作业一 A组

1 用直角坐标表示下列复数：

(1) $\mathbf{i}^{2017}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}\right)^{2017}+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}\right)^{2017}+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}\right)^{2017}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}\right)^{2017}$;

(2) $1+\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{3}+\cdots+\cos\frac{2017\pi}{3}$;

(3) $\dfrac{(-1+\sqrt{3}\mathbf{i})^8}{1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}\right)^{2017}}$;

2 证明下列等式并说明(1)式的几何意义：

(1) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_1|^2\right)$;

(2) $|1-\overline{z_1}z_2|^2-|z_1-z_2|^2=\left(1-|z_1|^2\right)\left(1-|z_2|^2\right)$.

3 描出下列复平面区域并指明其是单连通还是多连通：

(1) $\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|>1$，其中$|a|<1$;

(2) $\left|\dfrac{a-z}{\overline{a}+z}\right|<1$，其中$\mathrm{Re}a>0$;

(3) 区域$\{1<x<2,0<y<4\}$在函数e^z下的像;

(4) 区域$\{1<x<2,0<y<8\}$在函数e^z下的像.

4 描述下列不等于确定的集合并指明这些集合是开的还是闭的，无界的还是有界的，单联通还是多连通的：

(1) $|z-1|<|z+3|$;

(2) $1<\arg z<1+\pi$;

(3) $|z-1|<4|z+1|$;

(4) $\dfrac{1}{2}\leqslant\left|z-\dfrac{1}{2}\right|\leqslant\dfrac{3}{2}$;

(5) $|z|+\mathrm{Re}z<1$;

5 用复变量z显式描述下列函数：

(1) $f(z)=3x+y+\mathbf{i}(3y-x)$;

(2) $f(z)=e^{-y}\sin x-\mathbf{i}e^{-y}\cos x$;

(3) $f(z)=(z^2-2)e^{-x}e^{-\mathbf{i}y}$;

6 确定下列函数在$z=0$处极限是否存在，并在存在的情况下求极限值：

(1) $\dfrac{\mathrm{Re}z}{z}$; (2) $\dfrac{z}{|z|}$; (3) $\dfrac{\mathrm{Re}(z^2)}{|z|^2}$; (4) $\dfrac{z\mathrm{Re}z}{|z|^2}$.

7 考察下列函数的连续性：

(1) 证明函数

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{[\mathrm{Re}(z^2)]^2}{|z|^2}, & z\neq 0;\\ 0, & z=0\end{cases}$$

在$z=0$处连续；

(2) 证明函数

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^6}, & z\neq 0;\\ 0, & z=0\end{cases}$$

在$z=0$处不连续. 证明当z沿着过原点直线趋近于0时，$f(z)$也趋近于0. 此例子说明了沿直线通向一点的极限存在不是极限存在的充分条件.

8 证明下列等式：

(1) $\cos^2 z+\sin^2 z=1$;

(2) $\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2$;

(3) $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$;

(4) $\tan 2z=\dfrac{2\tan z}{1-\tan^2 z}$;

(5) $\mathrm{ch}(z_1+z_2)=\mathrm{ch}z_1\mathrm{ch}z_2+\mathrm{sh}z_1\mathrm{sh}z_2$.

9 把幅角主值函数$\arg z$表示成关于x,y的二元函数.

10 用直角坐标表示下列复数：

(1)$\mathrm{Ln}\mathbf{i}$; (2) $\ln(-2+3\mathbf{i})$; (3) $\sqrt[6]{-\mathbf{i}}$;

(4) $\mathrm{Arcsin}\dfrac{1}{2}$; (5) $\mathrm{Arctan}(1+2\mathbf{i})$; (6) $\mathrm{Arch}2\mathbf{i}$.

11 证明在一个不含零点的单连通区域D中存在一个(无穷多个)函数$\mathrm{Ln}z$的连续(解析)单值分支，存在一个(无穷多个)函数$\mathrm{Arg}z$的连续单值分支.

12 证明函数$f_1(z)=\overline{z}$和函数$f_2(z)=\mathrm{Re}z$在复平面上处处不可导.

