作业一解答 A组

1 用直角坐标表示下列复数：

(1) $\mathbf{i}^{2017}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}\right)^{2017}+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}\right)^{2017}+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}\right)^{2017}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}\right)^{2017}$;

(2) $1+\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{3}+\cdots+\cos\frac{2017\pi}{3}$;

(3) $\dfrac{(-1+\sqrt{3}\mathbf{i})^8}{1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}\right)^{2017}}$;

解：(1) $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})\mathbf{i}$;

(2) $\mathrm{Re}(1+\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathbf{i}}{3}}+\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathbf{i}}{3}}+\cdots+\mathrm{e}^{\frac{2017\pi\mathbf{i}}{3}})=\mathrm{Re}(1+\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathbf{i}}{3}})=\dfrac{3}{2}$;

(3) $64[(\sqrt{3}-1-\sqrt{6})+\mathbf{i}(\sqrt{2}-1-\sqrt{3})]$.

2 证明下列等式并说明(1)式的几何意义：

(1) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$;

(2) $|1-\overline{z_1}z_2|^2-|z_1-z_2|^2=\left(1-|z_1|^2\right)(1-|z_2|^2\right)$.

证明：(1) 我们有

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2&=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}+(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}\\&=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+(z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1})+z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}-(z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1})\\&=2(z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2})=2(|z_1|^2+|z_2|^2).\end{aligned}$$

几何意义：平行四边形两条对角线长度的平方和等于四条边长度的平方和.

(2) 我们有

$$\begin{aligned}|1-\overline{z_1}z_2|^2-|z_1-z_2|^2&=(1-\overline{z_1}z_2)(1-z_1\overline{z_2})-(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}\\&=(1-\overline{z_1}z_2-z_1\overline{z_2}+|z_1z_2|^2)-(|z_1|^2-\overline{z_1}z_2-z_1\overline{z_2}+|z_2|^2)\\&=(1-|z_1|^2-|z_2|^2+|z_1|^2|z_2|^2)\\&=(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2).\end{aligned}$$

3 描出下列复平面区域并指明其是单连通还是多连通：

(1) $\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|>1$，其中$|a|<1$;

(2) $\left|\dfrac{a-z}{\overline{a}+z}\right|<1$，其中$\mathrm{Re}a>0$;

(3) 区域$\{1<x<2,0<y<4\}$在函数e^z下的像;

(4) 区域$\{1<x<2,0<y<8\}$在函数e^z下的像.

解：(1) 不等式$\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|>1$等价于$|z-a|>|1-\overline{a}z|$，不等式两边做平方后等价于

$$|z|^2+|a|^2-(\overline{a}z+a\overline{z})>1+|a|^2|z|^2-(\overline{a}z+a\overline{z}).$$

化简后等价于

$$(1-|a|^2)|z|^2>1-|a|^2.$$

因此所求区域为$\{z||z|>1\}$，是多连通区域.

(2) 不等式$\left|\dfrac{a-z}{\overline{a}+z}\right|<1$等价于$|a-z|<|\overline{a}+z|$，不等式两边做平方后等价于

$$|a|^2+|z|^2-(\overline{a}z+a\overline{z})<|a|^2+|z|^2+(az+\overline{a}\overline{z}).$$

化简后等价于

$$(a+\overline{a})(z+\overline{z})=4\mathrm{Re}a\mathrm{Re}z>0.$$

因此所求区域为$\{z|\mathrm{Re}z>0\}$，是单连通区域.

(3) 像集为$\{(r\cos\theta,r\sin\theta)|e<r<e^2,0<\theta<4\}$，是单连通区域.

(4) 像集为$\{z|e<|z|<e^2\}$，是多连通环形区域.

4 描述下列不等于确定的集合并指明这些集合是开的还是闭的，无界的还是有界的，单联通还是多连通的：

(1) $|z-1|<|z+3|$;

(2) $1<\arg z<1+\pi$;

(3) $|z-1|<4|z+1|$;

(4) $\dfrac{1}{2}\leqslant\left|z-\dfrac{1}{2}\right|\leqslant\dfrac{3}{2}$;

(5) $|z|+\mathrm{Re}z<1$;

解：(1) $\{z|\mathrm{Re}z>-1\}$,无界单连通区域;

(2) $\{(r\cos\theta,r\sin\theta)|r>0,1<\theta<1+\pi\}$，无界单连通区域；

(3) $\left\{z\mid\left|z+\dfrac{17}{15}\right|>\dfrac{8}{15}\right\}$，无界多连通区域；

(4) 有界环形闭区域，内部多连通；

(5) $\left\{(x,y)\mid x<\dfrac{1-y^2}{2}\right\}$，无界单连通区域.

