作业二解答 A组

1 求下列幂级数的收敛半径：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$; (2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$;

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} [3+(-1)^n]^n z^n$; (4) $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(\mathbf{i}n) z^n$;

(5) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+a^n) z^n$, $a \in \mathbb{R}$;

(6) $1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} z^n$, 其中复常数$\alpha,\beta,\gamma$不是负整数和0.

解：(1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$，收敛半径为2;

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\mathrm{e}}$, 收敛半径为e;

(3) $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = 4$，收敛半径为$\frac{1}{4}$;

(4) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\mathrm{e}^n+\mathrm{e}^{-n}}{2}} = \mathrm{e}$, 收敛半径为$\frac{1}{\mathrm{e}}$;

(5) 若$|a| \leqslant 1$，$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$，收敛半径为1；若$|a| > 1$，$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |a|$，收敛半径为$\frac{1}{|a|}$；

(6) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+\alpha)(n+\beta)}{n(n+\gamma)} = 1$, 收敛半径为1.

2 将下列函数展开成关于z的幂级数并求其收敛半径：

(1) $\frac{1}{(1+z^5)^2}$; (2) $\sin^2 z$; (3) $\mathrm{sh}z$;

(4) $\cos z \cdot \mathrm{ch} z$; (5) $\ln\frac{1+z}{1-z}$; (6) $\ln(z^2-3z+2)$;

(7) $[\ln(1-z)]^2$; (8) $\int_0^z \frac{\sin\zeta}{\zeta} \mathrm{d}\zeta$;

(9) $\frac{\int_0^z e^{\zeta} d\zeta}{1-z}$; (10) $\sqrt{z+\mathbf{i}}$ $\left(\sqrt{\mathbf{i}} = \frac{1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\right)$.

解：(1) $\frac{1}{(1+z^5)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^{5n}$，收敛半径为1;

(2) $\sin^2 z = \frac{1-\cos 2z}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2^{2n-1} z^{2n}}{(2n)!}$，收敛半径为$+\infty$;

(3) $\mathrm{sh}z=\dfrac{\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^{-z}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$，收敛半径为$+\infty$;

(4) 我们有

$$\begin{aligned}\cos z\cdot \mathrm{ch}z&=\frac{1}{2}[\mathrm{ch}((1+\mathbf{i})z)+\mathrm{ch}((1-\mathbf{i})z)]\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(4z^4)^n}{(4n)!},\end{aligned}$$

收敛半径为$+\infty$;

(5) $\ln\dfrac{1+z}{1-z}=\ln(1+z)-\ln(1-z)=2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)}$，收敛半径为1;

(6) 我们有

$$\begin{aligned}\ln(z^2-3z+2)&=\ln(1-z)+\ln(2-z)\\&=\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\cdot\frac{z^n}{n},\end{aligned}$$

收敛半径为1;

(7) $[\ln(1-z)]^2=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n}\right)^2=\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$，其中

$$a_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(n-k)},$$

收敛半径为1；

(8) $\displaystyle\int_0^z\frac{\sin\zeta}{\zeta}\mathrm{d}\zeta=\int_0^z\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\zeta^{2n}}{(2n+1)!}\right)\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$,
收敛半径为$+\infty$;

(9) $\dfrac{\int_0^z e^{\zeta}d\zeta}{1-z}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$，其中$a_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k!}$，收敛半径为1;

(10) 我们有

$$\begin{aligned}\sqrt{z+\mathbf{i}}&=\frac{1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{1+\frac{z}{\mathbf{i}}}\\&=\frac{1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\left[1-\frac{\mathbf{i}z}{2}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{2n-1}n}\cdot\binom{2n-2}{n-1}(\mathbf{i}z)^n\right],\end{aligned}$$

收敛半径为1.

3 求下列函数在点z_0处的泰勒展开并确定收敛半径：

(1) $\dfrac{z-1}{z+1}, z_0=1$; (2) $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}, z_0=2$;

(3) $\dfrac{1}{z^2}, z_0=-1$; (4) $\dfrac{1}{4-3z}, z_0=1+\mathbf{i}$;

(5) $f(z)=\displaystyle\int_0^z e^{\zeta^2}\mathrm{d}\zeta, z_0=0$; (6) $\sin(2z-z^2), z_0=1$;

(7) $\ln z, z_0=\mathbf{i}$; (8) $e^{\frac{1}{2-z}}, z_0=1$.

解：(1) $\dfrac{z-1}{z+1}=\dfrac{z-1}{2+(z-1)}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{(z-1)^n}{2^n}$，收敛半径为2；

(2) 我们有

$$\begin{aligned}\frac{z}{(z+1)(z+2)}&=\frac{2}{4+(z-2)}-\frac{1}{3+(z-2)}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{3\cdot 3^n}-\frac{1}{2\cdot 4^n}\right)(z-2)^n,\end{aligned}$$

收敛半径为3；

(3) $\dfrac{1}{z^2}=\dfrac{1}{[1-(z+1)]^2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z+1)^n$，收敛半径为1；

(4) 我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{4-3z}&=\frac{1}{(1-3\mathbf{i})-3[z-(1+\mathbf{i})]}\\&=\frac{1+3\mathbf{i}}{10}\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n(1+3\mathbf{i})^n}{10^n}\cdot(z-1-\mathbf{i})^n\right],\end{aligned}$$

收敛半径为$\dfrac{\sqrt{10}}{3}$；

(5) $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)n!}$，收敛半径为$+\infty$；

(6) 我们有

$$\begin{aligned}\sin(2z-z^2)&=\sin[1-(z-1)^2]\\&=\sin 1\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^{4n}}{(2n)!}\right]-\cos 1\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^{4n+2}}{(2n+1)!}\right],\end{aligned}$$

收敛半径为$+\infty$；

(7) 我们有

$$\begin{aligned}\ln z &= \ln(\mathbf{i}+z-\mathbf{i})\\ &= \ln\mathbf{i}+\ln(1-\mathbf{i}(z-\mathbf{i}))\\ &= \frac{\pi}{2}\mathbf{i}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{i}^n(z-\mathbf{i})^n}{n},\end{aligned}$$

收敛半径为1；

(8) 我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\frac{1}{2-z}} &= \mathrm{e}^{\frac{1}{1-(z-1)}}\\ &= \mathrm{e}(1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-1)^n),\end{aligned}$$

其中$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$，收敛半径为1.

