作业二 A组

1 求下列幂级数的收敛半径：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}z^n$; (2) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}z^n$;

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}[3+(-1)^n]^n z^n$; (4) $\sum_{n=0}^{\infty}\cos(\mathbf{i}n)z^n$;

(5) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+a^n)z^n$, $a\in\mathbb{R}$;

(6) $1+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}z^n$, 其中复常数$\alpha,\beta,\gamma$不是负整数和0.

2 将下列函数展开成关于z的幂级数并求其收敛半径：

(1) $\dfrac{1}{(1+z^5)^2}$; (2) $\sin^2 z$; (3) $\mathrm{sh}z$;

(4) $\cos z\cdot\mathrm{ch}z$; (5) $\ln\dfrac{1+z}{1-z}$; (6) $\ln(z^2-3z+2)$;

(7) $[\ln(1-z)]^2$; (8) $\displaystyle\int_0^z\frac{\sin\zeta}{\zeta}\mathrm{d}\zeta$;

(9) $\dfrac{\int_0^z e^{\zeta}d\zeta}{1-z}$; (10) $\sqrt{z+\mathbf{i}}$ $\left(\sqrt{\mathbf{i}}=\dfrac{1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\right)$.

3 求下列函数在点z_0处的泰勒展开并确定收敛半径：

(1)$\dfrac{z-1}{z+1}, z_0=1$; (2)$\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}, z_0=2$;

(3)$\dfrac{1}{z^2}, z_0=-1$; (4)$\dfrac{1}{4-3z}, z_0=1+\mathbf{i}$;

(5)$f(z)=\displaystyle\int_0^z e^{\zeta^2}\mathrm{d}\zeta, z_0=0$; (6)$\sin(2z-z^2), z_0=1$;

(7)$\ln z, z_0=\mathbf{i}$; (8)$e^{\frac{1}{2-z}}, z_0=1$.

4 设$f(z)$是单位圆盘内的解析函数，且满足

$$f(z)=f(ze^{\frac{2\pi\mathbf{i}}{N}}),\quad \forall|z|<1.$$

证明存在单位圆盘上的解析函数$g(z)$使得$f(z)=g(z^N)$.

5 将下列函数在给定环域内展开成洛朗级数：

(1) $\dfrac{1}{(z^2+1)(z-3)}$, $1<|z|<3$和$|z|>3$;

(2) $\dfrac{e^z}{z(z^2+1)}$, $0<|z|<1$和$|z|>1$;

(3) $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, $|z|<1$, $1<|z|<2$, $|z|>2$, $0<|z-1|<1$和$|z-2|>1$;

(4) $\dfrac{1}{z(1-z)^2}$, $0<|z|<1$, $|z|>1$, $0<|z-1|<1$和$|z-1|>1$;

(5) $\dfrac{1}{z(\mathbf{i}-z)}$, $0<|z|<1$, $|z|>1$, $0<|z-\mathbf{i}|<1$和$|z-\mathbf{i}|>1$;

(6) $\dfrac{1}{z(z+2)^3}$, $0<|z|<2$, $|z|>2$, $0<|z+2|<2$和$|z+2|>2$;

(7) $\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$, $0<|z|<1$, $1<|z|<2$, $|z|>2$和$|z-2|<1$;

(8) $\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$, $0<|z-\mathbf{i}|<2$, $|z-\mathbf{i}|>2$和$|z|>1$;

(9) $z^2\sin\left(\dfrac{1}{1-z}\right)$, $|z-1|>0$;

(10) $\sin z\cdot\sin\dfrac{1}{z}$, $|z|>0$;

(11) $\cos\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}$, $|z-2|>0$;

(12) $e^{z+\frac{1}{z}}$, $|z|>0$;

(13) $e^{\frac{1}{1-z}}$, $|z-1|>0$和$|z|>1$;

(14) $\ln\dfrac{z-1}{z-2}$, $|z|>2$;

(15) $\dfrac{1}{z-2}\ln\dfrac{z-\mathbf{i}}{z+\mathbf{i}}$, $1<|z|<2$和$|z|>2$;

(16) $\sqrt{(z-1)(z-2)}$ $(\sqrt{2}>0)$, $|z|>2$.

6 设p是一正整数，证明函数$\dfrac{\sin z}{z^p}$在区域$|z|>0$上存在原函数当且仅当p是奇数.

7 确定下列函数在复平面的孤立奇点及其类型，并确定极点的阶数：

(1) $\dfrac{1}{z^3(z^2+1)^2}$; (2) $\dfrac{e^z\sin z}{z^2}$; (3) $\dfrac{1}{z^3-z^2-z+1}$;

(4) $\dfrac{1}{\sin z}$; (5) $\dfrac{z}{(1+z^2)(1+e^z)}$; (6) $\sin\dfrac{1}{1-z}$;

(7) $e^{z-\frac{1}{z}}$; (8) $\sin\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}$; (9) $e^{\frac{z}{1-z}}$;

(10) $\dfrac{z^{2n}}{1+z^n}$; (11) $\dfrac{\ln(z+1)}{z}$; (12) $\dfrac{e^{\frac{1}{1-z}}}{e^z-1}$;

8 指出下列函数在无穷远点的性质：

(1) $\dfrac{1}{z-z^3}$; (2) $\dfrac{z^4}{1+z^4}$;

(3) $\dfrac{z^6}{(z^2-3)^2\cos\dfrac{1}{z-2}}$; (4) $\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$;

(5) $\dfrac{e^z}{z(1-e^{-z})}$; (6) $e^{-z}\cos\dfrac{1}{z}$.

