作业一解答 B组

1 证明下列不等式并说明(1)式的几何意义：

(1) $\left|\dfrac{z}{|z|}-1\right| \leqslant |\arg z|, z \neq 0;$

(2) $|z_1+z_2| \geqslant \dfrac{1}{2}(|z_1|+|z_2|)\left|\dfrac{z_1}{|z_1|}+\dfrac{z_2}{|z_2|}\right|, z_1z_2 \neq 0.$

证明：(1) 设$z=re^{\mathbf{i}\theta}(-\pi<\theta\leqslant\pi)$，因此不等式就等价于

$$\sqrt{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta} \leqslant |\theta|.$$

即$2\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right| \leqslant |\theta|$. 由数学分析中不等式$\sin x \leqslant x$不难证明上述不等式. 几何意义是单位圆周上两点之间的直线距离不大于两点之间的弧长.

(2) 对不等式两边做平方后不等式等价于

$$|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2 \geqslant \frac{1}{4}(|z_1|+|z_2|)^2\left[2+\frac{1}{|z_1z_2|}(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)\right].$$

通过移项等价于证明不等式

$$\frac{1}{2}(|z_1|^2-2|z_1z_2|+|z_2|^2) \geqslant \frac{1}{4}(|z_1|^2-2|z_1z_2|+|z_2|^2)\cdot\frac{1}{|z_1z_2|}\cdot(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2).$$

化简后等价于证明不等式

$$2|z_1z_2| \geqslant z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2.$$

由不等式$|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$直接导出上述不等式.

2 证明柯西-黎曼方程的极坐标形式是

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\cdot\cdot\frac{\partial v}{\partial\theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta}.$$

证明：由链式求导法则可知

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial r}&=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta,\\
\frac{\partial u}{\partial\theta}&=-r\frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta+r\frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta,\\
\frac{\partial v}{\partial r}&=\frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial v}{\partial y}\sin\theta,\\
\frac{\partial v}{\partial\theta}&=-r\frac{\partial v}{\partial x}\sin\theta+r\frac{\partial v}{\partial y}\cos\theta.
\end{aligned}$$

因此条件
$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial\theta},\quad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta}$$
等价于
$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta&=-\frac{\partial v}{\partial x}\sin\theta+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\theta,\\ \frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial v}{\partial y}\sin\theta&=\frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta-\frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta.\end{aligned}$$
易证上述条件等价于柯西-黎曼条件.

3 设是解析函数. 证明：

(1) $\left(\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}|f(z)|\right)^2=|f'(z)|^2$;

(2) $\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]|f(z)|^2=4|f'(z)|^2$.

证明：(1) 我们知道
$$|f(z)|=\sqrt{u^2+v^2},$$
因此有
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|&=\frac{uu_x+vv_x}{\sqrt{u^2+v^2}},\\ \frac{\partial}{\partial y}|f(z)|&=\frac{uu_y+vv_y}{\sqrt{u^2+v^2}}.\end{aligned}$$
由柯西-黎曼条件可知
$$\frac{\partial}{\partial y}|f(z)|=\frac{-uv_x+vu_x}{\sqrt{u^2+v^2}}.$$
因此
$$(\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|)^2+(\frac{\partial}{\partial y}|f(z)|)^2=\frac{(u^2+v^2)(u_x^2+v_x^2)}{u^2+v^2}=|f'(z)|^2.$$

(2) 我们有
$$\begin{aligned}|f(z)|^2&=u^2+v^2,\\ \frac{\partial}{\partial x}|f(z)|^2&=2uu_x+2vv_x,\\ \frac{\partial}{\partial y}|f(z)|^2&=2uu_y+2vv_y.\end{aligned}$$
因此有
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)|^2&=2u_xu_x+2v_xv_x+2uu_{xx}+2vv_{xx},\\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}|f(z)|^2&=2u_yu_y+2v_yv_y+2uu_{yy}+2vv_{yy}.\end{aligned}$$

由柯西-黎曼条件和u,v的调和性质知

$$[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}]|f(z)|^2=4(u_x^2+v_x^2)+2u(\Delta u)+2v(\Delta v)=4|f'(z)|^2.$$

4 证明函数

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{x^3y(y-\mathbf{i}x)}{x^6+y^2}, & z\neq 0;\\ 0, & z=0\end{cases}$$

(1) 在$z=0$处连续；

(2) 在$z=0$处满足Cauchy-Riemann条件；

(3) 在$z=0$处沿过原点直线都可导且导数都是0；

(4) 在$z=0$处不可导.

证明：(1) 经观察可知

$$f(z)=\frac{x^3y}{x^6+y^2}(-\mathbf{i}z),\quad \forall z\neq 0.$$

由不等式$|x^6+y^2|\geqslant 2|x^3y|$可知

$$|f(z)|\leqslant\frac{1}{2}|z|,\quad \lim_{z\to 0}f(z)=0.$$

即函数$f(z)$在$z=0$处连续.

(2) 由于$f(x)=f(\mathbf{i}y)=0$，因此有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial v}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial u}{\partial y}(0,0)=\frac{\partial v}{\partial y}(0,0)=0.$$

故函数$f(z)$满足柯西-黎曼条件.

(3) 函数

$$\frac{f(z)}{z}=-\mathbf{i}\frac{x^3y}{x^6+y^2}.$$

当z沿一条直线趋向于零时，函数$\dfrac{f(z)}{z}$也趋向于零，即函数$f(z)$在零点处的方向导数都等于零.

(4) 当z沿曲线$y=x^3$趋向于零时，函数$\dfrac{f(z)}{z}$取值为$-\dfrac{\mathbf{i}}{2}$. 因此函数$f(z)$在零点处不可导.

