

习题七 拉普拉斯变换

1. 求下列函数的拉氏变换。

(1) $f(t) = \sin \frac{t}{3}$;

解: $F(s) = \frac{3}{1+9s^2}$, $\text{Re}(s) > 0$ 。

(2) $f(t) = e^{-2t}$;

解: $F(s) = \frac{1}{s+2}$, $\text{Re}(s) > -2$ 。

(3) $f(t) = t^2$;

解: $F(s) = \frac{2}{s^3}$, $\text{Re}(s) > 0$ 。

(4) $f(t) = \cos^2 t$ 。

解: $F(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+4} \right)$, $\text{Re}(s) > 0$ 。

2. 求下列函数的拉氏变换。

(1) $f(t) = \begin{cases} 3, & 0 \leq t < 2 \\ -1, & 2 \leq t < 4 \\ 0, & t \geq 4 \end{cases}$;

解: $F(s) = \frac{1}{s} (3 - 4e^{-2s} + e^{-4s})$ 。

(2) $f(t) = \begin{cases} t+1, & 0 \leq t < 3 \\ 0, & t \geq 3 \end{cases}$;

解: $F(s) = \frac{1}{s^2}(1 + s - (1 + 4s)e^{-3s})$ 。

(3) $f(t) = \delta(t)\cos t - u(t)\sin t$ 。

解: $F(s) = 1 - \frac{1}{s^2 + 1}$ 。

3. 设 $f(t)$ 是以 2π 为周期的函数, 且在一个周期内的表达式为

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 < t \leq \pi \\ 0, & \pi < t \leq 2\pi \end{cases},$$

求 $\mathcal{L}[f(t)]$ 。

解:
$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{2\pi} f(t) e^{-st} dt + \int_{2\pi}^{4\pi} f(t) e^{-st} dt + \int_{4\pi}^{6\pi} f(t) e^{-st} dt + \dots \\ &= \int_0^{2\pi} f(t) e^{-st} dt + e^{-2\pi s} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-st} dt + e^{-4\pi s} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-st} dt + \dots \\ &= [1 + e^{-2\pi s} + e^{-4\pi s} + e^{-6\pi s} + \dots] \int_0^{2\pi} f(t) e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \int_0^{\pi} \sin t e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{(1 - e^{-2\pi s})(1 + s^2)}. \end{aligned}$$

4. 求下列函数的拉氏变换。

(1) $f(t) = 3t^4 - 2t^{\frac{3}{2}} + 6$;

解: $F(s) = 3 \frac{\Gamma(5)}{s^5} - 2 \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{s^{\frac{5}{2}}} + \frac{6}{s}$ 。

(2) $f(t) = 1 - te^t$;

解: $F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{(s-1)^2}$ 。

(3) $f(t) = \frac{t}{2a} \sin at, a > 0$;

解: $F(s) = \frac{1}{2a} L[t \sin at] = \frac{1}{2a} \left(-\frac{d}{ds} L[\sin at] \right) = \frac{s}{(s^2 + a^2)^2}$ 。

(4) $f(t) = \frac{\sin at}{t}, a > 0$;

解: $F(s) = \int_s^\infty L[\sin at] ds = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{s}{a}$ 。

(5) $f(t) = e^{-3t} \cos 4t$ 。

解: $F(s) = \frac{s+3}{(s+3)^2 + 4^2}$ 。

8. 求 $f_1(t) = \sin\left(t - \frac{2}{3}\right)$ 与 $f_2(t) = u\left(t - \frac{2}{3}\right) \sin\left(t - \frac{2}{3}\right)$ 的拉氏变换。对比两者的

结果, 你可以得到什么启示?

解: $F_1(s) = L\left[\sin\left(t - \frac{2}{3}\right)\right]$

$$= \cos \frac{2}{3} L[\sin t] - \sin \frac{2}{3} L[\cos t]$$

$$= \cos \frac{2}{3} \frac{1}{s^2 + 1} - \sin \frac{2}{3} \frac{s}{s^2 + 1}$$
。

$$\begin{aligned}
F_2(s) &= L\left[u\left(t-\frac{2}{3}\right)\sin\left(t-\frac{2}{3}\right)\right] \\
&= \int_0^{\infty} u\left(t-\frac{2}{3}\right)\sin\left(t-\frac{2}{3}\right)e^{-st} dt \\
&= \int_{\frac{2}{3}}^{\infty} u\left(t-\frac{2}{3}\right)\sin\left(t-\frac{2}{3}\right)e^{-st} dt \\
&= \int_0^{\infty} u(x)\sin x e^{-s\left(x+\frac{2}{3}\right)} dx \\
&= e^{-\frac{2}{3}s} \int_0^{\infty} u(x)\sin x e^{-sx} dx \\
&= e^{-\frac{2}{3}s} L[\sin t] \\
&= e^{-\frac{2}{3}s} \frac{1}{s^2+1}.
\end{aligned}$$