9 确定下列函数在扩充复平面的孤立奇点及其类型，并确定极点的阶数：

(1) $\sin\dfrac{z}{z+1}$; (2) $e^{z+\dfrac{1}{z}}$; (3) $\sin z\cdot\sin\dfrac{1}{z}$;

(4) $\dfrac{\mathrm{sh}z}{\mathrm{ch}z}$; (5) $\sin\left[\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{z}}\right]$; (6) $\tan^2 z$;

(7) $\dfrac{1}{\sin z-\sin a}$; (8)$e^{\tan\dfrac{1}{z}}$.

10 函数$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)^3}$在$z=2$处有一个三阶极点，此函数又有如下的洛朗展开式

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)^3}=\cdots+\frac{1}{(z-2)^6}-\cdots+\frac{1}{(z-2)^5}+\cdots+\frac{1}{(z-2)^4},\quad |z-2|>1.$$

所以“$z=2$又是$f(z)$的一个本性奇点”；又上面的洛朗展开式中不含有$\dfrac{1}{z-2}$幂项，因此$\mathrm{Res}[f(z),2]=0$. 这些结论对吗？

11 设$f(z)$是区域D上的单值函数，在区域D上除去有限个孤立极点外的区域上解析，证明函数$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$在$f(z)$的极点和零点上是简单极点，在区域D上其他点解析.

12 计算下列函数在扩充复平面上孤立奇点上的留数：

(1) $\dfrac{1}{z^3-z^5}$; (2) $\dfrac{z^{2n}}{1+z^n}$; (3) $\dfrac{z^{2n}}{(1+z)^n}$;

(4) $\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$; (5) $\dfrac{e^z}{z^2(z^2+9)}$; (6) $\tan z$;

(7) $\dfrac{1}{\sin z}$ (8) $\cot^2 z$; (9) $\cos\dfrac{z^2+4z-1}{z+3}$;

(10) $z^n\sin\dfrac{1}{z}$; (11) $\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$; (12) $\dfrac{1}{z(1-e^{-hz})}(h>0)$.

13 用留数计算下列定积分：

(1) $\displaystyle\oint_C\frac{z\mathrm{d}z}{(z-1)(z-2)^2}, C:|z-2|=\frac{1}{2}$; (2) $\displaystyle\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{1+z^4}, C:x^2+y^2=2x$;

(3) $\oint_C \frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z, C:|z|=\frac{3}{2}$; (4) $\oint_C \frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}\mathrm{d}z, C:|z|=4$;

(5) $\oint_C \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}\mathrm{d}z, C:|z|=2$; (6) $\oint_C \frac{1-\cos z}{z^m}\mathrm{d}z, C:|z|=\frac{3}{2}, m\in\mathbb{Z}$;

14 求下列函数在无穷远点的留数：

(1) $f(z)=\frac{e^z}{z^2-1}$;(2) $f(z)=\frac{1}{z(z+1)^4(z-4)}$;(3) $f(z)=\frac{2z}{3+z^2}$.

15 设$z=\infty$是函数$f(z)$的可去奇点，求$\mathrm{Res}[f(z),\infty]$.

16 计算下列积分：

(1) $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z^3(z^{10}-2)}, C:|z|=2$;(2) $\oint_C \frac{z^3}{1+z}\cdot e^{\frac{1}{z}}\mathrm{d}z, C:|z|=2$.

17 用课本5.3.1节的方法计算如下定积分：

(1) $\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a+\cos\theta}(a>1)$; (2) $\int_0^{\pi}\frac{\cos 2\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\mathrm{d}\theta(a^2<1)$;

(3) $\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(a+b\cos\theta)^2}(a>b>0)$; (4) $\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(a+b\cos^2\theta)^2}(a>0,b>0)$;

(5) $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(n\theta-\sin\theta)\mathrm{d}\theta(n$ 是整数).

18 用课本5.3.2节的方法计算如下定积分：

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$; (2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{(1+x^2)(x^2+2x+2)}$;

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+4x+13)^2}$; (4) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}(a>0)$;

(5) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}(n$是正整数); (6) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}(a>0,b>0)$;

(7) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x$.

19 用课本5.3.3节的方法计算如下定积分：

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x\mathrm{d}x}{x^2-2x+10}$; (2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(1+x^2)\cos ax}{1+x^2+x^4}\mathrm{d}x(a>0)$;

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{x^2+b^2}\mathrm{d}x(a>0,b>0)$; (4) $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}\mathrm{d}x(a>0,b>0)$;

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x\mathrm{d}x}{x^2-5x+6}$; (6) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x\mathrm{d}x}{(x^2+4)(x-1)}$;

(7) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\cdot\frac{\sin ax}{x}\mathrm{d}x(a>0,b>0)$; (8) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax\mathrm{d}x}{x(x^2+b^2)}(a>0,b>0)$.