4 设$f(z)$是单位圆盘内的解析函数，且满足

$$f(z)=f(ze^{\frac{2\pi\mathbf{i}}{N}}),\quad \forall|z|<1.$$

证明存在单位圆盘上的解析函数$g(z)$使得$f(z)=g(z^N)$.

证明：设函数$f(z)$在单位圆盘里的泰勒展开为

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,$$

设

$$g(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{kN}z^k,$$

令$h(z)=f(z)-g(z^N)$，若$h(z)$不为零，设a_mz^m是$h(z)$泰勒展开的首项，可知$m\nmid N$. 则有

$$1=\lim_{z\to0}\frac{h(z)}{a_mz^m}=\lim_{z\to0}\frac{h(ze^{\frac{2\pi\mathbf{i}}{N}})}{a_m(ze^{\frac{2\pi\mathbf{i}}{N}})^m}=\lim_{z\to0}\frac{h(z)}{a_m(ze^{\frac{2\pi\mathbf{i}}{N}})^m}=e^{\frac{-2m\pi\mathbf{i}}{N}}.$$

因此只能是$f(z)=g(z^N)$.

5 将下列函数在给定环域内展开成洛朗级数：

(1) $\frac{1}{(z^2+1)(z-3)}$, $1<|z|<3$和$|z|>3$;

(2) $\frac{e^z}{z(z^2+1)}$, $0<|z|<1$和$|z|>1$;

(3) $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$, $|z|<1$, $1<|z|<2$, $|z|>2$, $0<|z-1|<1$和$|z-2|>1$;

(4) $\dfrac{1}{z(1-z)^2}$, $0<|z|<1$, $|z|>1$, $0<|z-1|<1$和$|z-1|>1$;

(5) $\dfrac{1}{z(\mathbf{i}-z)}$, $0<|z|<1$, $|z|>1$, $0<|z-\mathbf{i}|<1$和$|z-\mathbf{i}|>1$;

(6) $\dfrac{1}{z(z+2)^3}$, $0<|z|<2$, $|z|>2$, $0<|z+2|<2$和$|z+2|>2$;

(7) $\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$, $0<|z|<1$, $1<|z|<2$, $|z|>2$和$|z-2|<1$;

(8) $\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$, $0<|z-\mathbf{i}|<2$, $|z-\mathbf{i}|>2$和$|z|>1$;

(9) $z^2\sin\left(\dfrac{1}{1-z}\right)$, $|z-1|>0$;

(10) $\sin z\cdot\sin\dfrac{1}{z}$, $|z|>0$;

(11) $\cos\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}$, $|z-2|>0$;

(12) $e^{z+\frac{1}{z}}$, $|z|>0$;

(13) $e^{\frac{1}{1-z}}$, $|z-1|>0$和$|z|>1$;

(14) $\ln\dfrac{z-1}{z-2}$, $|z|>2$;

(15) $\sqrt{(z-1)(z-2)}$ $(\sqrt{2}>0)$, $|z|>2$.

解：(1) $\dfrac{1}{(z^2+1)(z-3)}=\dfrac{1}{10(z-3)}-\dfrac{z+3}{10(z^2+1)}$，当$|z|>3$时，我们有

$$\frac{1}{10(z-3)}=\frac{1}{10}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{z^n},$$
$$\frac{z+3}{10(z^2+1)}=\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n+1}}+\frac{3}{10}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n+2}}.$$

当$1<|z|<3$时，我们有

$$\frac{1}{10(z-3)}=-\frac{1}{30}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n},$$
$$\frac{z+3}{10(z^2+1)}=\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n+1}}+\frac{3}{10}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n+2}}.$$

(2) 当$0<|z|<1$时，有

$$\frac{e^z}{z(z^2+1)}=\frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}\right)=\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n,$$

其中

$$a_{2n}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{(2n-2k)!},\quad a_{2n+1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{(2n-2k+1)!}.$$

当$|z|>1$时，有

$$\frac{e^z}{z(z^2+1)}=\frac{1}{z^3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n}}\right)=\frac{1}{z^3}\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n,$$

其中

$$a_n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+n)!},\quad a_{-n}=\sum_{2k\geq n}\frac{(-1)^k}{(2k-n)!},\quad n\geqslant 0.$$

(3) 我们有分解$\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}=\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{1}{z-1}$，则我们有

$$\frac{1}{z-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n,\quad |z|<1,$$
$$\frac{1}{z-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n},\quad |z|>1,$$
$$\frac{1}{z-2}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}},\quad |z|<2,$$
$$\frac{1}{z-2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n},\quad |z|>2.$$

当$0<|z-1|<1$时，

$$\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n.$$

当$|z-2|>1$时，

$$\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^n}.$$

(4) 当$0<|z|<1$时，我们有

$$\frac{1}{z(1-z)^2}=\frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^{n-1}.$$

当$|z|>1$时，我们有

$$\frac{1}{z(1-z)^2}=\frac{1}{z^3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{z^{n+3}}.$$

