z} dz$, $C:|z|=1$。

解： $\oint_C z^3 \sin^5 \frac{1}{z} dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left[z^3 \sin^5 \frac{1}{z}, 0\right] = -2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left[z^3 \sin^5 \frac{1}{z}, \infty\right]$

$$= 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^3}\sin^5 z \cdot \frac{1}{z^2}, 0\right] = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^5}\sin^5 z, 0\right]。$$

注意到

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{z^5}\sin^5 z = 1,$$

故 $z=0$ 是函数 $\frac{1}{z^5}\sin^5 z$ 的可去奇点。因此，有

$$\oint_C z^3 \sin^5 \frac{1}{z} dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^5}\sin^5 z, 0\right] = 0。$$

16. 试求下列各积分的值。

(1) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\alpha+\cos\theta}$, $\alpha>1$;

解： $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\alpha+\cos\theta}\overset{z=e^{i\theta}}{=}\oint_{|z|=1}\frac{\frac{dz}{iz}}{\alpha+\frac{z+z^{-1}}{2}}=\frac{2}{i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+2\alpha z+1}$。

注意到 $z^2+2\alpha z+1=0\Leftrightarrow z=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-1}$，且 $\left|-\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}\right|>1,\left|-\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right|<1$，

我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\alpha+\cos\theta}&=\frac{2}{i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+2\alpha z+1}=2\pi i\cdot\frac{2}{i}\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^2+2\alpha z+1},-\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right]\\&=4\pi\lim_{z\to-\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}\frac{1}{z+\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}=\frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}\text{。}\end{aligned}$$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$；

解： $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=2\pi i\cdot\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^2+2z+2},-1+i\right]$

$$=2\pi i\lim_{z\to-1+i}(z+1-i)\frac{1}{z^2+2z+2}=\pi\text{。}$$

(3) $\int_0^{\infty}\frac{x\sin ux}{a^2+x^2}\,dx,\ u>0,a>0$。

解： $\int_0^{\infty}\frac{x\sin ux}{a^2+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin ux}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{iux}}{a^2+x^2}dx\right)$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left\{2\pi i\cdot\mathrm{Res}\left[\frac{ze^{iuz}}{a^2+z^2},ai\right]\right\}=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left\{2\pi i\frac{aie^{-au}}{2ai}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2e^{au}}\text{。}$$

(4) $\int_0^{2\pi}\frac{(\sin 3\theta)^2}{1-2a\cos\theta+a^2}\,d\theta,\ |a|<1$。

解： 当$a\neq 0$时，有

$$\int_0^{2\pi}\frac{(\sin 3\theta)^2}{1-2a\cos\theta+a^2}\,\mathrm{d}\theta \overset{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{=} \oint_{|z|=1}\frac{\left(\dfrac{z^3-z^{-3}}{2\mathrm{i}}\right)^2}{1-2a\dfrac{z+z^{-1}}{2}+a^2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$

$$=-\frac{1}{4\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{(z^6-1)^2}{z^6\left(z-az^2-a+a^2z\right)}\mathrm{d}z$$

$$=-\frac{1}{4\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{(z^6-1)^2}{z^6(1-az)(z-a)}\mathrm{d}z$$

$$=-\frac{1}{4\mathrm{i}}\cdot 2\pi\mathrm{i}\left\{\mathrm{Res}\left[\frac{(z^6-1)^2}{z^6(1-az)(z-a)},a\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{(z^6-1)^2}{z^6(1-az)(z-a)},0\right]\right\}$$

$$=-\frac{\pi}{2}\left\{\mathrm{Res}\left[\frac{(z^6-1)^2}{z^6(1-az)(z-a)},a\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{(z^6-1)^2}{z^6(1-az)(z-a)},0\right]\right\}。$$

现在

$$\mathrm{Res}\left[\frac{(z^6-1)^2}{z^6(1-az)(z-a)},a\right]=\frac{(a^6-1)^2}{a^6(1-a^2)}=\frac{1}{a^6}(1-a^2)(1+a^2+a^4)^2。$$

