作业三

1 求下列函数的傅里叶积分公式：

(1) $f(t)=\begin{cases}1-t^2, & |t|<1,\\ 0, & |t|>1;\end{cases}$

(2) $f(t)=\begin{cases}e^{-t}\sin 2t, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0;\end{cases}$

(3) $f(t)=\begin{cases}-1, & -1<t<0,\\ 1, & 0<t<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

2 求下列函数的傅里叶变换：

(1) $f(t)=\begin{cases}1-|t|, & |t|\leqslant 1,\\ 0, & |t|>1;\end{cases}$

(2) $f(t)=\begin{cases}E, & 0\leqslant t\leqslant \tau,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ $(E,\tau>0)$;

(3) $f(t)=\begin{cases}e^{-t}, & |t|<\dfrac{1}{2},\\ 0, & |t|>\dfrac{1}{2};\end{cases}$

(4) $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$;

(5) $f(t)=\begin{cases}e^{-t}\sin t, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0;\end{cases}$

(6) $f(t)=\begin{cases}0, & t<-1,\\ -1, & -1\leqslant t<0,\\ 1, & 0\leqslant t<1,\\ 0, & t\geqslant 1.\end{cases}$

3 求下列函数的傅里叶变换：

(1) $\dfrac{1}{1+t^2}$;

(2) $te^{-a|t|}(a>0)$.

4 求下列函数的傅里叶变换：

(1) $f(t)=e^{-\alpha t}u(t)\cdot\sin\omega_0 t$ $(\alpha>0)$;

(2) $f(t)=e^{-\alpha t}u(t)\cdot\cos\omega_0 t$ $(\alpha>0)$;

(3) $f(t)=e^{\mathrm{i}\omega_0 t}u(t-t_0)$.

5 求下列函数的卷积：

(1) $f_1(t)=u(t)$, $f_2(t)=e^{-\alpha t}u(t)$;

(2) $f_1(t)=e^{-\alpha t}u(t)$, $f_2(t)=\sin t\cdot u(t)$;

(3) $f_1(t)=e^{-t}u(t)$, $f_2(t)=\begin{cases}\sin t, & 0<t<\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

6 求下列函数的拉普拉斯变换：

(1) $f(t)=\begin{cases}3, & 0\leqslant t<2,\\ -1, & 2\leqslant t<4,\\ 0, & t\geqslant 4;\end{cases}$

(2) $f(t)=\begin{cases}t+1, & 0<t<3,\\ 0, & t\geqslant 3;\end{cases}$

(3) $f(t)=\begin{cases}3, & t<\dfrac{\pi}{2},\\ \cos t, & t>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

7 求下列函数的拉普拉斯变换：

(1) $f(t)=1-te^{t}$;

(2) $f(t)=\dfrac{t}{2a}\sin at$;

(3) $f(t)=\dfrac{\sin at}{t}$;

(4) $f(t)=5\sin 2t-3\cos 2t$;

(5) $f(t)=e^{-2t}\sin 6t$;

(6) $f(t)=u(3t-5)$;

(7) $f(t)=\dfrac{e^{3t}}{\sqrt{t}}$;

(8) $f(t)=u(1-e^{-t})$;

(9) $f(t)=e^{-5t}\displaystyle\int_0^t\frac{\sin 2\tau}{\tau}\mathrm{d}\tau$;

(10) $f(t)=t^2\displaystyle\int_0^t e^{-4\tau}\sin 2\tau\mathrm{d}\tau$.

8 求下列函数的拉普拉斯逆变换：

(1) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+4}$;

(2) $F(s)=\dfrac{1}{s^4}$;

(3) $F(s)=\dfrac{1}{(s+1)^4}$;

(4) $F(s)=\dfrac{1}{s+3}$;

(5) $F(s)=\dfrac{2s+3}{s^2+9}$;

(6) $F(s)=\dfrac{s+3}{(s+1)(s-3)}$;

(7) $F(s)=\dfrac{s+1}{s^2+s-6}$;

(8) $F(s)=\dfrac{2s+5}{s^2+4s+13}$.

9 求下列函数的拉普拉斯逆变换：

(1) $F(s)=\dfrac{1}{(s^2+4)^2}$;

(2) $F(s)=\dfrac{2s+1}{s(s+1)(s+2)}$;

(3) $F(s)=\dfrac{1}{s^4+5s^2+4}$;

(4) $F(s)=\ln\dfrac{s^2-1}{s^2}$;

(5) $F(s)=\dfrac{1+e^{-2s}}{s^2}$;

(6) $F(s)=\dfrac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2(s^2+9)}$;

(7) $F(s)=\dfrac{s^2-3}{(s+2)(s-3)(s^2+2s+5)}$.

10 求下列微分方程(组)初值问题的解：

(1) $x''+k^2x=0, x(0)=A, x'(0)=B$;

(2) $x''+4x'+3x=e^{-t}, x(0)=x'(0)=1$;

(3) $x^{(4)}+2x'''-2x'-x=\delta(t), x(0)=x'(0)=x''(0)=x'''(0)=0$;

(4) $\begin{cases} x'+x-y=e^t, \\ 3x+y'-2y=2e^t, \end{cases}$ $x(0)=y(0)=1$.