对比两者结果，我们可以看到单位阶跃函数的作用。 $f_1(t)$ 是将 $\sin t$ 的图像做了位移，但信号响应还是零时刻， $f_2(t)$ 是将 $\sin t$ 的图像做了位移，同时信号响应时刻延迟到 $\frac{2}{3}$ 。

11. 求下列函数的拉氏逆变换。

$$(1) F(s) = \frac{1}{s^2+4};$$

解： $f(t) = \frac{1}{2}\sin 2t$ 。

$$(2) F(s) = \frac{1}{(s+1)^4};$$

解： $f(t) = \frac{1}{6}t^3e^{-t}$ 。

$$(3) F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s-3)};$$

解： $f(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{3t}$ 。

$$(4) F(s) = \frac{2s+5}{s^2+4s+13} \circ$$

$$\text{解: } f(t) = 2e^{-2t} \cos 3t + \frac{1}{3}e^{-2t} \sin 3t \circ$$

15. 试求下列函数的拉氏逆变换。

$$(1) F(s) = \frac{1}{(s^2+2^2)^2};$$

$$\text{解: } f(t) = \frac{1}{2a^3}(\sin at - at \cos at) \circ$$

$$(2) F(s) = \frac{(s+1)e^{-\pi s}}{s^2+s+1} \circ$$

$$\text{解: } L^{-1}\left(\frac{s+1}{s^2+s+1}\right) = e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \circ$$

$$\therefore f(t) = L^{-1}\left[\frac{(s+1)e^{-\pi s}}{s^2+s+1}\right] = e^{-\frac{t-\pi}{2}}\left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin \frac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi)\right) \circ$$

16. 求下列函数的拉氏逆变换。

$$(1) F(s) = \frac{1}{(s+4)^2};$$

$$\text{解: } f(t) = te^{-4t} \circ$$

$$(2) F(s) = \frac{1}{s^4+5s^2+4};$$

$$\text{解: } f(t) = \frac{1}{3}\left(\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) \circ$$

$$(3) F(s) = \frac{2s+1}{s(s+1)(s+2)};$$

解: $f(t) = \frac{1}{2} + e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t}$ 。

(4) $F(s) = \arctan \frac{1}{s}$;

解: $F'(s) = \frac{-1}{s^2+1}$ 。

$$-t f(t) = L^{-1}[F'(s)] = -L\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = -\sin t$$

$$f(t) = \frac{\sin t}{t}$$
。

(5) $F(s) = \ln \frac{s^2-1}{s^2}$;

解: $F'(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-1} - 2\frac{1}{s}$ 。

$$-t f(t) = L^{-1}[F'(s)] = L\left[\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-1} - 2\frac{1}{s}\right] = e^{-t} + e^t - 2u(t)$$
。

$$f(t) = -\frac{1}{t}(e^t + e^{-t} - 2)$$
。

(6) $F(s) = \frac{1+e^{-2s}}{s^2}$;

解: $f(t) = t + (t-2)u(t-2)$ 。

(7) $F(s) = \frac{s^3+5s^2+9s+7}{(s+1)(s+2)}$

解: $f(t) = \delta'(t) + 2\delta(t) + 2e^{-t} - e^{-2t}$ 。

18. 试求下列微分方程或微分方程组初值问题的解。

(1) $x'' + 4x' + 3x = e^{-t}$, $x(0) = x'(0) = 1$;

解: $x(t) = \frac{1}{4}(2t+7)e^{-t} - \frac{3}{4}e^{-3t}$ 。

(2) $x'' - x' = 4\sin t + 5\cos 2t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = -2$;

解: $x(t) = 1 - 2e^t - 4 + 2e^t + (1+i)e^{it} + (1-i)e^{-it}$
 $+ e^t - \frac{1}{4}(2-i)e^{2it} - \frac{1}{4}(2+i)e^{-2it}$
 $= -3 + 2\cos t - 2\sin t - \cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t$ 。

(3) $\begin{cases} x' + x - y = e^t \\ 3x + y' - 2y = 2e^t \end{cases}$, $x(0) = y(0) = 1$ 。

解: $x(t) = e^t$, $y(t) = e^t$ 。