作业一 B组

1 证明下列不等式并说明(1)式的几何意义：

(1) $\left|\dfrac{z}{|z|}-1\right| \leqslant |\arg z|, z \neq 0;$

(2) $|z_1+z_2| \geqslant \dfrac{1}{2}(|z_1|+|z_2|)\left|\dfrac{z_1}{|z_1|}+\dfrac{z_2}{|z_2|}\right|, z_1z_2 \neq 0.$

2 证明柯西-黎曼方程的极坐标形式是

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\cdot\cdot\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

3 设是解析函数. 证明：

(1) $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}|f(z)|\right)^2+\left(\dfrac{\partial}{\partial y}|f(z)|\right)^2=|f'(z)|^2;$

(2) $\left[\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right]|f(z)|^2=4|f'(z)|^2.$

4 证明函数

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{x^3y(y-\mathbf{i}x)}{x^6+y^2}, & z \neq 0;\\ 0, & z=0\end{cases}$$

(1) 在$z=0$处连续；

(2) 在$z=0$处满足Cauchy-Riemann条件；

(3) 在$z=0$处沿过原点直线都可导且导数都是0；

(4) 在$z=0$处不可导.

5 设C为一内部包含实数轴上线段$[a,b]$的简单光滑闭曲线，函数$f(z)$在C内及其上解析且在$[a,b]$上取实值，证明对于$[a,b]$上任两点z_1,z_2，总存在$[a,b]$上的点z_0满足

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}\mathrm{d}z=\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z.$$

6 对于在整个复平面上解析的函数$f(z)$，计算正向积分

$$\oint_{|z|=R}\frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-a)(z-b)}, |a|<R, |b|<R.$$

并用此积分证明Liouville定理.

7 用复积分证明对于左半复平面($\mathrm{Re}z < 0$)上两个复数z_1和z_2，下列不等式成立：

$$|\mathrm{e}^{z_1} - \mathrm{e}^{z_2}| \leqslant |z_1 - z_2|.$$

8 设$f(z)$是一个复平面上的解析函数，$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$是一个首项系数为1的复多项式，证明下列不等式成立：

$$|f(0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{\mathbf{i}\theta})p(e^{\mathbf{i}\theta})|\mathrm{d}\theta.$$

9 证明存在正实数M，对于任意一个多项式$p(z)$下列不等式都成立：

$$\max_{|z|=1} |z^{-1} - p(z)| \geqslant M.$$

10 计算定积分

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} - 3\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta.$$