习题六 傅里叶变换

1. 求下列函数的傅里叶变换。

(1) $f(t)=\begin{cases}E, & 0\le t\le\tau\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$, $E,\tau>0$；

解： $F(\omega)=\dfrac{E\mathrm{i}}{\omega}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}-1\right)$。

(2) $f(t)=\begin{cases}0, & -\infty<t<-1\\ -1, & -1\le t<0\\ 1, & 0\le t<1\\ 0, & 1\le t<\infty\end{cases}$。

解： $F(\omega)=\dfrac{2\mathrm{i}}{\omega}(\cos\omega-1)$。

2. 求下列函数的傅里叶变换，并推证下列积分结果。

(1) $f(t)=\mathrm{e}^{-|t|}\cos t$，证明

$$\int_0^{\infty}\frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}\cos\omega t\ \mathrm{d}\omega=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-|t|}\cos t\text{；}$$

解： $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-|t|}\cos t\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-|t|}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{[1+\mathrm{i}(1-\omega)]t}\mathrm{d}t+\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{[-1+\mathrm{i}(1-\omega)]t}\mathrm{d}t\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{[1-\mathrm{i}(1+\omega)]t}\mathrm{d}t+\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{[-1-\mathrm{i}(1+\omega)]t}\mathrm{d}t\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+\mathrm{i}(1-\omega)}-\frac{1}{-1+\mathrm{i}(1-\omega)}+\frac{1}{1-\mathrm{i}(1+\omega)}-\frac{1}{-1-\mathrm{i}(1+\omega)}\right]$$
$$=\frac{2(\omega^2+2)}{\omega^4+4}\text{。}$$

故

$$f(t)=\mathrm{e}^{-|t|}\cos t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\left(\omega^2+2\right)}{\omega^4+4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}\cos\omega t\ \mathrm{d}\omega\ 。$$

即

$$\int_0^{\infty}\frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}\cos\omega t\ \mathrm{d}\omega=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-|t|}\cos t\ 。$$

(2) $f(t)=\begin{cases}\sin t, & |t|\le\pi\\ 0, & |t|>\pi\end{cases}$，证明

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega\pi\sin\omega t}{1-\omega^2}\ \mathrm{d}\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\sin t, & |t|\le\pi\\ 0, & |t|>\pi\end{cases};$$

解： $F(\omega)=\int_{-\pi}^{\pi}\sin t\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=-\mathrm{i}\int_{-\pi}^{\pi}\sin t\ \sin\omega t\ \mathrm{d}t$

$=-2\mathrm{i}\int_0^{\pi}\sin t\ \sin\omega t\ \mathrm{d}t$

$=-2\mathrm{i}\frac{\sin\omega\pi}{1-\omega^2}$。

故

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(-2\mathrm{i}\frac{\sin\omega\pi}{1-\omega^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\ \mathrm{d}\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega\pi\sin\omega t}{1-\omega^2}\ \mathrm{d}\omega\ 。$$

即

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega\pi\sin\omega t}{1-\omega^2}\ \mathrm{d}\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\sin t, & |t|\le\pi\\ 0, & |t|>\pi\end{cases}。$$

(3) $f(t)=\begin{cases}1-t^2, & |t|\le 1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$，求积分

$$\int_0^{\infty}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x\ 。$$

解： $F(\omega)=\int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=2\int_0^1\left(1-t^2\right)\cos\omega t\ \mathrm{d}t$

$$=\frac{4(\sin\omega-\omega\cos\omega)}{\omega^3}。$$

故

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4(\sin\omega-\omega\cos\omega)}{\omega^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{(\sin\omega-\omega\cos\omega)\cos\omega t}{\omega^3}\,\mathrm{d}\omega,\qquad |t|\le 1。$$

令 $t=\frac{1}{2}$， 有

$$\int_0^{\infty}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x=-\frac{3\pi}{16}。$$

3. 计算下列积分。

(1) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\sin\omega_0 t\,\mathrm{d}t$；

解： $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\sin\omega_0 t\,\mathrm{d}t=0$。

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-3)(t^2+1)\,\mathrm{d}t$；

解： $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-3)(t^2+1)\,\mathrm{d}t=10$。

(3) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$；

解： $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t=\pi-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$。

注意到 $\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-|t|}\right]=\frac{2}{1+\omega^2}$， 由书 p150 页性质 6.5.6， 有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2}{1+\omega^2}\right)^2 \mathrm{d}\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{-|t|}\right)^2 \mathrm{d}t=2\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t=1\text{。}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(1+t^2\right)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\text{。}$$

从而

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t^2}{\left(1+t^2\right)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\quad\text{。}$$

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^4 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ 。

解： $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^4 t}{t^2}\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 t-\frac{1}{4}\sin^2 2t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2\mathrm{d}u\text{。}$$

令

$$f(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & |t|\le 1;\\ 0, & |t|>1\text{。}\end{cases}$$

则

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\varpi}{\omega}\right)^2\mathrm{d}\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(t)\right]^2\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\text{。}$$

从而

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^4 t}{t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\text{。}$$

4. 已知某函数 $f(t)$ 的傅氏变换为 $F(\omega)=\mathcal{F}\left[f(t)\right]=\dfrac{\sin\omega}{\omega}$，求该函数 $f(t)$。

