作业三解答

1 求下列函数的傅里叶积分公式：

(1) $f(t)=\begin{cases} 1-t^2, & |t|<1, \\ 0, & |t|>1; \end{cases}$

(2) $f(t)=\begin{cases} e^{-t}\sin 2t, & t\geqslant 0, \\ 0, & t<0; \end{cases}$

(3) $f(t)=\begin{cases} -1, & -1<t<0, \\ 1, & 0<t<1, \\ 0, & 其他. \end{cases}$

解：(1) 我们有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\mathbf{i}\omega t}\mathrm{d}t &= \int_{-1}^{1}(1-t^2)\cos\omega t\mathrm{d}t \\ &= \frac{2\sin\omega}{\omega} - \int_{-1}^{1} t^2\cos\omega t\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\omega}\int_{-1}^{1} t\sin\omega t\mathrm{d}t \\ &= -\frac{4\cos\omega}{\omega^2} + \frac{2}{\omega^2}\int_{-1}^{1}\cos\omega t\mathrm{d}t \\ &= \frac{4\sin\omega - 4\omega\cos\omega}{\omega^3}.\end{aligned}$$

(2) 我们有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\mathbf{i}\omega t}\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\mathbf{i}}\int_{0}^{+\infty}[e^{-t}e^{(2-\omega)\mathbf{i}t} - e^{-t}e^{-(2+\omega)\mathbf{i}t}]\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\mathbf{i}}\left(\frac{1}{1+(\omega-2)\mathbf{i}} - \frac{1}{1+(\omega+2)i}\right) \\ &= \frac{2}{(5-\omega^2)+2\omega\mathbf{i}} = \frac{(10-2\omega^2)-4\omega\mathbf{i}}{\omega^4-6\omega^2+25}.\end{aligned}$$

(3) 我们有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\mathbf{i}\omega t}\mathrm{d}t &= \int_{0}^{1} e^{-\mathbf{i}\omega t}\mathrm{d}t - \int_{-1}^{0} e^{-\mathbf{i}\omega t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{2-2\cos\omega}{\mathbf{i}\omega}.\end{aligned}$$

2 求下列函数的傅里叶变换：

(1) $f(t)=\begin{cases} 1-|t|, & |t|\leqslant 1, \\ 0, & |t|>1; \end{cases}$

(2) $f(t)=\begin{cases} E, & 0\leqslant t\leqslant \tau, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}\quad (E,\tau>0);$

(3) $f(t)=\begin{cases} e^{-t}, & |t|<\dfrac{1}{2}, \\ \\ 0, & |t|>\dfrac{1}{2}; \end{cases}$

(4) $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}};$

(5) $f(t)=\begin{cases} e^{-t}\sin t, & t>0, \\ 0, & t\leqslant 0; \end{cases}$

(6) $f(t)=\begin{cases} 0, & t<-1, \\ -1, & -1\leqslant t<0, \\ 1, & 0\leqslant t<1, \\ 0, & t\geqslant 1. \end{cases}$

解：(1) 我们有

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-1}^{1} e^{-\mathbf{i}\omega t}\mathrm{d}t - 2\int_0^1 t\cos\omega t\mathrm{d}t \\ &= \frac{2\sin\omega}{\omega} - \frac{2\sin\omega}{\omega} + \frac{2}{\omega}\int_0^1 \sin\omega t\mathrm{d}t \\ &= \frac{2(1-\cos\omega)}{\omega^2}. \end{aligned}$$

(2) 我们有

$$\begin{aligned} F(\omega) &= E\int_0^{\tau} e^{-\mathbf{i}\omega t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{E}{\mathbf{i}\omega}(1-e^{-\mathbf{i}\omega\tau}) \\ &= \frac{E}{\omega}[\sin\omega\tau + (\cos\omega\tau - 1)\mathbf{i}]. \end{aligned}$$

(3) 我们有

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\mathbf{i}\omega t}\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-t}\cos\omega t\mathrm{d}t - \mathbf{i}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-t}\sin\omega t\mathrm{d}t \\ &= \left.\frac{e^{-t}}{\omega^2+1}(\omega\sin\omega t - \cos\omega t)\right|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \mathbf{i}\left.\frac{e^{-t}}{\omega^2+1}(\sin\omega t + \omega\cos\omega t)\right|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{\omega^2+1}\left[\left(\omega\sin\frac{\omega}{2}\mathrm{ch}\frac{1}{2} + \cos\frac{\omega}{2}\mathrm{sh}\frac{1}{2}\right) + \left(\sin\frac{\omega}{2}\mathrm{ch}\frac{1}{2} - \omega\cos\frac{\omega}{2}\mathrm{sh}\frac{1}{2}\right)\mathbf{i}\right]. \end{aligned}$$