当$0<|z-1|<1$时，我们有

$$\frac{1}{z(1-z)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{n-2}.$$

当$|z-1|>1$时，我们有

$$\frac{1}{z(1-z)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-1)^{n+3}}.$$

(5) 当$0<|z|<1$时，我们有

$$\frac{1}{z(\mathbf{i}-z)}=-\mathbf{i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\mathbf{i}^n z^{n-1}.$$

当$|z|>1$时，我们有

$$\frac{1}{z(\mathbf{i}-z)}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbf{i}^n}{z^{n+2}}.$$

当$0<|z-\mathbf{i}|<1$时，我们有

$$\frac{1}{z(\mathbf{i}-z)}=\mathbf{i}\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{i}^n(z-\mathbf{i})^{n-1}.$$

当$|z-\mathbf{i}|>1$时，我们有

$$\frac{1}{z(\mathbf{i}-z)}=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\mathbf{i}^n}{(z-\mathbf{i})^{n+2}}.$$

(6) 当$0<|z|<2$时，有

$$\frac{1}{z(z+2)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+2)!z^{n-1}}{2^{n+4}\cdot n!}.$$

当$|z|>2$时，有

$$\frac{1}{z(z+2)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n-1}(n+2)!}{n!\cdot z^{n+4}}.$$

当$0<|z+2|<2$时，有

$$\frac{1}{z(z+2)^3}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^{n-3}}{2^{n+1}}.$$

当$|z+2|>2$时，有

$$\frac{1}{z(z+2)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(z+2)^{n+4}}.$$

(7) 我们有分解$\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}=\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{2}{z^2+1}$，则有

$$\frac{1}{z-2}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}},\quad |z|<2,$$
$$\frac{1}{z-2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n},\quad |z|>2,$$
$$\frac{2}{z^2+1}=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n},\quad |z|<1,$$
$$\frac{2}{z^2+1}=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n+2}},\quad |z|>1.$$

令$\zeta=z-2$，当$|\zeta|<1$时

$$\begin{aligned}\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}&=\frac{1}{\zeta}-\frac{2}{\zeta^2+4\zeta+5}=\frac{1}{\zeta}+\mathbf{i}\left(\frac{1}{\zeta+2-\mathbf{i}}-\frac{1}{\zeta+2+\mathbf{i}}\right)\\&=\frac{1}{\zeta}+\mathbf{i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\zeta^n}{(2-\mathbf{i})^{n+1}}+\mathbf{i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\zeta^n}{(2+\mathbf{i})^{n+1}}.\end{aligned}$$

(8) 当$0<|z-\mathbf{i}|<2$时，有

$$\frac{1}{(z^2+1)^2}=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)\mathbf{i}^n(z-\mathbf{i})^{n-2}}{2^n}.$$

当$|z-\mathbf{i}|>2$时，有

$$\frac{1}{(z^2+1)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)(2\mathbf{i})^n}{(z-\mathbf{i})^{n+4}}.$$

当$|z|>1$时，有

$$\frac{1}{(z^2+1)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{z^{2n+4}}.$$

(9) 我们有分解

$$z^2\sin\left(\frac{1}{1-z}\right)=-[(z-1)^2+2(z-1)+1]\sin\left(\frac{1}{z-1}\right)$$

因此有

$$z^2\sin\left(\frac{1}{1-z}\right)=-(z-1)+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{(2n+1)!(z-1)^{2n}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4n^2+10n+5}{(2n+3)!(z-1)^{2n+1}}.$$

(10) 由课程电子版讲义

$$\sin z\cdot\sin\frac{1}{z}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{2n}z^{2n},$$

其中

$$a_{2n}=a_{-2n},\quad a_{2n}=(-1)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!(2n+2k+1)!},\quad \forall n\geqslant 0.$$

(11) 我们有分解

$$\cos\frac{z^2-4z}{(z-2)^2}=\cos\left(1-\frac{4}{(z-2)^2}\right)=\cos 1\cdot\cos\frac{4}{(z-2)^2}+\sin 1\cdot\sin\frac{4}{(z-2)^2},$$

因此有

$$\cos\frac{z^2-4z}{(z-2)^2}=\cos 1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{4n}}{(z-2)^{4n}}+\sin 1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{4n+2}}{(z-2)^{4n+2}}.$$

(12) 由电子版讲义

$$e^{z+\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n,$$

其中

$$a_n=a_{-n},\quad a_n=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!(n+l)!},\quad \forall n\geqslant 0.$$

(13) 当$|z-1|>0$时，有

$$e^{\frac{1}{1-z}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!(z-1)^n}.$$

当$|z|>1$时，$e^{\frac{1}{1-z}}=e^{\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}}$，由电子版讲义

$$e^{\frac{1}{1-z}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\binom{n-1}{k-1}\right]\frac{1}{z^n}.$$

(14) 当$|z|>2$时，我们有

$$\ln\frac{z-1}{z-2}=\ln\left(1-\frac{1}{z}\right)-\ln\left(1-\frac{2}{z}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{z^n}.$$

(15) 当$|z|>2$时，我们有

$$\sqrt{(z-1)(z-2)}=z\sqrt{1-\frac{1}{z}}\cdot\sqrt{1-\frac{2}{z}}=z\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\mathrm{C}_n\frac{1}{z^n}\right)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\mathrm{C}_n\frac{2^n}{z^n}\right),$$

其中$\mathrm{C}_n=\dfrac{\prod_{k=0}^{n-1}(\frac{1}{2}-k)}{n!}$. 不妨设$\mathrm{C}_0=1$，则有

$$\sqrt{(z-1)(z-2)}=z\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{1}{z^n}\right),$$

其中
$$a_n=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_k\mathrm{C}_{n-k}2^k.$$

6 设p是一正整数，证明函数$\dfrac{\sin z}{z^p}$在区域$|z|>0$上存在原函数当且仅当p是奇数.