解： $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}(\cos\omega t+\mathrm{i}\sin\omega t)\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}\,\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(1+t)\omega+\sin(1-t)\omega}{\omega}\,\mathrm{d}\omega$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}, & |t|<1;\\ 0, & |t|>1。\end{cases}$$

5. 证明：如果 $\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)}\right]=F(\omega)$，其中 $\varphi(t)$ 为一实函数，则

$$\mathcal{F}[\cos\varphi(t)]=\frac{1}{2}\left[F(\omega)+\overline{F(-\omega)}\right],$$
$$\mathcal{F}[\sin\varphi(t)]=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[F(\omega)-\overline{F(-\omega)}\right]$$

其中 $\overline{F(-\omega)}$ 为 $F(-\omega)$ 的复共轭函数。

证： $\mathcal{F}[\cos\varphi(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}\cos\varphi(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi(t)}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t+\overline{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[F(\omega)+\overline{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(-\omega)t}\mathrm{d}t}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[F(\omega)+\overline{F(-\omega)}\right]。$$

另一等式同理可证。

7. 求下列函数的傅里叶变换。

(1) $f(t)=\begin{cases}E, & |t|<2\\ 0, & |t|\geq 2\end{cases}, E>0$；

(2) $g(t)=\begin{cases}-E, & |t|<1\\ 0, & |t|\geq 1\end{cases}, E>0$；

(3) $h(t)=3f(t)-4g(t)$；

(4) $f(t)=\cos t\sin t$ 。

答案： (1) $2E\dfrac{\sin 2\omega}{\omega}$。

(2) $-2E\dfrac{\sin\omega}{\omega}$

(3) $3F(\omega)-4G(\omega)=\dfrac{6E\sin 2\omega+8E\sin\omega}{\omega}$。

(4) $\mathrm{i}\pi\left[\delta(\omega+2)-\delta(\omega-2)\right]$。

9. 求函数 $f(t)=\sin\left(5t+\dfrac{2}{3}\right)$ 的傅里叶变换(注：分别利用线性性质，先坐标放缩再位移，先位移再坐标放缩三种方法求解。)

解： (1) $\mathcal{F}[f(t)]=\mathcal{F}\left[\sin 5t\cos\dfrac{2}{3}+\cos 5t\sin\dfrac{2}{3}\right]$

$$=\cos\frac{2}{3}\mathcal{F}[\sin 5t]+\sin\frac{2}{3}\mathcal{F}[\cos 5t]$$

$$=\cos\frac{2}{3}\{\pi\mathrm{i}[\delta(\omega+5)-\delta(\omega-5)]\}+\sin\frac{2}{3}\{\pi[\delta(\omega+5)-\delta(\omega-5)]\}。$$

(2) $\mathcal{F}[f(t)]=\mathcal{F}\left[\sin\left(5t+\dfrac{2}{3}\right)\right]$

$$\overset{\text{缩放}}{=}\frac{1}{5}\mathcal{F}\left[\sin\left(t+\frac{2}{3}\right)\right]\Bigg|_{\omega=\frac{\omega}{5}}\overset{\text{位移}}{=}\frac{1}{5}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2}{3}\omega}\pi\mathrm{i}[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]\right\}\Bigg|_{\omega=\frac{\omega}{5}}$$

$$=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2}{15}\omega}\pi\mathrm{i}\left[\delta\left(\frac{\omega}{5}+1\right)-\delta\left(\frac{\omega}{5}-1\right)\right]$$

$$\overset{\text{性质6.3.2}}{=}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2}{15}\omega}\pi\mathrm{i}[\delta(\omega+5)-\delta(\omega-5)]$$

$$\overset{\text{性质6.3.4}}{=}\pi\mathrm{i}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2}{3}}\delta(\omega+5)-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2}{3}}\delta(\omega-5)\right]$$

$$=\cos\frac{2}{3}\{\pi\mathrm{i}[\delta(\omega+5)-\delta(\omega-5)]\}+\sin\frac{2}{3}\{\pi[\delta(\omega+5)-\delta(\omega-5)]\}。$$

(3) $\mathcal{F}\left[f(t)\right]=\mathcal{F}\left[\sin\left(5t+\frac{2}{3}\right)\right]$

$=\mathcal{F}\left[\sin 5\left(t+\frac{2}{15}\right)\right]$

$=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2}{15}\omega}\mathcal{F}\left[\sin 5t\right]$

$=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2}{15}\omega}\pi\mathrm{i}\left[\delta(\omega+5)-\delta(\omega-5)\right]$

$=\cos\frac{2}{3}\left\{\pi\mathrm{i}\left[\delta(\omega+5)-\delta(\omega-5)\right]\right\}+\sin\frac{2}{3}\left\{\pi\left[\delta(\omega+5)-\delta(\omega-5)\right]\right\}$。

10. 设 $F(\omega)=\mathcal{F}\left[f(t)\right]$，证明：

$$F(-\omega)=\mathcal{F}\left[f(-t)\right]。$$

证： $\mathcal{F}\left[f(-t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}f(-t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$

$\overset{u=-t}{=}\int_{\infty}^{-\infty}f(u)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(-u)}\mathrm{d}u$

$=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(-\omega)\mathrm{t}}\mathrm{d}u$

$=F(-\omega)$。