(4) 我们有

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-\mathbf{i}\omega t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t+\mathbf{i}\omega\sigma^2)^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}}\mathrm{d}t \\
&= e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}}.
\end{aligned}
$$

(5) 我们有

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{0}^{+\infty} \sin t e^{-(1+\mathbf{i}\omega)t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\mathbf{i}}\left(\frac{1}{1+(\omega-1)\mathbf{i}} - \frac{1}{1+(\omega+1)\mathbf{i}}\right) \\
&= \frac{1}{2-\omega^2+2\omega\mathbf{i}}.
\end{aligned}
$$

(6) 我们有

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{0}^{1} e^{-\mathbf{i}\omega t}\mathrm{d}t - \int_{-1}^{0} e^{-\mathbf{i}\omega t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{2-e^{-\mathbf{i}\omega}-e^{\mathbf{i}\omega}}{\mathbf{i}\omega} = \frac{2-2\cos\omega}{\mathbf{i}\omega}.
\end{aligned}
$$

3 求下列函数的傅里叶变换：

(1) $\dfrac{1}{1+t^2}$;

(2) $te^{-a|t|}(a>0)$.

解：(1) 由留数在实积分中的应用我们有

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= F(-|\omega|) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\mathbf{i}|\omega|t}}{1+t^2}\mathrm{d}t \\
&= 2\pi\mathbf{i}\mathrm{Res}\left[\frac{e^{\mathbf{i}|\omega|t}}{1+t^2}, \mathbf{i}\right] \\
&= \pi e^{-|\omega|}.
\end{aligned}
$$

(2) 我们有

$$
F(\omega) = -2\mathbf{i}\int_{0}^{+\infty} te^{-at}\sin\omega t\mathrm{d}t.
$$

计算不定积分有

$$\begin{aligned}\int te^{-at}\sin\omega t\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\mathbf{i}}\int te^{(-a+i\omega)t}\mathrm{d}t - \frac{1}{2\mathbf{i}}\int te^{(-a-i\omega)t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\mathbf{i}}\left[\frac{te^{(-a+i\omega)t}}{(-a+i\omega)} + \frac{te^{-(a+i\omega)t}}{(a+i\omega)} - \frac{e^{(-a+i\omega)t}}{(-a+i\omega)^2} + \frac{e^{-(a+i\omega)t}}{(a+i\omega)^2}\right] \\ &= -\frac{te^{-at}(\omega\cos\omega t + a\sin\omega t)}{\omega^2+a^2} - \frac{e^{-at}(2a\omega\cos\omega t + a^2\sin\omega t - \omega^2\sin\omega t)}{(\omega^2+a^2)^2}.\end{aligned}$$

故有

$$F(\omega) = -\frac{4a\omega\mathbf{i}}{(\omega^2+a^2)^2}.$$

4 求下列函数的傅里叶变换：

(1) $f(t) = e^{-\alpha t}u(t)\cdot\sin\omega_0 t\ (\alpha > 0)$;

(2) $f(t) = e^{-\alpha t}u(t)\cdot\cos\omega_0 t\ (\alpha > 0)$;

(3) $f(t) = e^{\mathbf{i}\omega_0 t}u(t-t_0)$.

解：(1) 我们有

$$\begin{aligned}F(\omega) &= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}e^{-\mathbf{i}\omega t}\sin\omega_0 t\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\mathbf{i}}\left[\frac{1}{\alpha+(\omega-\omega_0)\mathbf{i}} - \frac{1}{\alpha+(\omega+\omega_0)\mathbf{i}}\right] \\ &= \frac{\omega_0}{\alpha^2+\omega_0^2-\omega^2+2\alpha\omega\mathbf{i}}.\end{aligned}$$