5 用复变量z显式描述下列函数：

(1) $f(z)=3x+y+\mathbf{i}(3y-x)$;

(2) $f(z)=e^{-y}\sin x-\mathbf{i}e^{-y}\cos x$;

(3) $f(z)=(z^2-2)e^{-x}e^{-\mathbf{i}y}$;

解：(1) $(3-i)z$; (2)$-\mathbf{i}\mathrm{e}^{\mathbf{i}z}$; (3) $(z^2-2)\mathrm{e}^{-z}$.

6 确定下列函数在$z=0$处极限是否存在，并在存在的情况下求极限值：

(1) $\dfrac{\mathrm{Re}z}{z}$; (2) $\dfrac{z}{|z|}$; (3) $\dfrac{\mathrm{Re}(z^2)}{|z|^2}$; (4) $\dfrac{z\mathrm{Re}z}{|z|^2}$.

解：(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{Re}x}{x}=1$, $\lim_{y\to 0}\dfrac{\mathrm{Re}(\mathbf{i}y)}{\mathbf{i}y}=0$，因此极限不存在;

(2) $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{x}{|x|}=1$, $\lim_{x\to 0^-}\dfrac{x}{|x|}=-1$，因此极限不存在;

(3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{Re}(x^2)}{x^2}=1$, $\lim_{y\to 0}\dfrac{\mathrm{Re}[(\mathbf{i}y)^2]}{y^2}=-1$，因此极限不存在;

(4) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x\mathrm{Re}(x)}{x^2}=1$, $\lim_{y\to 0}\dfrac{\mathbf{i}y\mathrm{Re}(\mathbf{i}y)}{y^2}=0$，因此极限不存在.

7 考察下列函数的连续性：

(1) 证明函数

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{[\mathrm{Re}(z^2)]^2}{|z|^2}, & z\neq 0;\\ 0, & z=0\end{cases}$$

在$z=0$处连续；

(2) 证明函数

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^6}, & z\neq 0;\\ 0, & z=0\end{cases}$$

在$z=0$处不连续. 证明当z沿着过原点直线趋近于0时，$f(z)$也趋近于0. 此例子说明了沿直线通向一点的极限存在不是极限存在的充分条件.

证明：(1) 不难发现$|f(z)|\leqslant\dfrac{|z|^4}{|z|^2}=|z|^2,\forall z\neq 0$, 因此

$$\lim_{z\to 0}f(z)=0=f(0),$$

即函数$f(z)$在$z=0$处连续.

(2) 求极限可知

$$\lim_{y\to 0}f(y^3+iy)=\frac{1}{2}\neq f(0)=0,$$

因此函数$f(z)$在$z=0$处不连续. 而对于任一给定的θ，极限

$$\lim_{r\to 0} f(r\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}) = \lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos\theta\sin^3\theta}{r^2\cos^2\theta + r^6\sin^6\theta} = 0,$$

因此沿任一一条直线趋向于0时函数值也趋向于0.

8 证明下列等式：

(1) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$;

(2) $\sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$;

(3) $\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$;

(4) $\tan 2z = \dfrac{2\tan z}{1-\tan^2 z}$;

(5) $\mathrm{ch}(z_1+z_2) = \mathrm{ch}z_1\mathrm{ch}z_2 + \mathrm{sh}z_1\mathrm{sh}z_2$.

证明：(1) 我们有

$$\cos^2 z + \sin^2 z = (\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathbf{i}z}}{2})^2 - (\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathbf{i}z}}{2})^2 = 1.$$

(2) 等式左侧我们有

$$\sin(z_1+z_2) = \frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}(z_1+z_2)} - \mathrm{e}^{\mathbf{i}(z_1+z_2)}}{2\mathbf{i}}.$$

等式右侧我们有

$$\begin{aligned}\sin z_1\cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 &= \frac{(\mathrm{e}^{\mathbf{i}z_1}-\mathrm{e}^{-\mathbf{i}z_1})(\mathrm{e}^{\mathbf{i}z_2}+\mathrm{e}^{-\mathbf{i}z_2})}{4\mathbf{i}} + \frac{(\mathrm{e}^{\mathbf{i}z_1}+\mathrm{e}^{-\mathbf{i}z_1})(\mathrm{e}^{\mathbf{i}z_2}-\mathrm{e}^{-\mathbf{i}z_2})}{4\mathbf{i}}\\ &= \frac{2(\mathrm{e}^{\mathbf{i}(z_1+z_2)}-\mathrm{e}^{-\mathbf{i}(z_1+z_2)})}{4\mathbf{i}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}(z_1+z_2)}-\mathrm{e}^{-\mathbf{i}(z_1+z_2)}}{2\mathbf{i}}.\end{aligned}$$

因此等式两侧相等.