证明：函数$\dfrac{\sin z}{z^p}$在区域$|z|>0$上的洛朗展开为
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1-p}}{(2n+1)!}.$$
当p为奇数时，对任一非负整数n，$2n+2-p$均不为零，因此$\dfrac{\sin z}{z^p}$在$|z|>0$ 上的原函数为
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+2-p}}{(2n+2-p)(2n+1)!}.$$
若p为偶数，则$\dfrac{\sin z}{z^p}$洛朗级数展开中有$\dfrac{1}{z}$项，而$\dfrac{1}{z}$在$|z|>0$上并没有原函数.

7 确定下列函数在复平面的孤立奇点及其类型，并确定极点的阶数：

(1) $\dfrac{1}{z^3(z^2+1)^2}$; (2) $\dfrac{e^z\sin z}{z^2}$; (3) $\dfrac{1}{z^3-z^2-z+1}$;
(4) $\dfrac{1}{\sin z}$; (5) $\dfrac{z}{(1+z^2)(1+e^z)}$; (6) $\sin\dfrac{1}{1-z}$;
(7) $e^{z-\frac{1}{z}}$; (8) $\sin\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}$; (9) $e^{\frac{z}{1-z}}$;

(10) $\dfrac{z^{2n}}{1+z^n}$; (11) $\dfrac{\ln(z+1)}{z}$; (12) $\dfrac{e^{\frac{1}{1-z}}}{e^z-1}$;

解：(1) $z=0$为三阶极点，$z=\pm\mathbf{i}$为二阶极点；

(2) $z=0$为一阶极点；

(3) $z=-1$为一阶极点，$z=1$为二阶极点；

(4) $z=k\pi$为一阶极点；

(5) $z=\pm\mathbf{i}$和$z=(2k+1)\pi\mathbf{i}$都是一阶极点；

(6) $z=1$为本性奇点；

(7) $z=0$为本性奇点；

(8) $z=0$为本性奇点；

(9) $z=1$为本性奇点；

(10) $z=e^{\frac{(2k+1)\pi\mathbf{i}}{n}}$是一阶极点；

(11) $z=0$为可去奇点；

(12) $z=1$为本性奇点，$z=2k\pi\mathbf{i}$是一阶极点.

8 指出下列函数在无穷远点的性质：

(1) $\dfrac{1}{z-z^3}$; (2) $\dfrac{z^4}{1+z^4}$;

(3) $\dfrac{z^6}{(z^2-3)^2\cos\dfrac{1}{z-2}}$; (4) $\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$;

(5) $\dfrac{e^z}{z(1-e^{-z})}$; (6) $e^{-z}\cos\dfrac{1}{z}$.

解：(1) ∞点是可去奇点，∞处极限为零；

(2) ∞点是可去奇点，∞处极限为1；

(3) ∞点是二阶极点；

(4) ∞点是本性奇点；

(5) ∞点是本性奇点；

(6) ∞点是本性奇点.

9 确定下列函数在扩充复平面的孤立奇点及其类型，并确定极点的阶数：

(1) $\sin\dfrac{z}{z+1}$; (2) $e^{z+\frac{1}{z}}$; (3) $\sin z\cdot\sin\dfrac{1}{z}$;

(4) $\dfrac{\mathrm{sh}z}{\mathrm{ch}z}$; (5) $\sin\left[\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{z}}\right]$; (6) $\tan^2 z$;

(7) $\dfrac{1}{\sin z-\sin a}$; (8)$e^{\tan\frac{1}{z}}$.

解：(1) $z=-1$是本性奇点，$z=\infty$是可去奇点；

(2) $z=0$和$z=\infty$都是本性奇点；

(3) $z=0$和$z=\infty$都是本性奇点；

(4) $z=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi\mathbf{i}$是一阶极点，$z=\infty$是本性奇点；

(5) $z=\dfrac{1}{n\pi}$是本性奇点；

(6) $z=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi$是二阶极点，$z=\infty$是本性奇点；

(7) 若a不是π的整数倍，$z=a+2n\pi$是一阶极点；若a是π的整数倍，$z=n\pi$是一阶极点；$z=\infty$是本性奇点；

(8) $z=\dfrac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}$是本性奇点.

10 函数$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)^3}$在$z=2$处有一个三阶极点，此函数又有如下的洛朗展开式

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)^3}=\cdots+\frac{1}{(z-2)^6}-\cdots+\frac{1}{(z-2)^5}+\cdots+\frac{1}{(z-2)^4},\quad |z-2|>1.$$

所以“$z=2$又是$f(z)$的一个本性奇点”；又上面的洛朗展开式中不含有$\dfrac{1}{z-2}$幂项，因此$\mathrm{Res}[f(z),2]=0$. 这些结论对吗？

答：函数$f(z)$在区域$0<|z-2|<1$上的洛朗级数展开是

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^{n-3}.$$

因此$f(z)$在$z=2$处的留数为1. 孤立奇点的性质由函数在去心邻域上洛朗展开式决定，因此题干中的洛朗展开式不能决定$z=2$的奇点性质.

11 设$f(z)$是区域D上的单值函数，在区域D上除去有限个孤立极点外的区域上解析，证明函数$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$在$f(z)$的极点和零点上是简单极点，在区域D上其他点解析.

