作业二解答 B组

1 证明等式：

$$\pi \cot \pi z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z+n}.$$

证明：设

$$f(z) = \pi \cot \pi z, \quad g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z+n}.$$

则函数$f(z)$和$g(z)$都是在复平面上除了整数点以外都解析的函数，且整数点在$f(z)$和$g(z)$上都是一阶极点. 易验证

$$\mathrm{Res}[f(z), n] = \mathrm{Res}[g(z), n] = 1.$$

因此函数

$$h(z) = f(z) - g(z)$$

是复平面上的解析函数且$h\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. 由刘维尔定理，我们只需证明函数$h(z)$在复平面上的有界即可证明函数$h(z)$恒等于零. 由函数$h(z)$的周期性我们只需要证明其在闭区域$\left\{-\frac{1}{2} \leqslant \mathrm{Re}z \leqslant \frac{1}{2}\right\}$上有界即可. 由连续性可知函数$h(z)$在

$$\left\{-\frac{1}{2} \leqslant \mathrm{Re}z \leqslant \frac{1}{2}, -1 \leqslant \mathrm{Im}z \leqslant 1\right\}$$

上是有界的. 因此只需证函数$h(z)$在$|\mathrm{Im}z| > 1$是有界的. 经计算有

$$\lim_{y\to+\infty} |\cot \pi z| = \lim_{y\to+\infty} \left|\frac{\mathrm{e}^{2\pi y} + \mathrm{e}^{2\pi x\mathbf{i}}}{\mathrm{e}^{2\pi y} - \mathrm{e}^{2\pi x\mathbf{i}}}\right| = 1,$$
$$\lim_{y\to-\infty} |\cot \pi z| = \lim_{y\to-\infty} \left|\frac{\mathrm{e}^{-2\pi y} + \mathrm{e}^{-2\pi x\mathbf{i}}}{\mathrm{e}^{-2\pi y} - \mathrm{e}^{-2\pi x\mathbf{i}}}\right| = 1.$$

因此$f(z)$在$|\mathrm{Im}z| > 1$上是有界的. 而

$$g(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{1}{x + y\mathbf{i}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x + 2y\mathbf{i}}{x^2 - y^2 + n^2 + 2xy\mathbf{i}},$$

当$|y| > 1$时，我们有

$$\left|\frac{1}{x + y\mathbf{i}}\right| < 1, \quad \left|\frac{2x + 2y\mathbf{i}}{x^2 - y^2 + n^2 + 2xy\mathbf{i}}\right| < \frac{4|y|}{n^2 + \frac{3y^2}{4}}.$$

因此

$$|g(z)| < 1 + 4\int_0^{\infty} \frac{y dx}{x^2 + \frac{3y^2}{4}} = 1 + \frac{4\pi}{\sqrt{3}}.$$

因此$h(z)$在$|\mathrm{Im} z|>1$上有界.

2 若$f(z)$和$g(z)$在点z_0处解析，且$f(z_0)\neq 0$，点z_0是$g(z)$的二阶零点，证明

$$\mathrm{Res}\left[\frac{f(z)}{g(z)},z_0\right]=\frac{a_1b_2-a_0b_3}{b_2^2},$$

其中$a_k=\dfrac{1}{k!}f^{(k)}(z_0), b_k=\dfrac{1}{k!}g^{(k)}(z_0), k=0,1,2,3.$

证明：函数$\dfrac{f(z)}{g(z)}$在$z=z_0$处附近等于

$$\frac{a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots}{b_2(z-z_0)^2+b_3(z-z_0)^3+\cdots}=\frac{1}{(z-z_0^2)}\cdot\frac{a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots}{b_2+b_3(z-z_0)+\cdots}.$$

此形式可化简为

$$\frac{1}{b_2(z-z_0)^2}[a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots]\left[1-\frac{b_3}{b_2}(z-z_0)+\cdots\right],$$

进一步化简为

$$\frac{1}{b_2(z-z_0)^2}\left[a_0+\left(a_1-a_0\frac{b_3}{b_2}\right)(z-z_0)+\cdots\right].$$

因此$\mathrm{Res}\left[\dfrac{f(z)}{g(z)},z_0\right]=\dfrac{1}{b_2}\left(a_1-a_0\dfrac{b_3}{b_2}\right)=\dfrac{a_1b_2-a_0b_3}{b_2^2}.$

3 设(1)点a是函数$f(z)$的n阶零点;(2)点a是函数$f(z)$的n阶极点，求$\mathrm{Res}\left[\dfrac{f'(z)}{f(z)},a\right]$.