(3) 等式左侧我们有

$$\cos(z_1+z_2) = \frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}(z_1+z_2)} + \mathrm{e}^{-\mathbf{i}(z_1+z_2)}}{2}.$$

等式右侧我们有

$$\begin{aligned}\cos z_1\cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 &= \frac{(\mathrm{e}^{\mathbf{i}z_1}+\mathrm{e}^{-\mathbf{i}z_1})(\mathrm{e}^{\mathbf{i}z_2}+\mathrm{e}^{-\mathbf{i}z_2})}{4} + \frac{(\mathrm{e}^{\mathbf{i}z_1}-\mathrm{e}^{-\mathbf{i}z_1})(\mathrm{e}^{\mathbf{i}z_2}-\mathrm{e}^{-\mathbf{i}z_2})}{4}\\ &= \frac{2(\mathrm{e}^{\mathbf{i}(z_1+z_2)}+\mathrm{e}^{-\mathbf{i}(z_1+z_2)})}{4} = \frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}(z_1+z_2)}+\mathrm{e}^{-\mathbf{i}(z_1+z_2)}}{2}.\end{aligned}$$

因此等式两侧相等.

(4) 由(2)和(3)我们可知

$$\tan 2z = \frac{\sin 2z}{\cos 2z} = \frac{2\sin z\cos z}{\cos^2 z - \sin^2 z} = \frac{2\tan z}{1-\tan^2 z}.$$

(5) 等式左侧我们有

$$\mathrm{ch}(z_1+z_2)=\frac{\mathrm{e}^{z_1+z_2}+\mathrm{e}^{-z_1-z_2}}{2}.$$

等式右侧我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}z_1\mathrm{ch}z_2+\mathrm{sh}z_1\mathrm{sh}z_2&=\frac{(\mathrm{e}^{z_1}+\mathrm{e}^{-z_1})(\mathrm{e}^{z_2}+\mathrm{e}^{-z_2})}{4}+\frac{(\mathrm{e}^{z_1}-\mathrm{e}^{-z_1})(\mathrm{e}^{z_2}-\mathrm{e}^{-z_2})}{4}\\&=\frac{2(\mathrm{e}^{z_1+z_2}+\mathrm{e}^{-z_1-z_2})}{4}=\frac{\mathrm{e}^{z_1+z_2}+\mathrm{e}^{-z_1-z_2}}{2}.\end{aligned}$$

因此等式两侧相等.

9 把幅角主值函数$\arg z$表示成关于x,y的二元函数.

解：经计算可得

$$\arg(x+y\mathbf{i})=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0;\\ \pi+\arctan\dfrac{y}{x}, & x<0,y\geq 0;\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0,y<0;\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0,y>0;\\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=0,y<0.\end{cases}$$

10 用直角坐标表示下列复数：

(1)$\mathrm{Ln}\mathbf{i}$; (2) $\ln(-2+3\mathbf{i})$; (3) $\sqrt[6]{-\mathbf{i}}$;

(4) $\mathrm{Arcsin}\dfrac{1}{2}$; (5) $\mathrm{Arctan}(1+2\mathbf{i})$; (6) $\mathrm{Arch}2\mathbf{i}$.

解：(1) $\mathrm{Ln}\mathbf{i}=\left(2k+\dfrac{1}{2}\right)\pi\mathbf{i}(k\in\mathbb{Z})$;

(2) $\ln(-2+3\mathbf{i})=\dfrac{1}{2}\ln 13+\left(\pi-\arctan\dfrac{3}{2}\right)\mathbf{i}$;

(3) $\sqrt[6]{-\mathbf{i}}=\alpha,\alpha\omega,\alpha\omega^2,\cdots,\alpha\omega^5,\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i},\omega=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}$;

(4) $\left(2k\pm\dfrac{1}{6}\right)\pi(k\in\mathbb{Z})$;

(5) $\dfrac{1}{2}\left[-\arctan\dfrac{1}{2}+(2k+1)\pi\right]+\dfrac{\ln 5}{4}\mathbf{i}(k\in\mathbb{Z})$;

(6) $\ln(\sqrt{5}\pm 2)+\left(2k\pm\dfrac{1}{2}\right)\pi\mathbf{i}(k\in\mathbb{Z})$.