证明：由于函数$f(z)$是单值函数，因此函数$f(z)$不可能在某一区域内恒等于零，因此函数$f(z)$ 的零点都是有限阶的，即都是孤立零点. 显然函数$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$在函数$f(z)$的零点和极点以外都是解析的. 设z_0是函数$f(z)$的一个m阶零点，则函数$f(z)$在点z_0处的泰勒展开为

$$a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+a_{m+2}(z-z_0)^{m+2}+\cdots,\quad a_m\neq 0.$$

因此函数$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$在点z_0处的洛朗展开为

$$\frac{ma_m(z-z_0)^{m-1}+(m+1)a_{m+1}(z-z_0)^m+(m+2)a_{m+2}(z-z_0)^{m+1}+\cdots}{a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+a_{m+2}(z-z_0)^{m+2}+\cdots},$$

化简为

$$\frac{ma_m+(m+1)a_{m+1}(z-z_0)+(m+2)a_{m+2}(z-z_0)^2+\cdots}{a_m(z-z_0)+a_{m+1}(z-z_0)^2+a_{m+2}(z-z_0)^3+\cdots}.$$

因此点z_0是函数$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$的一阶极点. 对于函数$f(z)$极点的证明方法类似.

12 计算下列函数在扩充复平面上孤立奇点上的留数：

(1) $\dfrac{1}{z^3-z^5}$; (2) $\dfrac{z^{2n}}{1+z^n}$; (3) $\dfrac{z^{2n}}{(1+z)^n}$;

(4) $\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$; (5) $\dfrac{e^z}{z^2(z^2+9)}$; (6) $\tan z$;

(7) $\dfrac{1}{\sin z}$ (8) $\cot^2 z$; (9) $\cos\dfrac{z^2+4z-1}{z+3}$;

(10) $z^n\sin\dfrac{1}{z}$; (11) $\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$; (12) $\dfrac{1}{z(1-e^{-hz})}(h>0)$.

解：(1) 我们有

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^3-z^5},0\right] &= \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^3}(1+z^2+z^4+\cdots),0\right]=1,\\
\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^3-z^5},\pm1\right] &= \frac{1}{3z^2-5z^4}(\pm1)=-\frac{1}{2},\\
\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^3-z^5},\infty\right] &= 0.
\end{aligned}$$

(2) 若ω满足$\omega^n+1=0$，我们有

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z^{2n}}{1+z^n},\omega\right]=\frac{\omega^{2n}}{n\omega^{n-1}}=-\frac{\omega}{n},\quad \operatorname{Res}\left[\frac{z^{2n}}{1+z^n},\infty\right]=0.$$

(3) 我们有

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left[\frac{z^{2n}}{(1+z)^n},-1\right] &= (-1)^{n+1}\binom{2n}{n-1},\\
\operatorname{Res}\left[\frac{z^{2n}}{(1+z)^n},\infty\right] &= (-1)^n\binom{2n}{n-1}.
\end{aligned}$$

(4) 我们有

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left[\frac{\sin 2z}{(z+1)^3},-1\right] &= -2\sin 2z(-1)=2\sin 2,\\
\operatorname{Res}\left[\frac{\sin 2z}{(z+1)^3},\infty\right] &= -2\sin 2.
\end{aligned}$$

(5) 我们有

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^z}{z^2(z^2+9)},0\right] &= \frac{\mathrm{e}^z(z^2+9)-2z\mathrm{e}^z}{(z^2+9)^2}(0)=\frac{1}{9},\\
\operatorname{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^z}{z^2(z^2+9)},3\mathbf{i}\right] &= \frac{\mathbf{e}^z}{2z^3}(3\mathbf{i})=-\frac{1}{54}(\sin 3-\cos\mathbf{i})\\
\operatorname{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^z}{z^2(z^2+9)},-3\mathbf{i}\right] &= \frac{\mathbf{e}^z}{2z^3}(-3\mathbf{i})=-\frac{1}{54}(\sin 3+\cos\mathbf{i}),\\
\operatorname{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^z}{z^2(z^2+9)},\infty\right] &= \frac{\sin 3-3}{27}.
\end{aligned}
$$

(6) 我们有

$$
\operatorname{Res}\left[\tan z,(n+\frac{1}{2})\pi\right]=-1.
$$

(7) 我们有

$$
\operatorname{Res}\left[\frac{1}{\sin z},n\pi\right]=(-1)^n.
$$

(8) 由等式

$$
\cot(n\pi+(z-n\pi))=\frac{\sin(z-n\pi)}{\cos(z-n\pi)}
$$

我们有

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left[\cot^2 z,n\pi\right] &= \operatorname{Res}\left[\cot^2 z,0\right]\\
&= \operatorname{Res}\left[\frac{(1-\frac{z^2}{2}+\cdots)^2}{z^2(1-\frac{z^2}{6}+\cdots)^2},0\right]=0.
\end{aligned}
$$

(9) 我们有等式

$$
\begin{aligned}
\cos\frac{z^2+4z-1}{z+3} &= \cos\left(z+3-2-\frac{4}{z+3}\right)\\
&= \cos\left(2+\frac{4}{z+3}-z-3\right)\\
&= \cos 2\cos\left[\frac{4}{z+3}-(z+3)\right]-\sin 2\sin\left[\frac{4}{z+3}-(z+3)\right].
\end{aligned}
$$

由于有理函数$\left[\frac{4}{z+3}-(z+3)\right]$的偶次幂中不含$(z+3)$的奇次幂，因此

$$
\operatorname{Res}\left[\cos\left[\frac{4}{z+3}-(z+3)\right],-3\right]=0.
$$

而$\left[\frac{4}{z+3}-(z+3)\right]^{2n+1}$中所含$\frac{1}{z+3}$项的系数是$(-1)^n4^{n+1}\binom{2n+1}{n+1}$，因此

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left[\sin\left[\frac{4}{z+3}-(z+3)\right],-3\right] &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot(-1)^n4^{n+1}\binom{2n+1}{n+1}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^{n+1}}{n!(n+1)!}.
\end{aligned}
$$