证明：(1)对于n阶零点a，如12题所示$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$在$z=a$处的洛朗展开是

$$\frac{na_n+(n+1)a_{n+1}(z-a)+(n+2)a_{m+2}(z-a)^2+\cdots}{a_n(z-a)+a_{n+1}(z-a)^2+a_{n+2}(z-a)^3+\cdots},$$

因此$\mathrm{Res}\left[\dfrac{f'(z)}{f(z)},a\right]=n.$

(2) 对于n阶极点a，$\mathrm{Res}\left[\dfrac{f'(z)}{f(z)},a\right]=-n.$

4 设函数$\varphi(z)$在点a处解析且$\varphi'(a)$不为零，又函数$f(\zeta)$在点$\varphi(a)$ 处是留数为A的简单极点，求$\mathrm{Res}[f(\varphi(z)),a]$.

解：函数$f(\zeta)$在$\zeta=\varphi(a)$处的洛朗展开为$\dfrac{A}{\zeta-\varphi(a)}+\theta(\zeta)$，其中$\theta(\zeta)$在$\zeta=\varphi(a)$的一个领域内解析. 因此函数$f(\varphi(z))$在$z=a$的一个领域内等于

$$\frac{A}{\varphi(z)-\varphi(a)}+\theta(\varphi(z)).$$

因此有

$$\mathrm{Res}[f(\varphi(z)),a]=\mathrm{Res}\left[\frac{A}{\varphi(z)-\varphi(a)}+\theta(\varphi(z)),a\right]=\frac{A}{\varphi'(a)}.$$

5 对于自然数$n \geqslant 2$，计算定积分$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$.

解：设D_R是半径为R，幅角在0到$\dfrac{2\pi}{n}$之间的闭扇形区域. 闭区域D_R的正向边界可分解为$C_R^{(1)}$，$C_R^{(2)}$和$C_R^{(3)}$，其中$C_R^{(1)}$是正实轴上的边界，$C_R^{(2)}$是半径为R的圆弧，$C_R^{(3)}$是幅角为$\dfrac{2\pi}{n}$直线上的边界. 当R大于1时，由留数基本定理可知

$$\int_{C_R^{(1)}} \frac{dz}{1+z^n} + \int_{C_R^{(2)}} \frac{dz}{1+z^n} + \int_{C_R^{(3)}} \frac{dz}{1+z^n} = 2\pi\mathbf{i}\mathrm{Res}\left[\frac{1}{1+z^n}, \mathrm{e}^{\frac{\pi\mathbf{i}}{n}}\right].$$

经计算有

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R^{(1)}} \frac{dz}{1+z^n} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n},$$
$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R^{(2)}} \frac{dz}{1+z^n} = 0,$$
$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R^{(3)}} \frac{dz}{1+z^n} = -\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathbf{i}}{n}} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}.$$

因此有

$$(1-\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathbf{i}}{n}}) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = -\frac{2\pi\mathbf{i}}{n}\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathbf{i}}{n}}.$$

故有

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}.$$

6 计算定积分$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$.

解：设$D_{\varepsilon R}$是以零点为中心，ε为内径，R为外径的上半圆环. 闭区域$D_{\varepsilon R}$的正向边界可分解为$C_{\varepsilon,R}^{(1)}$，$C_{\varepsilon,R}^{(2)}$，$C_{\varepsilon,R}^{(3)}$和$C_{\varepsilon,R}^{(4)}$，其中$C_{\varepsilon,R}^{(1)}$ 是负实轴上的边界，$C_{\varepsilon,R}^{(2)}$是半径为ε的圆弧，$C_{\varepsilon,R}^{(3)}$是正实轴上的边界，$C_{\varepsilon,R}^{(4)}$是半径为R 的圆弧. 由柯西积分定理可知

$$\int_{C_{\varepsilon,R}^{(1)}} \frac{e^{2\mathbf{i}z}-1}{z^2}dz + \int_{C_{\varepsilon,R}^{(2)}} \frac{e^{2\mathbf{i}z}-1}{z^2}dz + \int_{C_{\varepsilon,R}^{(3)}} \frac{e^{2\mathbf{i}z}-1}{z^2}dz + \int_{C_{\varepsilon,R}^{(4)}} \frac{e^{2\mathbf{i}z}-1}{z^2}dz = 0.$$