(2) 我们有

$$\begin{aligned}F(\omega) &= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}e^{-\mathbf{i}\omega t}\cos\omega_0 t\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha+(\omega-\omega_0)\mathbf{i}} + \frac{1}{\alpha+(\omega+\omega_0)\mathbf{i}}\right] \\ &= \frac{\alpha+\omega\mathbf{i}}{\alpha^2+\omega_0^2-\omega^2+2\alpha\omega\mathbf{i}}.\end{aligned}$$

(3) 我们有

$$\begin{aligned}F(\omega) &= \int_{t_0}^{+\infty} e^{-\mathbf{i}(\omega-\omega_0)t}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\mathbf{i}(\omega-\omega_0)(u+t_0)}\mathrm{d}u \\ &= e^{-\mathbf{i}(\omega-\omega_0)t_0}\int_0^{+\infty} e^{-\mathbf{i}(\omega-\omega_0)u}\mathrm{d}u \\ &= e^{-\mathbf{i}(\omega-\omega_0)t_0}\left[\frac{1}{\mathbf{i}(\omega-\omega_0)} + \pi\delta(\omega-\omega_0)\right].\end{aligned}$$

5 求下列函数的卷积：

(1) $f_1(t)=u(t)$, $f_2(t)=e^{-\alpha t}u(t)$;

(2) $f_1(t)=e^{-\alpha t}u(t)$, $f_2(t)=\sin t\cdot u(t)$;

(3) $f_1(t)=e^{-t}u(t)$, $f_2(t)=\begin{cases}\sin t, & 0<t<\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

解：(1) 当$t\leqslant 0$时，显然有$(f_1*f_2)(t)=0$. 当$t>0$时，

$$(f_1*f_2)(t)=\int_0^t e^{-\alpha\tau}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t}).$$

因此$(f_1*f_2)(t)=\dfrac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})u(t)$.

(2) 当$t\leqslant 0$时，显然有$(f_1*f_2)(t)=0$. 当$t>0$时，则有

$$(f_1*f_2)(t)=\int_0^t \sin\tau e^{-\alpha(t-\tau)}\mathrm{d}\tau=e^{-\alpha t}\int_0^t \sin\tau e^{\alpha\tau}\mathrm{d}\tau.$$

计算不定积分我们有

$$\begin{aligned}\int\sin\tau e^{\alpha\tau}\mathrm{d}\tau&=\frac{\sin\tau e^{\alpha\tau}}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}\int\cos\tau e^{\alpha\tau}\mathrm{d}\tau\\&=\frac{\sin\tau e^{\alpha\tau}}{\alpha}-\frac{\cos\tau e^{\alpha\tau}}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha^2}\int\sin\tau e^{\alpha\tau}\mathrm{d}\tau,\\ \int\sin\tau e^{\alpha\tau}\mathrm{d}\tau&=\frac{\alpha\sin\tau e^{\alpha\tau}-\cos\tau e^{\alpha\tau}}{\alpha^2+1}+C,\end{aligned}$$

故有

$$e^{-\alpha t}\int_0^t\sin\tau e^{\alpha\tau}\mathrm{d}\tau=\frac{\alpha\sin t-\cos t+e^{-\alpha t}}{\alpha^2+1}.$$

因此$(f_1*f_2)(t)=\dfrac{\alpha\sin t-\cos t+e^{-\alpha t}}{\alpha^2+1}\cdot u(t)$.

(3) 当$t\leqslant 0$时，显然有$(f_1*f_2)(t)=0$. 当$0<t\leqslant\dfrac{\pi}{2}$时，则

$$(f_1*f_2)(t)=\int_0^t\sin\tau e^{-(t-\tau)}\mathrm{d}\tau=\frac{\sin t-\cos t+e^{-t}}{2}.$$

当$t>\dfrac{\pi}{2}$时，

$$(f_1*f_2)(t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\tau e^{-(t-\tau)}\mathrm{d}\tau=e^{-t}\cdot\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}.$$

6 求下列函数的拉普拉斯变换：

(1) $f(t)=\begin{cases}3, & 0\leqslant t<2,\\ -1, & 2\leqslant t<4,\\ 0, & t\geqslant 4;\end{cases}$

(2) $f(t)=\begin{cases}t+1, & 0<t<3,\\ 0, & t\geqslant 3;\end{cases}$

(3) $f(t)=\begin{cases}3, & t<\dfrac{\pi}{2},\\ \cos t, & t>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