因此

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left[\cos\frac{z^2+4z-1}{z+3},-3\right]&=-\operatorname{Res}\left[\cos\frac{z^2+4z-1}{z+3},\infty\right]\\&=-\sin 2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^{n+1}}{n!(n+1)!}.\end{aligned}$$

(10) 若n不是非负偶数，我们有

$$\operatorname{Res}\left[z^n\sin\frac{1}{z},0\right]=\operatorname{Res}\left[z^n\sin\frac{1}{z},\infty\right]=0.$$

若n是非负偶数，我们有

$$\operatorname{Res}\left[z^n\sin\frac{1}{z},0\right]=-\operatorname{Res}\left[z^n\sin\frac{1}{z},\infty\right]=(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{(n+1)!}.$$

(11) 我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left[\frac{1}{\sin\frac{1}{z}},\frac{1}{n\pi}\right]&=-\frac{z^2}{\cos\frac{1}{z}}\left(\frac{1}{n\pi}\right)\\&=\frac{(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}(n\neq 0),\\\operatorname{Res}\left[\frac{1}{\sin\frac{1}{z}},\infty\right]&=-\operatorname{Res}\left[\frac{1}{\sin\zeta\cdot\zeta^2},0\right]\\&=-\operatorname{Res}\left[\frac{1}{\zeta^3}(1+\frac{\zeta^2}{6}+\cdots),0\right]=-\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

(12) 我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z(1-\mathrm{e}^{-hz})},\frac{2n\pi\mathbf{i}}{h}\right]&=\frac{1}{hz\mathrm{e}^{-hz}}\left(\frac{2n\pi\mathbf{i}}{h}\right)=\frac{1}{2n\pi\mathbf{i}},\\\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z(1-\mathrm{e}^{-hz})},0\right]&=\operatorname{Res}\left[\frac{1}{hz^2(1-\frac{hz}{2}+\cdots)},0\right]=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

13 用留数计算下列定积分：

(1) $\oint_C\frac{z\mathrm{d}z}{(z-1)(z-2)^2},C:|z-2|=\frac{1}{2}$; (2) $\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{1+z^4},C:x^2+y^2=2x$;

(3) $\oint_C\frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z,C:|z|=\frac{3}{2}$; (4) $\oint_C\frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}\mathrm{d}z,C:|z|=4$;

(5) $\oint_C\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}\mathrm{d}z,C:|z|=2$; (6) $\oint_C\frac{1-\cos z}{z^m}\mathrm{d}z,C:|z|=\frac{3}{2},m\in\mathbb{Z}$;

解：(1) 我们有

$$\begin{aligned}\oint_{|z-2|=\frac{1}{2}}\frac{z\mathrm{d}z}{(z-1)(z-2)^2}&=2\pi\mathbf{i}\operatorname{Res}\left[\frac{z}{(z-1)(z-2)^2},2\right]\\&=-2\pi\mathbf{i};\end{aligned}$$

(2) 我们有

$$\oint_{|z-1|=1}\frac{\mathrm{d}z}{1+z^4}=2\pi\mathbf{i}\mathrm{Res}\left[\frac{1}{1+z^4},\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}\right]+2\pi\mathbf{i}\mathrm{Res}\left[\frac{1}{1+z^4},\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}\right]$$
$$=-\frac{\sqrt{2}\pi\mathbf{i}}{2};$$

(3) 我们有

$$\oint_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z=0;$$

(4) 我们有

$$\oint_{|z|=4}\frac{3z^2+2}{(z-1)(z^2+9)}\mathrm{d}z=2\pi\mathbf{i}\cdot\frac{1}{2}+2\pi\mathbf{i}\left(\frac{25}{18+6\mathbf{i}}+\frac{25}{18-6\mathbf{i}}\right)$$
$$=6\pi\mathbf{i};$$

(5) 我们有

$$\oint_{|z|=2}\frac{\mathrm{e}^{2z}}{(z-1)^2}\mathrm{d}z=2\pi\mathbf{i}\cdot 2\mathrm{e}^2=4\pi\mathrm{e}^2\mathbf{i};$$

(6) 我们有洛朗展开

$$\frac{1-\cos z}{z^m}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{2n-m}}{(2n)!},$$

$$\oint_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{1-\cos z}{z^m}\mathrm{d}z=\begin{cases}(-1)^{\frac{m+1}{2}}\cdot\dfrac{2\pi\mathbf{i}}{(m-1)!}, & m\text{是大于1的奇数;}\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

14 求下列函数在无穷远点的留数：

(1) $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2-1}$;(2) $f(z)=\dfrac{1}{z(z+1)^4(z-4)}$;(3) $f(z)=\dfrac{2z}{3+z^2}$.

解：(1) 由等式

$$f\left(\frac{1}{\zeta}\right)\frac{1}{\zeta^2}=\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{\zeta}}}{1-\zeta^2}$$

我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\,[f(z),\infty] &= -\mathrm{Res}\left[f(\frac{1}{\zeta})\frac{1}{\zeta^2},0\right]\\ &= -\left(1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\cdots\right)\\ &= \frac{1-\mathrm{e}^2}{2\mathrm{e}}.\end{aligned}$$

(2) 由等式

$$f\left(\frac{1}{\zeta}\right)\frac{1}{\zeta^2}=\frac{\zeta^4}{(1+\zeta)^4(1-4\zeta)}$$

我们有

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=0.$$

(3) 由等式

$$f\left(\frac{1}{\zeta}\right)\frac{1}{\zeta^2}=\frac{2}{\zeta(1+3\zeta^2)}$$

我们有

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-2.$$

15 设$z=\infty$是函数$f(z)$的可去奇点，求$\mathrm{Res}[f(z),\infty]$.