经计算有

$$\lim_{\varepsilon\to 0,R\to+\infty}\int_{C^{(1)}_{\epsilon,R}}\frac{e^{2\mathbf{i}z}-1}{z^2}dz=-2\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin^2 x-\sin x\cos x\mathbf{i}}{x^2}dx,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C^{(2)}_{\epsilon,R}}\frac{e^{2\mathbf{i}z}-1}{z^2}dz=-\pi\mathbf{i}\mathrm{Res}\left[\frac{e^{2\mathbf{i}z}-1}{z^2},0\right],$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0,R\to+\infty}\int_{C^{(3)}_{\epsilon,R}}\frac{e^{2\mathbf{i}z}-1}{z^2}dz=-2\int_{0}^{\infty}\frac{\sin^2 x-\sin x\cos x\mathbf{i}}{x^2}dx,$$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C^{(4)}_{\epsilon,R}}\frac{e^{2\mathbf{i}z}-1}{z^2}dz=0.$$

因此

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=-\frac{\pi\mathbf{i}}{4}\mathrm{Res}\left[\frac{e^{2\mathbf{i}z}-1}{z^2},0\right]=\frac{\pi}{2}.$$

7 计算定积分$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x\mathrm{d}x}{x^2+a^2}(a>0)$.

解：设$C^{(1)}_{\varepsilon,R}$，$C^{(2)}_{\varepsilon,R}$，$C^{(3)}_{\varepsilon,R}$和$C^{(4)}_{\varepsilon,R}$如上题. 由留数基本定理可知

$$\int_{C^{(1)}_{\varepsilon,R}}\frac{\ln zdz}{z^2+a^2}+\int_{C^{(2)}_{\varepsilon,R}}\frac{\ln zdz}{z^2+a^2}+\int_{C^{(3)}_{\varepsilon,R}}\frac{\ln zdz}{z^2+a^2}+\int_{C^{(4)}_{\varepsilon,R}}\frac{\ln zdz}{z^2+a^2}=2\pi\mathbf{i}\mathrm{Res}\left[\frac{\ln z}{z^2+a^2},a\mathbf{i}\right].$$

经计算有

$$\lim_{\varepsilon\to 0,R\to+\infty}\int_{C^{(1)}_{\varepsilon,R}}\frac{\ln zdz}{z^2+a^2}=\int_0^{+\infty}\frac{\ln xdx}{x^2+a^2}+\pi\mathbf{i}\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+a^2},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0,R\to+\infty}\int_{C^{(3)}_{\varepsilon,R}}\frac{\ln zdz}{z^2+a^2}=\int_0^{+\infty}\frac{\ln xdx}{x^2+a^2},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C^{(2)}_{\varepsilon,R}}\frac{\ln zdz}{z^2+a^2}=\lim_{R\to+\infty}\int_{C^{(4)}_{\varepsilon,R}}\frac{\ln zdz}{z^2+a^2}=0.$$

因此有

$$2\int_0^{+\infty}\frac{\ln xdx}{x^2+a^2}+\frac{\pi^2\mathbf{i}}{2a}=\frac{\pi\ln a}{a}+\frac{\pi^2\mathbf{i}}{2a}.$$

故有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln xdx}{x^2+a^2}=\frac{\pi\ln a}{2a}.$$

8 设有理函数$f(z)$所有的极点$a_1,a_2,\cdots,a_n$都不在正实轴上，也都不为零，设p 是一个非整数实数满足

$$\lim_{z\to 0}|z|^{p+1}|f(z)|=\lim_{z\to\infty}|z|^{p+1}|f(z)|=0,$$

则有

$$\int_0^{\infty}x^pf(x)dx=-\frac{\pi}{\sin\pi p}e^{-\pi p\mathbf{i}}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[z^pf(z),a_k],$$

其中
$$z^p=e^{p\mathrm{Ln}z},\quad \mathrm{Ln}z=\ln|z|+\mathbf{i}\mathrm{Arg}z,\quad 0\leqslant \mathrm{Arg}z<2\pi.$$