解：(1) 我们有

$$\begin{aligned}F(s)&=\int_0^2 3e^{-st}\mathrm{d}t-\int_2^4 e^{-st}\mathrm{d}t\\&=\frac{3-3e^{-2s}}{s}-\frac{e^{-2s}-e^{-4s}}{s}\\&=\frac{3-4e^{-2s}+e^{-4s}}{s}.\end{aligned}$$

(2) 我们有

$$\begin{aligned}F(s)&=\int_0^3(t+1)e^{-st}\mathrm{d}t\\&=-\left.\frac{(t+1)e^{-st}}{s}\right|_0^3+\frac{1}{s}\int_0^3 e^{-st}\mathrm{d}t\\&=\frac{1-4e^{-3s}}{s}+\frac{1-e^{-3s}}{s^2}\\&=\frac{(s+1)-(4s+1)e^{-3s}}{s^2}.\end{aligned}$$

(3) 我们有

$$\begin{aligned}F(s)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3e^{-st}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}[e^{-(s-\mathbf{i})t}+e^{-(s+\mathbf{i})t}]\mathrm{d}t\\&=\frac{3-3e^{-\frac{\pi s}{2}}}{s}+\frac{1}{2}\left(\frac{e^{-\frac{\pi s}{2}}\mathbf{i}}{s-\mathbf{i}}-\frac{e^{-\frac{\pi s}{2}}\mathbf{i}}{s+\mathbf{i}}\right)\\&=\frac{3-3e^{-\frac{\pi s}{2}}}{s}-\frac{e^{-\frac{\pi s}{2}}}{s^2+1}.\end{aligned}$$

7 求下列函数的拉普拉斯变换：

(1) $f(t)=1-te^t$;

(2) $f(t)=\dfrac{t}{2a}\sin at$;

(3) $f(t)=\dfrac{\sin at}{t}$;

(4) $f(t)=5\sin 2t-3\cos 2t$;

(5) $f(t)=e^{-2t}\sin 6t$;

(6) $f(t)=u(3t-5)$;

(7) $f(t)=\dfrac{e^{3t}}{\sqrt{t}}$;

(8) $f(t)=u(1-e^{-t})$;

(9) $f(t)=e^{-5t}\displaystyle\int_0^t \frac{\sin 2\tau}{\tau}\mathrm{d}\tau$;

(10) $f(t)=t\displaystyle\int_0^t e^{-4\tau}\sin 2\tau\mathrm{d}\tau$.

解：(1) 我们有

$$\begin{aligned}F(s)&=\int_0^{+\infty}e^{-st}\mathrm{d}t-\int_0^{+\infty}te^{-(s-1)t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{s}-\frac{1}{(s-1)^2}\\&=\frac{s^2-3s+1}{s(s-1)^2}.\end{aligned}$$

(2) 我们有

$$\begin{aligned}F(s)&=\frac{1}{4a\mathbf{i}}(\mathscr{L}[te^{\mathbf{i}at}]-\mathscr{L}[te^{-\mathbf{i}at}])\\&=\frac{1}{4a\mathbf{i}}\left[\frac{1}{(s-a\mathbf{i})^2}-\frac{1}{(s+a\mathbf{i})^2}\right]\\&=\frac{s}{(s^2+a^2)^2}.\end{aligned}$$

(3) 不妨设$a>0$，则

$$F(s)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin at}{t}e^{-st}\mathrm{d}t$$

且$F(0)=\dfrac{\pi}{2}$. 由拉氏变换性质我们有

$$\begin{aligned}F'(s)&=-\int_0^{+\infty}\sin ate^{-st}\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{2\mathbf{i}}\left(\frac{1}{s-a\mathbf{i}}-\frac{1}{s+a\mathbf{i}}\right)\\&=-\frac{a}{s^2+a^2}.\end{aligned}$$

故有

$$F(s)=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{s}{a}=\arctan\frac{a}{s}.$$

(4) 我们有

$$\begin{aligned}F(s)&=\frac{5}{2\mathbf{i}}\left(\frac{1}{s-2\mathbf{i}}-\frac{1}{s+2\mathbf{i}}\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{s-2\mathbf{i}}+\frac{1}{s+2\mathbf{i}}\right)\\&=\frac{10}{s^2+4}-\frac{3s}{s^2+4}\\&=\frac{10-3s}{s^2+4}.\end{aligned}$$