解：若∞是函数$f(z)$的可去奇点，则$f(z)$在点∞一个领域内的洛朗展开为

$$c_0+c_1\frac{1}{z}+c_2\frac{1}{z^2}+c_3\frac{1}{z^3}+\cdot,$$

则函数$f\left(\dfrac{1}{\zeta^2}\right)\dfrac{1}{\zeta^2}$在处的洛朗展开为

$$c_0\frac{1}{\zeta^2}+c_1\frac{1}{\zeta}+c_2+c_3\zeta+\cdot.$$

因此$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\mathrm{Res}\left[f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)\dfrac{1}{\zeta^2},0\right]=-c_1.$

16 计算下列积分：

(1) $\displaystyle\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{z^3(z^{10}-2)},C:|z|=2$; (2) $\displaystyle\oint_C\frac{z^3}{1+z}\cdot e^{\dfrac{1}{z}}\mathrm{d}z,C:|z|=2.$

解：(1) 我们有

$$\oint_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z^3(z^{10}-2)}=-2\pi\mathbf{i}\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^3(z^{10}-2)},\infty\right]=0;$$

(2) 我们有

$$\oint_{|z|=2}\frac{z^3}{1+z}\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\mathrm{d}z=2\pi\mathbf{i}\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{\zeta}}{\zeta^4(1+\zeta)},0\right]=-\frac{2\pi\mathbf{i}}{3}.$$

17 用课本5.3.1节的方法计算如下定积分：

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a+\cos\theta}(a>1)$; (2) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\cos 2\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\mathrm{d}\theta(a^2<1)$;

(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(a+b\cos\theta)^2}(a>b>0)$; (4)$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(a+b\cos^2\theta)^2}(a>0,b>0)$;

(5) $\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\cos(n\theta-\sin\theta)\mathrm{d}\theta(n$ 是整数).

解：(1) 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}&=\oint_{|z|=1}\frac{1}{a+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathbf{i}z}\\&=\frac{2}{\mathbf{i}}\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z^2+2az+1}\\&=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}};\end{aligned}$$

(2) 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\mathrm{d}\theta&=\oint_{|z|=1}\frac{z^2+\frac{1}{z^2}}{2[1-a(z+\frac{1}{z})+a^2]}\frac{\mathrm{d}z}{\mathbf{i}z}\\&=-\frac{1}{2\mathbf{i}}\oint_{|z|=1}\frac{z^4+1}{z^2[az^2-(a^2+1)z+a]}\mathrm{d}z\\&=-\pi\mathrm{Res}\left[\frac{z^4+1}{z^2[az^2-(a^2+1)z+a]},0\right]\\&-\pi\mathrm{Res}\left[\frac{z^4+1}{z^2[az^2-(a^2+1)z+a]},a\right]\\&=\pi\left[\left.\frac{2az-(a^2+1)}{[az^2-(a^2+1)z+a]^2}\right|_{z=0}+\left.\frac{z^4+1}{z^2(a^2+1-2az)}\right|_{z=a}\right]\\&=\frac{2a^2\pi}{1-a^2}.\end{aligned}$$

故我们有

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos 2\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\mathrm{d}\theta=\frac{a^2\pi}{1-a^2};$$

(3) 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(a+b\cos\theta)^2}&=\frac{4}{\mathbf{i}}\oint_{|z|=1}\frac{z\mathrm{d}z}{(bz^2+2az+b)^2}\\&=8\pi\left(\frac{z}{b^2(z+\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b})^2}\right)'\Bigg|_{z=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}}\\&=\frac{2a\pi}{(a^2-b^2)\sqrt{a^2-b^2}};\end{aligned}$$

(4) 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(a+b\cos^2\theta)^2}&=\frac{4}{\mathbf{i}}\oint_{|z|=1}\frac{z^3\mathrm{d}z}{(bz^4+2az^2+b)^2}\\&=\frac{(2a+b)\pi}{a(a+b)\sqrt{a^2+ab}};\end{aligned}$$

(5) 在单位圆周$|z|=1$上，我们有

$$\begin{aligned}\cos(n\theta-\sin\theta)&=\cos n\theta\cos(\sin\theta)+\sin n\theta\sin(\sin\theta)\\&=\frac{1}{4}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(z-\frac{1}{2})}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(z-\frac{1}{2})}\right)-\frac{1}{4}\left(z^n-\frac{1}{z^n}\right)\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(z-\frac{1}{2})}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(z-\frac{1}{2})}\right)\\&=\frac{1}{2z^n}\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(z-\frac{1}{2})}+\frac{z^n}{2}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(z-\frac{1}{2})}.\end{aligned}$$

因此我们有

$$\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\cos(n\theta-\sin\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\mathbf{i}}\oint_{|z|=1}\left(\frac{\mathrm{e}^z}{z^{n+1}}+z^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\right)\mathrm{d}z.$$

当$n\geqslant 0$时，

$$\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\cos(n\theta-\sin\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{2\pi}{n!},$$

当$n<0$时，

$$\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\cos(n\theta-\sin\theta)\mathrm{d}\theta=0.$$

18 用课本5.3.2节的方法计算如下定积分：

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$; (2)$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{(1+x^2)(x^2+2x+2)}$;

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+4x+13)^2}$; (4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}(a>0)$;

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}(n\text{是正整数})$; (6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}(a>0,b>0)$;

(7) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x.$

解：(1) 我们有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} &= 2\pi\mathbf{i}\mathrm{Res}[f(z), -1+\mathbf{i}] \\ &= \pi;\end{aligned}$$