证明：闭区域$K_{\varepsilon R}$的正向边界可分解为$C^{(1)}_{\varepsilon,R}$，$C^{(2)}_{\varepsilon,R}$，$C^{(3)}_{\epsilon,R}$和$C^{(4)}_{\varepsilon,R}$，其中$C^{(1)}_{\varepsilon,R}$是上半平面中的平行线段，$C^{(2)}_{\varepsilon,R}$是半径为R的圆弧，$C^{(3)}_{\varepsilon,R}$是下半平面中的平行线段，$C^{(4)}_{\varepsilon,R}$是半径为ε的圆弧. 由留数基本定理可知

$$\int_{C^{(1)}_{\varepsilon,R}} z^pf(z)dz+\int_{C^{(2)}_{\varepsilon,R}} z^pf(z)dz+\int_{C^{(3)}_{\varepsilon,R}} z^pf(z)dz+\int_{C^{(4)}_{\varepsilon,R}} z^pf(z)dz=2\pi\mathbf{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[z^pf(z),a_k].$$

经计算我们有

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C^{(1)}_{\varepsilon,R}} z^pf(z)dz=\int_0^{+\infty}x^pf(x)dx,$$
$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C^{(3)}_{\varepsilon,R}} z^pf(z)dz=-\mathrm{e}^{2\pi p\mathbf{i}}\int_0^{+\infty}x^pf(x)dx,$$
$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C^{(2)}_{\varepsilon,R}} z^pf(z)dz=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{C^{(4)}_{\varepsilon,R}} z^pf(z)dz=0.$$

因此有
$$(1-\mathrm{e}^{2\pi p\mathbf{i}})\int_0^{+\infty}x^pf(x)dx=2\pi\mathbf{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[z^pf(z),a_k].$$

命题得证.

9 用上一题的方法计算下列定积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p(x+1)}(0<p<1)$.

解：直接套用上一题题结论有

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^p(x+1)}=\frac{\pi}{\sin\pi p}e^{\pi p\mathbf{i}}\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^p(z+1)},-1\right]=\frac{\pi}{\sin\pi p}.$$

10 计算定积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{\mathrm{ch}x}\mathrm{d}x(a>0)$.

解：设$C^{(1)}_R$是从$-R$到R的平行线段，$C^{(2)}_R$是从R 到$R+2\pi\mathbf{i}$的垂直线段，$C^{(3)}_R$是从$R+2\pi\mathbf{i}$到$-R+2\pi\mathbf{i}$的平行线段，$C^{(4)}_R$ 是从$-R+2\pi\mathbf{i}$到$-R$ 的垂直线段. 由留数基本定理可知

$$\int_{C^{(1)}_R}\frac{e^{\mathbf{i}az}}{\mathrm{ch}z}dz+\int_{C^{(2)}_R}\frac{e^{\mathbf{i}az}}{\mathrm{ch}z}dz+\int_{C^{(3)}_R}\frac{e^{\mathbf{i}az}}{\mathrm{ch}z}dz+\int_{C^{(4)}_R}\frac{e^{\mathbf{i}az}}{\mathrm{ch}z}dz=2\pi\mathbf{i}\mathrm{Res}\left[\frac{e^{\mathbf{i}az}}{\mathrm{ch}z},\frac{\pi\mathbf{i}}{2}\right]+2\pi\mathbf{i}\mathrm{Res}\left[\frac{e^{\mathbf{i}az}}{\mathrm{ch}z},\frac{3\pi\mathbf{i}}{2}\right].$$

经计算我们有

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R^{(1)}}\frac{e^{\mathbf{i}az}}{\mathrm{ch}z}dz=2\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{\mathrm{ch}x}dx,$$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R^{(3)}}\frac{e^{\mathbf{i}az}}{\mathrm{ch}z}dz=-2\mathrm{e}^{-2\pi a}\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{\mathrm{ch}x}dx,$$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R^{(2)}}\frac{e^{\mathbf{i}az}}{\mathrm{ch}z}dz=\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R^{(4)}}\frac{e^{\mathbf{i}az}}{\mathrm{ch}z}dz=0.$$

因此有

$$2(1-\mathrm{e}^{-2\pi a})\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{\mathrm{ch}x}dx=2\pi(\mathrm{e}^{-\frac{\pi a}{2}}-\mathrm{e}^{-\frac{3\pi a}{2}}).$$

于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{\mathrm{ch}x}dx=\frac{\pi}{2\mathrm{ch}\frac{\pi a}{2}}.$$