11 证明在一个不含零点的单连通区域D中存在一个(无穷多个)函数$\mathrm{Ln}z$的连续(解析)单值分支，存在一个(无穷多个)函数$\mathrm{Arg}z$的连续单值分支.

证明：对于不含零的单连通区域D，取其内部一点z_0，定义D上的函数

$$f(z)=\ln z_0+\int_{z_0}^{z}\frac{1}{\zeta}d\zeta.$$

可验证对于函数$F(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{f(z)}}{z}$，有

$$F'(z)\equiv 0, F(z_0)=1.$$

因此

$$F(z)\equiv 1.$$

也就是说$f(z)$是多值函数$\mathrm{Ln}z$的一个解析分支，因此$f(z)+2k\pi i(k\in\mathbb{Z})$也是$\mathrm{Ln}z$的一个解析分支，故区域$D$上有无穷多个$\mathrm{Ln}z$的解析分支．这些解析分支的虚部都是$D$上幅角函数$\mathrm{Arg}z$的连续分支．

12 证明函数$f_1(z)=\overline{z}$和函数$f_2(z)=\mathrm{Re}z$在复平面上处处不可导．

证明：对于复平面上任一点z_0，极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{z_0+\Delta z}-\overline{z_0}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

不存在，极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\mathrm{Re}(z_0+\Delta z)-\mathrm{Re}(z_0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\mathrm{Re}(\Delta z)}{\Delta z}$$

也不存在，因此这两个函数均处处不可导．

13 证明：如果函数$f(z)=u+\mathbf{i}v$在区域D上解析且满足下列条件之一，则$f(z)$是常数：

(1) $f(z)$恒取实值;

(2) $\overline{f(z)}$在D内解析;

(3) $|f(z)|$在D内是一个常数;

(4) $\arg f(z)$在D内是一个常数;

(5) $au+bv=c$，其中a,b与c为不全为零的实常数；

(6) $v=u^2$.

证明：(1) 若$f(z)$恒取实数值，则虚部函数v恒取零．由柯西-黎曼条件可知

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

因此u也是常值函数．故$f(z)$是常值函数．

(2) 若$f(z)=u+\mathbf{i}v$和$\overline{f(z)}=u-\mathbf{i}v$都是解析函数，由柯西-黎曼条件可知

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}.$$

因此只能有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

因此$f(z)$是常值函数.

(3) 若$|f(z)|$是一个常值函数，则$|f(z)|^2=u^2+v^2$也是一个常值函数，对等式两边求偏导数得

$$\begin{aligned}2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}=0,\\ 2u\frac{\partial u}{\partial y}+2v\frac{\partial v}{\partial y}=0.\end{aligned}$$

由柯西-黎曼条件此方程组可转化成为

$$\begin{aligned}2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}=0,\\ 2v\frac{\partial u}{\partial x}-2u\frac{\partial v}{\partial x}=0.\end{aligned}$$

如果u^2+v^2不为零，则解方程组得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

如果u^2+v^2为零，则$f(z)$自然恒等于零.

(4) 若$\arg f(z)$为常值，则存在实常数C满足$v=Cu$. 若C为零，则函数v恒等于零，沿用(1)中的方法我们可证明$f(z)$是常值函数. 若C不为零，则有

$$\frac{\partial v}{\partial x}=C\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=C\frac{\partial u}{\partial y}.$$

结合柯西-黎曼条件可得

$$\frac{\partial v}{\partial x}=C\frac{\partial u}{\partial x}=C\frac{\partial v}{\partial y}=C^2\frac{\partial u}{\partial y}=-C^2\frac{\partial v}{\partial x}.$$

因此有$\dfrac{\partial v}{\partial x}=0$，类似地可知$\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$，因此$f(z)$是一个常值函数.

(5) 若a,b中有一个是零，则沿用(1)中的方法我们可证明$f(z)$是常值函数. 假设a,b都非零，对等式$au+bv=c$两边求偏导数得

$$a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad a\frac{\partial u}{\partial y}+b\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

由柯西-黎曼条件此方程组等价于

$$a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad b\frac{\partial u}{\partial x}-a\frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

因此

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

即$f(z)$是常值函数.

