高等学校教材配套教辅 5

复变函数与积分变换综合训练

FUNCTIONS OF COMPLEX VARIABLE AND INTEGRAL TRANSFORM COMPREHENSIVE TRAINING

包革军　邢宇明　主编

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等学校教材配套教辅 5

复变函数与积分变换综合训练

FUNCTIONS OF COMPLEX VARIABLE AND INTEGRAL TRANSFORM COMPREHENSIVE TRAINING

包革军　邢宇明　主编

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

目录

心得 体会 拓广 疑问

复变函数与积分变换试题(一)

一、填空题

1. 设 $z=\dfrac{(1-i)^5-1}{(1+i)^3+1}$,则其实部为________,虚部为________.

2. 一复数对应的向量按逆时针方向旋转 $\dfrac{\pi}{3}$ 时对应的复数是 $1+i$,则原复数是________.

3. 已知复数 $z=\dfrac{-2}{1+\sqrt{3}i}$,则 z 的辐角主值是________.

4. $\sin\dfrac{\pi}{3}-i\cos\dfrac{\pi}{3}$ 的三角形式为________.

5. 满足 $0<\arg\dfrac{z-1}{z+1}<\dfrac{\pi}{6}$ 的 z 所构成的点集是________.

二、单项选择题

1. 已知 $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$,则 $z^{100}+z^{50}+1$ 的值为(　　).

A. $-i$　　B. i　　C. 1　　D. -1

2. 集合 $D=\{z:2<|z-i|<10^5\}$,则 D 是(　　).

A. 单连通区域　B. 多连通区域　C. 无界区域　D. 闭区域

3. 下列方程所表示的曲线中,(　　)是椭圆.

A. $|z+i|+|z-i|=3$　　B. $\left|\dfrac{z-2}{z-1}\right|=8$

C. $\operatorname{Im} z=|z|+1$　　D. $\operatorname{Re}(z^2)=3$

4. 函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$,$z_0=x_0+iy_0$ 则 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ 存在的充分必要条件是(　　).

A. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}u(x,y)$ 存在　　B. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}v(x,y)$ 存在

C. A 与 B 同时成立　　D. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}[u(x,y)+v(x,y)]$ 存在

5. 下列函数中,都有 $f(0)=0$,则(　　)在原点不连续.

A. $f(z)=\dfrac{\operatorname{Re} z}{1+|z|}$　　B. $f(z)=\dfrac{(\operatorname{Re} z)^2}{|z|}$

C. $f(z)=\dfrac{[\operatorname{Re}(z^2)]^2}{|z|^2}$　　D. $f(z)=\dfrac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z|^2}$

年　月　日

三、试确定等式$(3+6\mathrm{i})x+(5-9\mathrm{i})y=6-7\mathrm{i}$中的实数$x,y$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

四、试证 $|1-\bar{z}_1 z_2|^2-|z_1-z_2|^2=(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

五、证明$\frac{z_1}{z_2} \geqslant 0, z_2 \neq 0 \Leftrightarrow |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

六、将复数 $z=1+\sin 1+i\cos 1$ 化为三角形式和指数形式.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

七、设$(1+\mathrm{i})^n=(1-\mathrm{i})^n$，求整数 n.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

八、解方程 $z^2 - 4iz - 4 + 9i = 0$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

九、若 $|z_1|=\lambda|z_2|$，$\lambda>0$，则 $|z_1-\lambda^2 z_2|=\lambda|z_1-z_2|$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

十、证明方程$\left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right|=k, k>0, k\neq 1, z_1\neq z_2$表示$z$-平面上的一个圆周，其圆心为$z_0$，半径为$\rho$，且$z_0=\dfrac{z_1-k^2 z_2}{1-k^2}$，$\rho=\dfrac{k\,|z_1-z_2|}{|1-k^2|}$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

十一、证明$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z}{|z|}$不存在.