(5) 我们有

$$F(s)=\frac{1}{2\mathbf{i}}\left(\frac{1}{s+2-6\mathbf{i}}-\frac{1}{s+2+6\mathbf{i}}\right)=\frac{6}{s^2+4s+40}.$$

(6) 我们有

$$F(s)=\int_{\frac{5}{3}}^{+\infty}e^{-st}\mathrm{d}t=\frac{e^{-\frac{5s}{3}}}{s}.$$

(7) 我们有

$$F(s)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-(s-3)t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(s-3)x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{s-3}}.$$

(8) 我们有

$$F(s)=\int_0^{+\infty}u(1-e^{-t})e^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}e^{-st}\mathrm{d}t=\frac{1}{s}.$$

(9) 由拉氏变换的位移性质，我们有

$$F(s)=\mathscr{L}\left[\int_0^t\frac{\sin 2\tau}{\tau}\mathrm{d}\tau\right](s+5)$$

由拉式变换的积分性质，我们有

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t\frac{\sin 2\tau}{\tau}\mathrm{d}\tau\right](s)=\frac{\mathscr{L}\left[\frac{\sin 2t}{t}\right](s)}{s}.$$

由拉式变换的微分性质，我们有

$$\mathscr{L}\left[\frac{\sin 2t}{t}\right]'(s)=-\mathscr{L}[\sin 2t](s)=-\frac{2}{s^2+4}.$$

由Dirichlet积分可知$\mathscr{L}\left[\frac{\sin 2t}{t}\right](0)=\frac{\pi}{2}$，故有

$$\mathscr{L}\left[\frac{\sin 2t}{t}\right](s)=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{s}{2}.$$

故有

$$F(s)=\frac{\pi}{2(s+5)}-\frac{\arctan\frac{s+5}{2}}{s+5}.$$

(10) 由拉氏变换微分性质，我们有

$$F(s)=-\mathscr{L}\left[\int_0^t e^{-4\tau}\sin 2\tau\mathrm{d}\tau\right]'(s).$$

由拉氏变换的积分性质和位移性质，我们有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[\int_0^t e^{-4\tau}\sin 2\tau\mathrm{d}\tau\right](s)&=\frac{\mathscr{L}[e^{-4t}\sin 2t](s)}{s}\\&=\frac{\mathscr{L}[\sin 2t](s+4)}{s}\\&=\frac{2}{s(s+4)^2+4s}\\&=\frac{2}{s(s^2+8s+20)}.\end{aligned}$$

故有

$$F(s)=-\left(\frac{2}{s(s^2+8s+20)}\right)'=\frac{2(3s^2+16s+20)}{s^2(s^2+8s+20)^2}.$$

8 求下列函数的拉普拉斯逆变换：

(1) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+4}$;

(2) $F(s)=\dfrac{1}{s^4}$;

(3) $F(s)=\dfrac{1}{(s+1)^4}$;

(4) $F(s)=\dfrac{1}{s+3}$;

(5) $F(s)=\dfrac{2s+3}{s^2+9}$;

(6) $F(s)=\dfrac{s+3}{(s+1)(s-3)}$;

(7) $F(s)=\dfrac{s+1}{s^2+s-6}$;

(8) $F(s)=\dfrac{2s+5}{s^2+4s+13}$.

解：(1) 我们有

$$\begin{aligned}L^{-1}[F](t)&=\operatorname{Res}\left[\frac{e^{st}}{s^2+4},2\mathbf{i}\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{e^{st}}{s^2+4},-2\mathbf{i}\right]\\&=\frac{e^{2t\mathbf{i}}}{4\mathbf{i}}-\frac{e^{-2t\mathbf{i}}}{4\mathbf{i}}\\&=\frac{\sin 2t}{2}.\end{aligned}$$

(2) 我们有

$$\mathscr{L}^{-1}[F](t) = \mathrm{Res}\left[\frac{e^{st}}{s^4}, 0\right] = \frac{t^3}{6}.$$

