作业二 B组

1 证明等式：

$$\pi\cot\pi z=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{z+n}.$$

2 若$f(z)$和$g(z)$在点z_0处解析，且$f(z_0)\neq 0$，点z_0是$g(z)$的二阶零点，证明

$$\mathrm{Res}\left[\frac{f(z)}{g(z)},z_0\right]=\frac{a_1b_2-a_0b_3}{b_2^2},$$

其中$a_k=\dfrac{1}{k!}f^{(k)}(z_0),b_k=\dfrac{1}{k!}g^{(k)}(z_0),k=0,1,2,3.$

3v设(1)点a是函数$f(z)$的n阶零点;(2)点a是函数$f(z)$的n阶极点，求$\mathrm{Res}\left[\dfrac{f'(z)}{f(z)},a\right]$.

4 设函数$\varphi(z)$在点a处解析且$\varphi'(a)$不为零，又函数$f(\zeta)$在点$\varphi(a)$处是留数为A的简单极点，求$\mathrm{Res}[f(\varphi(z)),a]$.

5 对于自然数$n\geqslant 2$，计算定积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$.

提示：沿闭区域$D_R=\left\{(r,\theta)|0\leqslant r\leqslant R,0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{2\pi}{n}\right\}$的边界对函数$\dfrac{1}{1+z^n}$积分. 当$R\to+\infty$时取极限.

6 计算定积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$.

提示：沿闭区域$D_{\varepsilon R}=\{(r,\theta)|\varepsilon\leqslant r\leqslant R,0\leqslant\theta\leqslant\pi\}$的边界对函数$\dfrac{e^{2\mathbf{i}z}-1}{z^2}$积分. 当$\varepsilon\to 0,R\to+\infty$时取极限.

7 计算定积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x\mathrm{d}x}{x^2+a^2}(a>0)$.

提示：沿闭区域$D_{\varepsilon R}=\{(r,\theta)|\varepsilon\leqslant r\leqslant R,0\leqslant\theta\leqslant\pi\}$的边界对函数$\dfrac{\ln z}{z^2+a^2}$积分. 当$\varepsilon\to 0,R\to+\infty$时取极限.

8 设有理函数$f(z)$所有的极点$a_1,a_2,\cdots,a_n$都不在正实轴上，也都不为零，设p是一个非整数实数满足

$$\lim_{z\to 0}|z|^{p+1}|f(z)|=\lim_{z\to\infty}|z|^{p+1}|f(z)|=0,$$

则有

$$\int_0^{\infty}x^pf(x)dx=-\frac{\pi}{\sin\pi p}e^{-\pi p\mathbf{i}}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[z^pf(z),a_k],$$

其中

$$z^p=e^{p\mathrm{Ln}z},\quad \mathrm{Ln}z=\ln|z|+\mathbf{i}\mathrm{Arg}z,\quad 0\leqslant\mathrm{Arg}z<2\pi.$$

提示：沿闭区域$K_{\varepsilon,R}=\{\varepsilon\leqslant|z|\leqslant R\}-\left\{(x,y)|x>0,-\dfrac{\varepsilon}{2}<y<\dfrac{\varepsilon}{2}\right\}$对函数$z^p f(z)$积分，当$\epsilon\to 0, R\to+\infty$时取极限.

9 用上一题的方法计算下列定积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p(x+1)}(0<p<1)$.

10 计算定积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{\mathrm{ch}x}\mathrm{d}x(a>0)$.

提示：沿以$-R,R,R+2\pi\mathbf{i},-R+2\pi\mathbf{i}$为端点的矩形区域边界对函数$\dfrac{e^{\mathbf{i}az}}{\mathrm{ch}z}$积分.
当$R\to+\infty$时取极限.