十二、对于复数序列$\{a_n\}$,若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,求证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

复变函数与积分变换试题(二)

一、填空题

1. 函数 $f(z)=(e^x\cos y-x)+i(e^x\sin y-y^2)$ 在________可导，在________处解析.

2. 函数 $f(z)=u+iv$ 是解析函数，则 $e^u\cos v$ 的共轭调和函数是________.

3. 设函数 $f(z)=my^3+nx^2y+i(x^3+lxy^2)$ 为解析函数，则 $m=$________，$n=$________，$l=$________.

4. $1^{\sqrt{3}+i}=$__________.

5. 设 $f(z)+u+iv$ 解析，则 $f'(z)=$__________.

二、单项选择题

1. 函数 $f(z)=u+iv$ 在点 $z_0=x_0+iy_0$ 处可导的充要条件是(　　).
   A. u,v 在点 (x_0,y_0) 处偏导数存在
   B. u,v 在点 (x_0,y_0) 处可微
   C. u,v 在点 (x_0,y_0) 处满足 C-R 条件
   D. u,v 同时满足 B 和 C

2. 函数 $f(z)=|z|^2$ 在点 $z=0$ 处使(　　)不成立.
   A. 连续　B. 可导　C. 解析　D. C-R 条件

3. 函数 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内可导的充要条件是(　　).
   A. u,v 在 D 内可微
   B. u,v 在 D 内有一阶连续的偏导数
   C. u,v 在 D 内满足 C-R 条件
   D. $f(z)$ 在 D 内解析

4. 函数 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，下列等式中正确的是(　　).
   A. $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial y}+i\dfrac{\partial v}{\partial y}$　B. $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial u}{\partial x}$
   C. $f'(z)=\dfrac{\partial v}{\partial y}+i\dfrac{\partial u}{\partial x}$　D. $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}$

5. 函数 $f(z)=u+iv$ 解析，则下列命题中错误的是(　　).
   A. u,v 均为调和函数　B. u 是 v 的共轭调和函数
   C. v 是 u 的共轭调和函数　D. $-u$ 是 v 的共轭调和函数

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

三、设

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{x(x^2+y^2)(y-\mathrm{i}x)}{x^2+y^4}, & z=x+\mathrm{i}y\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$$

证明：当 z 沿任何直线趋向于 0 时，$\dfrac{f(z)-f(0)}{z}\to 0$，但 $f'(0)$ 不存在.

年 月 日

四、讨论函数 $f(z)=z\mathrm{Re}\,z$ 在 z 平面上的可导性和解析性.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

五、求函数 $f(z)=\dfrac{1+z}{1-z}$ 的实、虚部，证明它们满足 C-R 条件.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

六、设 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 的 $z=x+\mathrm{i}y$ 的解析函数，且

$$2xyu+(x^2-y^2)v+2xy(x^2-y^2)=0$$

求 $f(z)$ 的表达式.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

七、设 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在区域 D 内解析. 证明：$u\cdot v$ 是 D 内的调和函数.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

八、设 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是一个解析函数，且 $u+v=x^3-y^3+3x^2y-3xy^2-2x-2y$，求 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 的表达式.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

九、求具有如下形式的所有调和函数 u，其中 f 具有二阶连续导数.

1. $u=f(ax+by)$，a 和 b 不全为零.

2. $u=f(\frac{y}{x})$.

年 月 日

十、将如下函数值写成 $x+\mathrm{i}y$ 的形式.

1. $\exp(2-\mathrm{i})$.　　2. $\ln(3-\sqrt{3}\mathrm{i})$.　　3. $\mathrm{Arctan}(2+3\mathrm{i})$.

4. $\sec(1+\mathrm{i})$.　　5. $(1+\mathrm{i})^{1-\mathrm{i}}$.

心得 体会 拓广 疑问

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

复变函数与积分变换试题(三)

一、填空题

1. 沿 $y=x$ 的积分 $\int_0^{1+i}(8z^2+3\bar{z}+1)\mathrm{d}z=$ ________；沿 $y=x^2$ 的积分 $\int_0^{1+i}(8z^2+3\bar{z}+1)\mathrm{d}z=$ ________.