(2) 我们有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\mathrm{d}x}{(1+x^2)(x^2+2x+2)} &= 2\pi\mathbf{i}\mathrm{Res}[f(z), \mathbf{i}] + 2\pi\mathbf{i}\mathrm{Res}[f(z), -1+\mathbf{i}] \\ &= -\frac{\pi}{5};\end{aligned}$$

(3) 我们有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+4x+13)^2} &= 2\pi\mathbf{i}\mathrm{Res}[f(z), -2+3\mathbf{i}] \\ &= -\frac{\pi}{27};\end{aligned}$$

(4) 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} &= \pi\mathbf{i}\left(\frac{z^2}{(z+a\mathbf{i})^2}\right)'(a\mathbf{i}) \\ &= \frac{\pi}{4a};\end{aligned}$$

(5) 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n} &= \pi\mathbf{i}\left(\frac{1}{(z+\mathbf{i})^n}\right)^{(n-1)}(\mathbf{i}) \\ &= \binom{2n-2}{n-1}\cdot\frac{\pi}{2^{2n-1}};\end{aligned}$$

(6) 我们有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} &= 2\pi\mathbf{i}\mathrm{Res}[f(z), a\mathbf{i}] + 2\pi\mathbf{i}\mathrm{Res}[f(z), b\mathbf{i}] \\ &= \frac{\pi}{ab(a+b)};\end{aligned}$$

(7) 我们有

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x=\pi\mathbf{i}\mathrm{Res}\left[f(z),\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}\right]+\pi\mathbf{i}\mathrm{Res}\left[f(z),-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}\right]$$
$$=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}.$$

19 用课本5.3.3节的方法计算如下定积分：

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x\mathrm{d}x}{x^2-2x+10}$; (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(1+x^2)\cos ax}{1+x^2+x^4}\mathrm{d}x(a>0)$;
(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{x^2+b^2}\mathrm{d}x(a>0,b>0)$; (4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}\mathrm{d}x(a>0,b>0)$;
(5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x\mathrm{d}x}{x^2-5x+6}$; (6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x\mathrm{d}x}{(x^2+4)(x-1)}$;
(7) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\cdot\frac{\sin ax}{x}\mathrm{d}x(a>0,b>0)$; (8) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax\mathrm{d}x}{x(x^2+b^2)}(a>0,b>0)$.

解：(1) 我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x\mathrm{d}x}{x^2-2x+10}=\mathrm{Im}\left\{2\pi\mathbf{i}\mathrm{Res}\left[\frac{ze^{\mathbf{i}z}}{z^2-2z+10},1+3\mathbf{i}\right]\right\}$$
$$=\frac{\pi(3\cos1+\sin1)}{3\mathrm{e}^3}$$

(2) 我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(1+x^2)\cos ax}{1+x^2+x^4}\mathrm{d}x=\mathrm{Re}\left\{2\pi\mathbf{i}\mathrm{Res}\left[\frac{(1+z^2)\mathrm{e}^{iaz}}{1+z^2+z^4},\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}\right]+2\pi\mathbf{i}\mathrm{Res}\left[\frac{(1+z^2)\mathrm{e}^{iaz}}{1+z^2+z^4},-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}\right]\right\}$$
$$=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{3}a}{2}}\cos\frac{a}{2};$$

(3) 我们有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{x^2+b^2}\mathrm{d}x=\mathrm{Re}\left\{\pi\mathbf{i}\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}az}}{z^2+b^2},b\mathbf{i}\right]\right\}$$
$$=\frac{\pi\mathrm{e}^{-ab}}{2b};$$

(4) 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}\mathrm{d}x&=\mathrm{Im}\left\{\pi\mathbf{i}\mathrm{Res}\left[\frac{z\mathrm{e}^{\mathbf{i}az}}{z^2+b^2},b\mathbf{i}\right]\right\}\\&=\frac{\pi\mathrm{e}^{-ab}}{2};\end{aligned}$$

(5) 我们有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x\mathrm{d}x}{x^2-5x+6}&=\mathrm{Re}\left\{\pi\mathbf{i}\mathrm{Res}\left[\frac{z\mathrm{e}^{\mathbf{i}z}}{z^2-5z+6},2\right]+\pi\mathbf{i}\mathrm{Res}\left[\frac{z\mathrm{e}^{\mathbf{i}z}}{z^2-5z+6},3\right]\right\}\\&=\pi(2\sin 2-3\sin 3);\end{aligned}$$

(6) 我们有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x\mathrm{d}x}{(x^2+4)(x-1)}&=\mathrm{Im}\left\{\pi\mathbf{i}\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}z}}{(z^2+4)(z-1)},1\right]+2\pi\mathbf{i}\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}z}}{(z^2+4)(z-1)},2\mathbf{i}\right]\right\}\\&=\frac{\pi}{5}\left(\cos 1-\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right);\end{aligned}$$

(7) 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\cdot\frac{\sin ax}{x}\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left\{\pi\mathbf{i}\mathrm{Res}\left[\frac{z^2-b^2}{z^2+b^2}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}az}}{z},0\right]+2\pi\mathbf{i}\mathrm{Res}\left[\frac{z^2-b^2}{z^2+b^2}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}az}}{z},b\mathbf{i}\right]\right\}\\&=\pi\left(\mathrm{e}^{-ab}-\frac{1}{2}\right);\end{aligned}$$

(8) 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax\mathrm{d}x}{x(x^2+b^2)}&=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left\{\pi\mathbf{i}\mathrm{Res}\left[\frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)},0\right]+2\pi\mathbf{i}\mathrm{Res}\left[\frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)},b\mathbf{i}\right]\right\}\\&=\frac{\pi}{2b^2}\cdot(1-\mathrm{e}^{-ab}).\end{aligned}$$