(3) 我们有

$$\mathscr{L}^{-1}[F](t) = \frac{t^3 e^{-t}}{6}$$

(4) 我们有

$$\mathscr{L}^{-1}[F](t) = e^{-3t}.$$

(5) 我们有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}[F](t) &= \mathrm{Res}\left[\frac{(2s+3)e^{st}}{s^2+9}, 3\mathbf{i}\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{(2s+3)e^{st}}{s^2+9}, -3\mathbf{i}\right] \\ &= \frac{(3+6\mathbf{i})e^{3t\mathbf{i}}}{6\mathbf{i}} - \frac{(3-6\mathbf{i})e^{-3t\mathbf{i}}}{6\mathbf{i}} \\ &= 2\cos 3t + \sin 3t.\end{aligned}$$

(6) 我们有

$$\mathscr{L}^{-1}[F](t) = \frac{s+3}{s-1}e^{st}(3) + \frac{s+3}{s-3}e^{st}(-1) = 3e^{3t} - \frac{e^{-t}}{2}.$$

(7) 我们有

$$\mathscr{L}^{-1}[F](t) = \frac{s+1}{s+3}e^{st}(2) + \frac{s+1}{s-2}e^{st}(-3) = \frac{3e^{2t}}{5} + \frac{2e^{-3t}}{5}.$$

(8) 我们有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}[F](t) &= \frac{2s+5}{2s+4}e^{st}(-2+3\mathbf{i}) + \frac{2s+5}{2s+4}e^{st}(-2-3\mathbf{i}) \\ &= \frac{1+6\mathbf{i}}{6\mathbf{i}}e^{-2t+3t\mathbf{i}} - \frac{1-6\mathbf{i}}{6\mathbf{i}}e^{-2t-3t\mathbf{i}} \\ &= 2e^{-2t}\cos 3t + \frac{1}{3}e^{-2t}\sin 3t.\end{aligned}$$

9 求下列函数的拉普拉斯逆变换：

(1) $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+4)^2}$;

(2) $F(s) = \dfrac{2s+1}{s(s+1)(s+2)}$;

(3) $F(s) = \dfrac{1}{s^4+5s^2+4}$;

(4) $F(s)=\ln\dfrac{s^2-1}{s^2}$;

(5) $F(s)=\dfrac{1+e^{-2s}}{s^2}$;

(6) $F(s)=\dfrac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2(s^2+9)}$;

(7) $F(s)=\dfrac{s^2-3}{(s+2)(s-3)(s^2+2s+5)}$.

解：(1) 我们有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}[F](t)&=\operatorname{Res}\left[\frac{e^{ts}}{(s^2+4)^2},2\mathbf{i}\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{e^{ts}}{(s^2+4)^2},-2\mathbf{i}\right]\\&=\frac{te^{2t\mathbf{i}}-te^{-2t\mathbf{i}}}{4\mathbf{i}}+\frac{e^{2t\mathbf{i}}+e^{-2t\mathbf{i}}}{16}\\&=\frac{t\sin 2t}{2}+\frac{\cos 2t}{8}.\end{aligned}$$

(2) 我们有

$$\mathscr{L}^{-1}[F](t)=\frac{1}{2}+e^{-t}-\frac{3}{2}e^{-2t}.$$

(3) 我们有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}[F](t)&=\frac{e^{ts}}{4s^3+10s}(\mathbf{i})+\frac{e^{ts}}{4s^3+10s}(-\mathbf{i})+\frac{e^{ts}}{4s^3+10s}(2\mathbf{i})+\frac{e^{ts}}{4s^3+10s}(-2\mathbf{i})\\&=\frac{e^{t\mathbf{i}}-e^{-t\mathbf{i}}}{6\mathbf{i}}-\frac{e^{2t\mathbf{i}}-e^{-2t\mathbf{i}}}{6\mathbf{i}}\\&=\frac{\sin t-\sin 2t}{3}.\end{aligned}$$

(4) 我们有

$$\mathscr{L}^{-1}[F](t)=-\frac{2}{t}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2-1)}\right]=\frac{2-e^t-e^{-t}}{t}.$$

(5) 我们有

$$\mathscr{L}^{-1}[F](t)=tu(t)+(t-2)u(t-2).$$

(6) 我们有

$$\mathscr{L}^{-1}[F](t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s+10}{s^2+9}\right]+\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{8}{s(s^2+9)}\right]+\frac{40}{9}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]-\frac{40}{9}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+9}\right].$$