又

$$\frac{(z^6-1)^2}{z^6(1-az)(z-a)}=\frac{z^{12}-2z^6+1}{z^6(1-az)(z-a)}$$

$$=\frac{z^6}{(1-az)(z-a)}-\frac{2}{(1-az)(z-a)}+\frac{1}{z^6(1-az)(z-a)}。$$

所以

$$\mathrm{Res}\left[\frac{(z^6-1)^2}{z^6(1-az)(z-a)},0\right]=\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^6(1-az)(z-a)},0\right]。$$

注意到

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z^{6}(1-az)(z-a)}&=\frac{1}{z^{6}}\left(1+az+a^{2}z^{2}+a^{3}z^{3}+\cdots\right)\left(-\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{z}{a}+\frac{z^{2}}{a^{2}}+\frac{z^{3}}{a^{3}}+\cdots\right)\\
&=\cdots-\frac{1}{a}\frac{1}{z^{6}}\left(\frac{1}{a^{5}}+\frac{a}{a^{4}}+\frac{a^{2}}{a^{3}}+\frac{a^{3}}{a^{2}}+\frac{a^{4}}{a^{1}}+a^{5}\right)z^{5}+\cdots\\
&=\cdots-\left(\frac{1}{a^{6}}+\frac{1}{a^{4}}+\frac{1}{a^{2}}+1+a^{2}+a^{4}\right)\frac{1}{z}+\cdots,\qquad 0<|z|<|a|<1。
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left[\frac{\left(z^{6}-1\right)^{2}}{z^{6}(1-az)(z-a)},0\right]&=\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^{6}(1-az)(z-a)},0\right]\\
&=-\left(\frac{1}{a^{6}}+\frac{1}{a^{4}}+\frac{1}{a^{2}}+1+a^{2}+a^{4}\right)\\
&=-\frac{1}{a^{6}}\left(1+a^{6}\right)\left(1+a^{2}+a^{4}\right)。
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\int_{0}^{2\pi}\frac{(\sin 3\theta)^{2}}{1-2a\cos\theta+a^{2}}\,\mathrm{d}\theta&=\frac{\pi}{2a^{6}}\left[\left(1+a^{6}\right)\left(1+a^{2}+a^{4}\right)-\left(1-a^{2}\right)\left(1+a^{2}+a^{4}\right)^{2}\right]\\
&=\left(1+a^{2}+a^{4}\right)\pi。
\end{aligned}
$$

当 $a=0$ 时，有

$$
\int_{0}^{2\pi}(\sin 3\theta)^{2}\,\mathrm{d}\theta\overset{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{=}\oint_{|z|=1}\left(\frac{z^{3}-z^{-3}}{2\mathrm{i}}\right)^{2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}
$$

$$
\begin{aligned}
&=-\frac{1}{4\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{\left(z^{6}-1\right)^{2}}{z^{7}}\,\mathrm{d}z\\
&=-\frac{1}{4\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\left(z^{5}-2\frac{1}{z}+\frac{1}{z^{7}}\right)\mathrm{d}z\\
&=-\frac{1}{4\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\left(z^{5}-2\frac{1}{z}+\frac{1}{z^{7}}\right)\mathrm{d}z\\
&=-\frac{1}{4\mathrm{i}}\left(0-2\cdot 2\pi\mathrm{i}+0\right)=\pi。
\end{aligned}
$$

17. 计算下列各积分。

(1) $\oint_C \frac{z^{2n}}{1+z^n}\,\mathrm{d}z,\ C:|z|=r>1,\ n$ 为自然数；

解： $$\oint_C \frac{z^{2n}}{1+z^n}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[\frac{z^{2n}}{1+z^n},\mathrm{e}^{\frac{(2k+1)\pi\mathrm{i}}{n}}\right]$$

$$=-2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left[\frac{z^{2n}}{1+z^n},\infty\right]$$

$$=\begin{cases}2\pi\mathrm{i}, & n=1;\\ 0, & n\neq 1\in\mathbb{N}。\end{cases}$$ 利用9.(3)的结果。

(2) $\oint_C \frac{z^9}{z^{10}-1}\,\mathrm{d}z,\ C:|z|=4$；

解： $$\oint_C \frac{z^9}{z^{10}-1}\,\mathrm{d}z = -2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left[\frac{z^9}{z^{10}-1},\infty\right]$$

$$=2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left[\frac{\frac{1}{z^9}}{\frac{1}{z^{10}}-1}\frac{1}{z^2},0\right]=2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z\left(1-z^{10}\right)},0\right]=2\pi\mathrm{i}。$$