13 证明：如果函数$f(z)=u+\mathbf{i}v$在区域D上解析且满足下列条件之一，则$f(z)$是常数：

(1) $f(z)$恒取实值;

(2) $\overline{f(z)}$在D内解析;

(3) $|f(z)|$在D内是一个常数;

(4) $\arg f(z)$在D内是一个常数;

(5) $au+bv=c$，其中a,b与c为不全为零的实常数；

(6) $v=u^2$.

14 验证下列函数是调和函数并求以$z=x+\mathbf{i}y$为自变量的解析函数$w=f(z)=u+\mathbf{i}v$：

(1) $v=\arctan\dfrac{y}{x}(x>0)$;

(2) $u=e^x(y\cos y+x\sin y)+x+y, f(0)=1$;

(3) $u=(x-y)(x^2+4xy+y^2)$;

(4) $v=\dfrac{y}{x^2+y^2}, f(2)=0$.

15 设函数$f(z)$在上半复平面解析，证明函数$\overline{f(\overline{z})}$在下半复平面解析.

16 计算下列复积分：

(1) 计算积分$\oint_C z|z|\mathrm{d}z$，其中闭路C由点到点的直线段与上半单位圆周组成;

(2) 计算

$$\oint_C \frac{z}{\overline{z}}\mathrm{d}z,$$

其中C是闭区域$\{1\leqslant r\leqslant 2, y\geqslant 0\}$的正向边界.

17 设$f(z)$是单连通区域D内除点z_0外解析的函数且$\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=0$，则对于任一不通过点$z_0$的区域$D$中的简单光滑闭曲线$C$恒有

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0.$$

18 沿曲线正向计算下列复积分：

(1) $\displaystyle\oint_C \frac{e^z}{z-2}\mathrm{d}z, C:|z-2|=1$;

(2) $\displaystyle\oint_C \frac{\cos\pi z}{(z-1)^5}\mathrm{d}z, C:|z|=r>1$;

(3) $\oint_C \frac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{2})^2}\mathrm{d}z, C:|z|=2;$

(4) $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)(z^2+4)}, C:|z|=\frac{3}{2};$

(5) $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2-a^2}, C:|z-a|=a;$

(6) $\oint_C \frac{\cos z}{z^3}\mathrm{d}z, C=C_1+C_2^-, C_1:|z|=2, C_2:|z|=3;$

(7) $\oint_C \frac{e^{-z}\sin z}{z^3}\mathrm{d}z, C:|z-\mathbf{i}|=2;$

(8) $\oint_C \frac{3z+2}{(z^4-1)}\mathrm{d}z, C:|z-(1+\mathbf{i})|=\sqrt{2}.$

19 设函数$f(z)$与$g(z)$在区域D内处处解析. 设C是D内的一条简单光滑闭曲线且C内部全部属于D. 证明若等式关系$f(z)=g(z)$对C上所有点成立，则等式关系$f(z)=g(z)$对C内部所有点也成立.

20 设函数$f(z)$在$|z|\geqslant 1$上解析且$f(0)=1$，计算积分

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{|z|=1}\left\{2\pm\left(z+\frac{1}{z}\right)\right\}f(z)\frac{\mathrm{d}z}{z}$$

再利用极坐标导出下式

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{\mathbf{i}\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta=2+f'(0),$$
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{\mathbf{i}\theta})\sin^2\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta=2-f'(0).$$

21 计算下列复积分：

(1) $\int_{C_1}\frac{1}{z}\mathrm{d}z$和$\int_{C_2}\frac{1}{z}\mathrm{d}z$，其中$C_1$ 和C_2 分别为从点$(1,0)$出发到点$(-1,0)$ 的上半和下半圆周;

(2) 正向积分

$$\oint_{|z|=r}\frac{z\mathrm{e}^z\mathrm{d}z}{(z-a)^8}, |a|<r;$$

(3) 正向积分

$$\oint_{|z|=2}\frac{\mathrm{e}^z\mathrm{d}z}{z(1-z)^3}.$$

22 对于$|a|<1$证明下列正向积分等式：

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{|z|=1}\frac{z+a}{z-a}\cdot z^{n-1}\mathrm{d}z=\begin{cases}2a^n, & n\geqslant 1,\\ 0, & n<0.\end{cases}$$

23 计算正向积分

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{1+z^4},$$

其中C是椭圆$x^2-xy+y^2+x+y=0$的正向边界.