(6) 若$v=u^2$，则对两边求偏导并加上柯西-黎曼条件得

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=2u\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}.$$

因此有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2u\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=2u\cdot(-2u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}),\quad (1+4u^2)\frac{\partial u}{\partial x}=0.$$

因此可得$\frac{\partial u}{\partial x}=0$，类似地也可得$\frac{\partial u}{\partial y}=0$，即$f(z)$是常值函数。

14 验证下列函数是调和函数并求以$z=x+\mathbf{i}y$为自变量的解析函数$w=f(z)=u+\mathbf{i}v$：

(1) $v=\arctan\frac{y}{x}(x>0)$;

(2) $u=e^x(y\cos y+x\sin y)+x+y, f(0)=1$;

(3) $u=(x-y)(x^2+4xy+y^2)$;

(4) $v=\frac{y}{x^2+y^2}, f(2)=0.$

解：(1) $\omega=\ln z+C(C\in\mathbb{R})$;

(2) $\omega=-\mathbf{i}z\mathrm{e}^z+(1-\mathbf{i})z+\mathbf{i}$;

(3) $\omega=(1-i)z^3+\mathbf{i}C(C\in\mathbb{R})$;

(4) $\omega=\frac{1}{2}-\frac{1}{z}.$

15 设函数$f(z)$在上半复平面解析，证明函数$\overline{f(\overline{z})}$在下半复平面解析.

证明：对于下半平面上任一一点z_0，其共轭$\overline{z_0}$在上半平面中，极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{f(\overline{z_0+\Delta z})}-\overline{f(\overline{z_0})}}{\Delta z}=\overline{\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(\overline{z_0+\Delta z})-f(\overline{z_0})}{\overline{\Delta z}}}=\overline{f'(\overline{z_0})}.$$

16 计算下列复积分：

(1) 计算积分$\oint_C z|z|\mathrm{d}z$，其中闭路C由点-1到点1的直线段与上半单位圆周组成;

(2) 计算

$$\oint_C\frac{z}{\overline{z}}\mathrm{d}z,$$

其中C是闭区域$\{1 \leqslant r \leqslant 2, y \geqslant 0\}$的正向边界.

解：(1) 积分回路由$C_1 := t(-1 \leqslant t \leqslant 1)$和$C_2 := \mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$构成，因此

$$\oint_C z|z|dz = \int_{C_1} z|z|dz + \int_{C_2} z|z|dz = \int_{-1}^{1} t|t|dt + \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}\mathbf{i}\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}d\theta = 0.$$

(2) 积分回路由$C_1 := t(-2 \leqslant t \leqslant -1)$，$C_2 := \mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}(\theta \in [\pi, 0])$，$C_3 := t(1 \leqslant t \leqslant 2)$和$C_4 := 2\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$构成，因此

$$\oint_C \frac{z}{\bar{z}}dz = \int_{C_1} \frac{z}{\bar{z}}dz + \int_{C_2} \frac{z}{\bar{z}}dz + \int_{C_3} \frac{z}{\bar{z}}dz + \int_{C_4} \frac{z}{\bar{z}}dz,$$

$$\int_{C_1} \frac{z}{\bar{z}}dz + \int_{C_3} \frac{z}{\bar{z}}dz = \int_{-2}^{-1} dt + \int_1^2 dt = 2,$$

$$\int_{C_2} \frac{z}{\bar{z}}dz + \int_{C_4} \frac{z}{\bar{z}}dz = \int_{\pi}^{0} \mathrm{e}^{2\mathbf{i}\theta}d(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}) + \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{2\mathbf{i}\theta}d(2\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}) = \int_0^{\pi} \mathbf{i}\mathrm{e}^{3\mathbf{i}\theta}d\theta = -\frac{2}{3}.$$

因此$\oint_C \frac{z}{\bar{z}}dz = \dfrac{4}{3}$.