18. 若函数 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 上及所围成的有界区域内除去点 z_0 外处处解析，且 z_0 是 $f(z)$ 的 n 阶极点，记

$$g(z)=(z-z_0)^n f(z)。$$

证明：

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=\frac{2\pi\mathrm{i}}{(n-1)!}g^{(n-1)}(z_0)。$$

证： 设函数 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 上及所围成的有界区域内除去点 z_0 外处处解析，且 z_0 是 $f(z)$ 的 n 阶极点。则

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^n}\varphi(z),\ 0<|z-z_0|<\delta,$$

其中 $\varphi(z)$ 在 z_0 解析且 $\varphi(z_0)\neq 0$。记

$$g(z)=(z-z_0)^n f(z)。$$

则有 $g(z)$ 在简单闭曲线 C 上及所围成的有界区域内除去点 z_0 外处处解析，且

$$\lim_{z\to z_0} g(z)=\lim_{z\to z_0}\varphi(z)=\varphi(z_0)。$$

即 z_0 是 $g(z)$ 的可去奇点。令 $g(z_0)=\varphi(z_0)$，则 $g(z)$ 在 z_0 解析，从而在简单闭曲线 C 上及所围成的有界区域内解析，且

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^n}。$$

由高阶导数公式， 有

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=\oint_C\frac{g(z)}{(z-z_0)^n}\,\mathrm{d}z=\frac{2\pi\mathrm{i}}{(n-1)!}g^{(n-1)}(z_0)。$$

19. 设函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 均在点 z_0 处解析且 $f(z_0)\neq 0$：

(1) 若 z_0 是 $g(z)$ 的一阶零点，求 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{f(z)}{g^2(z)},z_0\right]$。

(2) 若 z_0 是 $g(z)$ 的二阶零点，求 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{f(z)}{g(z)},z_0\right]$。

解： 设函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 均在点 z_0 处解析且 $f(z_0)\neq 0$。

(1) 若 z_0 是 $g(z)$ 的一阶零点，则

$$g(z)=(z-z_0)\varphi(z),$$

其中 $\varphi(z)$ 在点 z_0 处解析且 $\varphi(z_0)\neq 0$。于是，有

$$\frac{f(z)}{g^2(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^2}\frac{f(z)}{\varphi^2(z)},$$

其中 $\dfrac{f(z)}{\varphi^2(z)}$ 在点 z_0 处解析且 $\dfrac{f(z_0)}{\varphi^2(z_0)}\neq 0$。因此，$z_0$ 是 $\dfrac{f(z)}{g^2(z)}$ 的二阶极点。这样，有

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left[\frac{f(z)}{g^2(z)},z_0\right]&=\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)^2\frac{f(z)}{(z-z_0)^2\varphi^2(z)}\right]'=\lim_{z\to z_0}\left[\frac{f(z)}{\varphi^2(z)}\right]'\\&=\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)\varphi(z)-2f(z)\varphi'(z)}{\varphi^3(z)}=\frac{f'(z_0)\varphi(z_0)-2f(z_0)\varphi'(z_0)}{\varphi^3(z_0)}。\end{aligned}$$

另一方面，由 $\varphi(z)$ 在点 z_0 处解析知

$$\begin{aligned}g(z)&=(z-z_0)\varphi(z)=(z-z_0)\left[\varphi(z_0)+\varphi'(z_0)(z-z_0)+\frac{1}{2!}\varphi''(z_0)(z-z_0)^2+\cdots\right]\\&=\varphi(z_0)(z-z_0)+\varphi'(z_0)(z-z_0)^2+\frac{1}{2!}\varphi''(z_0)(z-z_0)^3+\cdots。\end{aligned}$$

于是，有

$$\varphi(z_0)=g'(z_0),\ \varphi'(z_0)=\frac{1}{2}g''(z_0)。$$

因此

$$\operatorname{Res}\left[\frac{f(z)}{g^2(z)},z_0\right]=\frac{f'(z_0)g'(z_0)-f(z_0)g'(z_0)}{\left[g'(z_0)\right]^3}。$$