5 设C为一内部包含实数轴上线段$[a,b]$的简单光滑闭曲线，函数$f(z)$在C内及其上解析且在$[a,b]$上取实值，证明对于$[a,b]$上任两点z_1,z_2，总存在$[a,b]$上的点z_0满足

$$\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}\mathrm{d}z=\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z.$$

证明：函数$f(z)$限制在$[a,b]$上是一个实可微函数，由拉格朗日中值定理可知，对$[a,b]$中任意两点z_1,z_2，存在$[a,b]$中一点z_0满足

$$\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}=f'(z_0).$$

由可以积分公式可知

$$\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}=\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}\mathrm{d}z,\quad f'(z_0)=\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z.$$

因此

$$\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}\mathrm{d}z=\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z.$$

6 对于在整个复平面上解析的函数$f(z)$，计算正向积分

$$\oint_{|z|=R}\frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-a)(z-b)},|a|<R,|b|<R.$$

并用此积分证明Liouville定理.

证明：由柯西积分公式可知

$$\oint_{|z|=R}\frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-a)(z-b)}=2\pi\mathbf{i}\left(\frac{f(a)}{a-b}+\frac{f(b)}{b-a}\right)=2\pi\mathbf{i}\cdot\frac{f(a)-f(b)}{a-b}.$$

若$f(z)$是一个全平面解析的有界函数，设$M=\sup_{z\in\mathbb{C}}|f(z)|$，则对于任一一个非零点$z_0$，有

$$\frac{f(z_0)-f(0)}{z_0}=\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{|z|=R}\frac{f(z)\mathrm{d}z}{z(z-z_0)},\quad\forall R>|z_0|.$$

因此有

$$\left|\frac{f(z_0)-f(0)}{z_0}\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{R(R-|z_0|)}\cdot2\pi R=\frac{M}{R-|z_0|}.$$

当R趋向无穷大时，$\dfrac{M}{R-|z_0|}$趋向于零，因此只能是$f(z_0)=f(0)$，即$f(z)$是一个常值函数.

7 用复积分证明对于左半复平面($\mathrm{Re}z<0$)上两个复数z_1和z_2，下列不等式成立：

$$|\mathrm{e}^{z_1}-\mathrm{e}^{z_2}|\leqslant|z_1-z_2|.$$

证明：取C为从点z_2到点z_1的方向直线段，则有

$$|\mathrm{e}^{z_1}-\mathrm{e}^{z_2}|=\left|\int_C\mathrm{e}^{\zeta}\mathrm{d}\zeta\right|\leqslant\max|\mathrm{e}^{\zeta}|\int_C|\mathrm{d}\zeta|=\max|\mathrm{e}^{\zeta}||z_1-z_2|.$$

由于线段C都在左半平面中，因此有$\max|\mathrm{e}^{\zeta}|\leqslant 1$，命题得证.

8 设$f(z)$是一个复平面上的解析函数，$p(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0$是一个首项系数为1的复多项式，证明下列不等式成立：

$$|f(0)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(e^{\mathbf{i}\theta})p(e^{\mathbf{i}\theta})|\mathrm{d}\theta.$$

证明：定义多项式$q(z)=1+\overline{a_{n-1}}z+\cdots+\overline{a_0}z^n$, 因此

$$f(0)=f(0)q(0)=\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{|z|=1}\frac{f(z)q(z)}{z}\mathrm{d}z.$$

做模估计得

$$|f(0)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=1}\frac{|f(z)q(z)|}{|z|}|\mathrm{d}z|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta})q(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta})|\mathrm{d}\theta.$$

进一步地有

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}|f(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta})q(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta})|\mathrm{d}\theta&=\int_0^{2\pi}\frac{|f(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta})q(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta})|}{|\mathrm{e}^{\mathbf{i}n\theta}|}\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}|f(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta})||\mathrm{e}^{-\mathbf{i}n\theta}+\overline{a_{n-1}}\mathrm{e}^{-\mathbf{i}(n-1)\theta}+\cdots+\overline{a_0}|\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}|f(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta})||\overline{p(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta})}|\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}|f(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta})||p(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta})|\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

命题得证.

9 证明存在正实数M，对于任意一个多项式$p(z)$下列不等式都成立：

$$\max_{|z|=1}|z^{-1}-p(z)|\geqslant M.$$

证明：我们使用反证法，假设对于任一自然数n，都存在一个多项式$p_n(z)$满足

$$|f(z)-p_n(z)|<\frac{1}{n},\quad\forall|z|=1,$$

则有

$$\oint_{|z|=1}\frac{1}{z}\mathrm{d}z=\lim_{n\to\infty}\oint_{|z|=1}p_n(z)\mathrm{d}z=0,$$

与$\oint_{|z|=1}\frac{1}{z}\mathrm{d}z=2\pi\mathbf{i}$相矛盾，故原命题得证.

10 计算定积分

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{2\mathbf{i}\theta}-3\mathbf{i}\theta}\mathrm{d}\theta.$$

解：令$z=\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}$，因此有

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{2\mathbf{i}\theta}-3\mathbf{i}\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{\mathbf{i}}\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{e}^{z^2}}{z^4}\mathrm{d}z.$$

由高阶柯西积分公式可知

$$\frac{1}{\mathbf{i}}\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{e}^{z^2}}{z^4}\mathrm{d}z=\frac{1}{\mathbf{i}}\frac{2\pi\mathbf{i}}{3!}(\mathrm{e}^{z^2})^{(3)}(0).$$

经计算有

$$(\mathrm{e}^{z^2})^{(3)}=(8z^3+12z)\mathrm{e}^{z^2},$$

因此

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{2\mathbf{i}\theta}-3\mathbf{i}\theta}\mathrm{d}\theta=0.$$