分项计算有

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s+10}{s^2+9}\right]=\frac{10+6\mathbf{i}}{6\mathbf{i}}e^{3t\mathbf{i}}-\frac{10-6\mathbf{i}}{6\mathbf{i}}e^{-3t\mathbf{i}},$$
$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{8}{s(s^2+9)}\right]=\frac{8}{9}-\frac{4}{9}e^{3t\mathbf{i}}-\frac{4}{9}e^{-3t\mathbf{i}},$$
$$\frac{40}{9}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]=\frac{40t}{9},$$
$$\frac{40}{9}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+9}\right]=\frac{40}{9}\frac{e^{3t\mathbf{i}}}{6\mathbf{i}}-\frac{40}{9}\frac{e^{-3t\mathbf{i}}}{6\mathbf{i}}.$$

故有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}[F](t)&=2\cos 3t+\frac{10\sin 3t}{3}+\frac{8}{9}-\frac{8\cos 3t}{9}+\frac{40t}{9}-\frac{40}{27}\sin 3t\\&=\frac{8}{9}+\frac{40t}{9}+\frac{10\cos 3t}{9}+\frac{50\sin 3t}{27}.\end{aligned}$$

(7) 我们有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}[F](t)&=-\frac{e^{-2t}}{25}+\frac{3e^{3t}}{50}+2\mathrm{Re}\left[\frac{-6-4\mathbf{i}}{(1+2\mathbf{i})(-4+2\mathbf{i})4\mathbf{i}}e^{-t+2t\mathbf{i}}\right]\\&=-\frac{e^{-2t}}{25}+\frac{3e^{3t}}{50}+\frac{18e^{-t}\sin 2t}{50}-\frac{e^{-t}\cos 2t}{50}.\end{aligned}$$

10 求下列微分方程(组)初值问题的解：

(1) $x''+k^2x=0, x(0)=A, x'(0)=B$;

(2) $x''+4x'+3x=e^{-t}, x(0)=x'(0)=1$;

(3) $x^{(4)}+2x'''-2x'-x=\delta(t), x(0)=x'(0)=x''(0)=x'''(0)=0$;

(4) $\left\{\begin{array}{l}x'+x-y=e^t,\\3x+y'-2y=2e^t,\end{array}\right.\qquad x(0)=y(0)=1.$

解：(1) 当$k\neq 0$时，由拉氏变化可知

$$s^2X(s)-As-B+k^2X(s)=0,\quad X(s)=\frac{As+B}{s^2+k^2}.$$

由拉氏逆变换可知

$$\begin{aligned}x(t)&=\frac{B+Ak\mathbf{i}}{2k\mathbf{i}}e^{kt\mathbf{i}}-\frac{B-Ak\mathbf{i}}{2k\mathbf{i}}e^{-kt\mathbf{i}}\\&=A\cos kt+\frac{B}{k}\sin kt.\end{aligned}$$

当$k=0$时，$X(s)=\dfrac{As+B}{s^2}$，则$x(t)=A+Bt$.

(2) 由拉氏变换可知

$$s^2X(s)-s-1+4sX(s)-4+3X(s)=\frac{1}{s+1},$$

即

$$X(s) = \frac{s+5}{s^2+4s+3} + \frac{1}{(s+1)^2(s+3)}.$$

由拉氏逆变换可知

$$\begin{aligned} x(t) &= 2e^{-t} - e^{-3t} + \frac{e^{-3t}}{4} + \frac{te^{-t}}{2} - \frac{e^{-t}}{4} \\ &= \frac{te^{-t}}{2} + \frac{7e^{-t}}{4} - \frac{3e^{-3t}}{4}. \end{aligned}$$

(3) 由拉氏变换可知$X(s) = \dfrac{1}{s^4+2s^3-2s-1} = \dfrac{1}{(s-1)(s+1)^3}$，由拉氏逆变换可知

$$x(t) = \frac{e^t}{8} + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{ts}}{s-1}\right)_{ss}(-1) = \frac{1}{8}e^t - \left(\frac{t^2}{4} + \frac{t}{4} + \frac{1}{8}\right)e^{-t}.$$

(4) 由拉氏变换可知

$$sX(s) - 1 + X(s) - Y(s) = \frac{1}{s-1}, \quad 3X(s) + sY(s) - 1 - 2Y(s) = \frac{2}{s-1}.$$

因此$X(s) = Y(s) = \dfrac{1}{s-1}$，故$x(t) = y(t) = e^t$.