(2) 若z_0是$g(z)$的二阶零点，则

$$g(z)=(z-z_0)^2\varphi(z),$$

其中$\varphi(z)$在点z_0处解析且$\varphi(z_0)\neq 0$。于是，有

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^2}\frac{f(z)}{\varphi(z)},$$

其中$\dfrac{f(z)}{\varphi(z)}$在点z_0处解析且$\dfrac{f(z_0)}{\varphi(z_0)}\neq 0$。因此，$z_0$是$\dfrac{f(z)}{g(z)}$的二阶极点。这样，有

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left[\frac{f(z)}{g(z)},z_0\right]&=\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)^2\frac{f(z)}{(z-z_0)^2\varphi(z)}\right]'=\lim_{z\to z_0}\left[\frac{f(z)}{\varphi(z)}\right]'\\&=\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)\varphi(z)-f(z)\varphi'(z)}{\varphi^2(z)}=\frac{f'(z_0)\varphi(z_0)-f(z_0)\varphi'(z_0)}{\varphi^2(z_0)}。\end{aligned}$$

另一方面，由$\varphi(z)$在点z_0处解析知

$$\begin{aligned}g(z)&=(z-z_0)^2\varphi(z)=(z-z_0)^2\left[\varphi(z_0)+\varphi'(z_0)(z-z_0)+\frac{1}{2!}\varphi''(z_0)(z-z_0)^2+\cdots\right]\\&=\varphi(z_0)(z-z_0)^2+\varphi'(z_0)(z-z_0)^3+\frac{1}{2!}\varphi''(z_0)(z-z_0)^4+\cdots。\end{aligned}$$

于是，有

$$\varphi(z_0)=\frac{1}{2}g''(z_0),\ \varphi'(z_0)=\frac{1}{6}g'''(z_0)。$$

因此

$$\operatorname{Res}\left[\frac{f(z)}{g(z)},z_0\right]=\frac{6f'(z_0)g''(z_0)-2f(z_0)g''(z_0)}{3\left[g''(z_0)\right]^2}。$$

20. 设函数$\varphi(z)$在点z_0处解析，$\varphi'(z_0)\neq 0$，函数$f(\zeta)$在点$\zeta_0=\varphi(z_0)$处有一阶极点，证明

$$\operatorname{Res}\left[f\left[\varphi(z)\right],z_0\right]=\frac{1}{\varphi'(z_0)}\operatorname{Res}\left[f(\zeta),\zeta_0\right]。$$

证：设函数$\varphi(z)$在点z_0处解析，$\varphi'(z_0)\neq 0$，函数$f(\zeta)$在点$\zeta_0=\varphi(z_0)$处有一阶极点，则

$$f(\zeta)=\frac{a_{-1}}{\zeta-\zeta_0}+a_0+a_1(\zeta-\zeta_0)+\cdots=\frac{a_{-1}}{\zeta-\zeta_0}+g(\zeta),$$

其中$g(\zeta)$在点ζ_0处解析。从而

$$f\left[\varphi(z)\right]=\frac{a_{-1}}{\varphi(z)-\varphi(z_0)}+g\left[\varphi(z)\right],$$

其中$g\left[\varphi(z)\right]$在点z_0处解析。点z_0是函数$f\left[\varphi(z)\right]$的孤立奇点。由于$\varphi'(z_0)\neq 0$，点z_0是函数$f\left[\varphi(z)\right]$的一阶极点。因此

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left[f\left[\varphi(z)\right],z_0\right]&=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\left\{\frac{a_{-1}}{\varphi(z)-\varphi(z_0)}+g\left[\varphi(z)\right]\right\}\\&=\lim_{z\to z_0}\left[\frac{a_{-1}}{\dfrac{\varphi(z)-\varphi(z_0)}{z-z_0}}+(z-z_0)g\left[\varphi(z)\right]\right]\\&=\frac{a_{-1}}{\varphi'(z_0)}=\frac{1}{\varphi'(z_0)}\operatorname{Res}\left[f(\zeta),\zeta_0\right]。\end{aligned}$$