17 设$f(z)$是单连通区域D内除点z_0外解析的函数且$\lim\limits_{z \to z_0}(z - z_0)f(z) = 0$，则对于任一不通过点$z_0$的区域$D$中的简单光滑闭曲线$C$恒有

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

证明：由D的单连通性质和柯西积分定理，闭路C可以选为$|z - z_0| = r$，其中$\overline{B}(z_0, r) \subset D$. 因此

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{|z-z_0|=r} f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta})\mathbf{i}r\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}d\theta.$$

又因为$\lim_{z \to z_0}(z - z_0)f(z) = 0$，所以有

$$\lim_{r \to 0} f(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta})r\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta} = 0, \quad \lim_{r \to 0} \oint_C f(z)dz = \oint_{|z-z_0|=r} f(z)dz = 0$$

因此$\oint_C f(z)dz = 0$成立.

18 沿曲线正向计算下列复积分：

(1) $\displaystyle\oint_C \frac{e^z}{z-2}\mathrm{d}z, C : |z - 2| = 1;$

(2) $\displaystyle\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5}\mathrm{d}z, C : |z| = r > 1;$

(3) $\displaystyle\oint_C \frac{\sin z}{(z - \frac{\pi}{2})^2}\mathrm{d}z, C : |z| = 2;$

(4) $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)(z^2+4)}, C: |z| = \frac{3}{2}$;

(5) $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2-a^2}, C: |z-a| = a$;

(6) $\oint_C \frac{\cos z}{z^3}\mathrm{d}z, C = C_1 + C_2^-, C_1: |z| = 2, C_2: |z| = 3$;

(7) $\oint_C \frac{e^{-z}\sin z}{z^3}\mathrm{d}z, C: |z-\mathbf{i}| = 2$;

(8) $\oint_C \frac{3z+2}{(z^4-1)}\mathrm{d}z, C: |z-(1+\mathbf{i})| = \sqrt{2}$.

解：(1) $\oint_{|z-2|=1} \frac{\mathrm{e}^z}{z-2}\mathrm{d}z = 2\pi\mathbf{i}\mathrm{e}^2 = 2\mathrm{e}^2\pi\mathbf{i}$;

(2) $\oint_{|z|=2} \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5}\mathrm{d}z = \frac{2\pi\mathbf{i}}{4!}(\cos\pi z)^{(4)}(1) = -\frac{\pi^5}{12}\mathbf{i}$;

(3) $\oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{2})^2}\mathrm{d}z = 2\pi\mathbf{i}\cos\frac{\pi}{2} = 0$;

(4) $\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)(z^2+4)} = 2\pi\mathbf{i}\left(\frac{1}{2\mathbf{i}\cdot 3} - \frac{1}{2\mathbf{i}\cdot 3}\right) = 0$;

(5) $\oint_{|z-a|=a} \frac{\mathrm{d}z}{z^2-a^2} = 2\pi\mathbf{i}\cdot\frac{1}{2a} = \frac{\pi\mathbf{i}}{a}$;

(6) $\oint_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^3}\mathrm{d}z - \oint_{|z|=3} \frac{\cos z}{z^3}\mathrm{d}z = 0$;

(7) $\oint_{|z-\mathbf{i}|=2} \frac{\mathrm{e}^{-z}\sin z}{z^2}\mathrm{d}z = 2\pi\mathbf{i}(\mathrm{e}^{-z}\cos z - \mathrm{e}^{-z}\sin z)(0) = 2\pi\mathbf{i}$;

(8)$\oint_{|z-(1+\mathbf{i})|=\sqrt{2}} \frac{3z+2}{z^4-1}\mathrm{d}z = 2\pi\mathbf{i}\left(\mathrm{Res}\left[\frac{3z+2}{z^4-1}, 1\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{3z+2}{z^4-1}, i\right]\right) = -\pi + \pi\mathbf{i}$.

19 设函数$f(z)$与$g(z)$在区域D内处处解析. 设C是D内的一条简单光滑闭曲线且C内部全部属于D. 证明若等式关系$f(z) = g(z)$对C上所有点成立，则等式关系$f(z) = g(z)$对C内部所有点也成立.

证明：任取C内部的一点z_0，由柯西积分公式可知

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz, \quad g(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_C \frac{g(z)}{z-z_0}dz.$$

由于在C上$f(z) = g(z)$，因此$f(z_0) = g(z_0)$.

20 设函数$f(z)$在$|z| \leqslant 1$上解析且$f(0) = 1$，计算积分

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{|z|=1}\left\{2 \pm \left(z + \frac{1}{z}\right)\right\} f(z)\frac{\mathrm{d}z}{z}$$

再利用极坐标导出下式

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{\mathbf{i}\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta = 2+f'(0),$$
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{\mathbf{i}\theta})\sin^2\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta = 2-f'(0).$$

解：由柯西积分公式可得

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{|z|=1}\left[2\pm\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]f(z)\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{|z|=1}\left[\frac{2f(z)}{z}\pm\left(f(z)+\frac{f(z)}{z^2}\right)\right]\mathrm{d}z = 2f(0)\pm f'(0).$$

令$z=\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}$，则$z+\dfrac{1}{z}=2\cos\theta, \dfrac{\mathrm{d}z}{z}=\mathbf{i}\mathrm{d}\theta$，因此

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{|z|=1}\left[2+\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]f(z)\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_0^{2\pi}(2+2\cos\theta)f(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta})\mathrm{d}\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta,$$
$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{|z|=1}\left[2-\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]f(z)\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_0^{2\pi}(2-2\cos\theta)f(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta})\mathrm{d}\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta})\sin^2\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta.$$

故有

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta = 2f(0)+f'(0) = 2+f'(0),$$
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta})\sin^2\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta = 2f(0)-f'(0) = 2-f'(0).$$

21 计算下列复积分：

(1) $\displaystyle\int_{C_1}\frac{1}{z}\mathrm{d}z$和$\displaystyle\int_{C_2}\frac{1}{z}\mathrm{d}z$，其中$C_1$和$C_2$分别为从点$(1,0)$出发到点$(-1,0)$ 的上半和下半圆周;

(2) 正向积分

$$\oint_{|z|=r}\frac{z\mathrm{e}^z\mathrm{d}z}{(z-a)^8}, |a|<r;$$

(3) 正向积分

$$\oint_{|z|=2}\frac{\mathrm{e}^z\mathrm{d}z}{z(1-z)^3}.$$

解：(1) $\displaystyle\int_{C_1}\frac{1}{z}\mathrm{d}z = \int_0^{\pi}\mathbf{i}\mathrm{d}\theta = \pi\mathbf{i}, \int_{C_2}\frac{1}{z}\mathrm{d}z = \int_0^{-\pi}\mathbf{i}\mathrm{d}\theta = -\pi\mathbf{i};$

(2) $\displaystyle\oint_{|z|=r}\frac{ze^z\mathrm{d}z}{(z-a)^8} = \frac{2\pi\mathbf{i}}{7!}(ze^z)^{(7)}(a) = \frac{\pi\mathbf{i}}{2520}\mathrm{e}^a(a+7);$

(3) $\oint_{|z|=2} \frac{\mathrm{e}^z \mathrm{d}z}{z(1-z)^3} = 2\pi\mathbf{i} - \frac{2\pi\mathbf{i}}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^z}{z}\right)^{(2)}(1) = (2-e)\pi\mathbf{i}.$

22 对于$|a|<1$证明下列正向积分等式：

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{|z|=1} \frac{z+a}{z-a}\cdot z^{n-1}\mathrm{d}z = \begin{cases} 2a^n, & n\geqslant 1, \\ 0, & n<0. \end{cases}$$

解：当$n\geqslant 1$时，则有

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{|z|=1} \frac{z+a}{z-a}\cdot z^{n-1}dz = [(z+a)z^{n-1}](a) = 2a^n.$$

当$n<0$时，有

$$\frac{z+a}{z-a} = \frac{1+\frac{a}{z}}{1-\frac{a}{z}} = \left(1+\frac{a}{z}\right)\left(1+\frac{a}{z}+\cdots+\frac{a^k}{z^k}+\cdots\right), \quad \forall |z|=1.$$

因此$\frac{z+a}{z-a}\cdot z^{n-1}$中洛朗展开的最高次数为$n-1$次，由$\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z^k}=0(k>1)$可知

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{|z|=1} \frac{z+a}{z-a}\cdot z^{n-1}\mathrm{d}z = 0.$$

23 计算正向积分

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{1+z^4},$$

其中C是椭圆$x^2-xy+y^2+x+y=0$的正向边界.

解：对于复平面上给定一个点(a,b)，其位于椭圆$x^2-xy+y^2+x+y=0$的内部当且仅当

$$a^2-ab+b^2+a+b<0$$

成立。因此函数$\frac{1}{z^4+1}$的四个奇点$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}$中只有$-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}$位于椭圆$C$的内部. 因此

$$\oint_C \frac{dz}{1+z^4} = 2\pi\mathbf{i}\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^4+1}, -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}\right] = \frac{\pi}{4}(-\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathbf{i}).$$