2. $\oint\limits_{|z|=2}\frac{|z|^2}{z-1}\mathrm{d}z=$ ________；$\oint\limits_{|z|=2}\frac{|z|^2}{z-3}\mathrm{d}z=$ ________.

3. 设 $f(z)=\oint\limits_{|\xi|=2}\frac{\xi(e^{\xi}+\sin\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi$，求 $f(0)=$ ________；$f'(0)=$ ________；$f'(3)=$ ________.

4. 设 $f(z)$ 在单连域 D 内解析且处处不为零，Γ 为 D 内任一闭曲线，则积分 $\oint\limits_{\Gamma}\frac{f'(z)+2f(z)+3z}{f^2(z)}\mathrm{d}z=$ ________.

5. $\oint\limits_{|z|=2}\frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3}\mathrm{d}z=$ ________.

二、单项选择题

1. 设 $f(z)$ 在单连域 D 内解析，$\Gamma\subset D$ 为任一闭曲线，则必有(　　).

A. $\oint\limits_{\Gamma}\mathrm{Re}(f(z))\mathrm{d}z=0$　　B. $\oint\limits_{\Gamma}\mathrm{Im}(f(z))\mathrm{d}z=0$

C. $\mathrm{Re}\left(\oint\limits_{\Gamma}f(z)\mathrm{d}z\right)=0$　　D. $\oint\limits_{\Gamma}\overline{f(z)}\mathrm{d}z=0$

2. 设 $f(z)$ 在 $0<|z|<1$ 内解析，且沿任一圆周 $C:|z|=r,0<r<1$ 的积分均为零，则 $f(z)$ 在 $z=0$ 处(　　).

A. 可导　　B. 解析　　C. 连续　　D. 未必解析

3. 下列等式正确的是(　　).

A. $\mathrm{Re}\left(\oint\limits_{\Gamma}f(z)\mathrm{d}z\right)=\oint\limits_{\Gamma}\mathrm{Re}(f(z))\mathrm{d}z$

B. $\mathrm{Im}\left(\oint\limits_{\Gamma}f(z)\mathrm{d}z\right)=\oint\limits_{\Gamma}\mathrm{Im}(f(z))\mathrm{d}z$

C. $\mathrm{Re}\left(\oint\limits_{\Gamma}f(z)\mathrm{d}z\right)=\oint\limits_{\Gamma}(\mathrm{Re}f(z))\mathrm{d}x-(\mathrm{Im}f(z))\mathrm{d}y$

D. $\mathrm{Im}\left(\oint\limits_{\Gamma}f(z)\mathrm{d}z\right)=\oint\limits_{\Gamma}(\mathrm{Im}f(z))\mathrm{d}y$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

4. 当(　　)时,有$\oint_{\Gamma}\frac{dz}{z^2-3z+2}=0$.

A. Γ 过 $z_1=1, z_2=2$

B. Γ 的内部含有 z_1,但 z_2 在 Γ 的外部

C. Γ 的内部含有 z_2,但 z_1 在 Γ 的外部

D. z_1, z_2 在 Γ 的内部或 z_1, z_2 在 Γ 的外部

5. 设 $f(z)$ 在闭曲线 Γ 上及 Γ 的内部 D 处处解析,对于 $\forall z\in D$,有(　　).

A. $\oint_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}d\xi=f'(z)\oint_{\Gamma}\frac{d\xi}{(\xi-z)^2}$

B. $\oint_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}d\xi=\oint_{\Gamma}\frac{f'(\xi)}{\xi-z}d\xi$

C. $\oint_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}d\xi=\frac{f(z)}{2!}\oint_{\Gamma}\frac{d\xi}{\xi-z}$

D. $\oint_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}d\xi=\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{(\xi-z)^2}d\xi$

三、计算积分$\oint_{\Gamma}|z|\bar{z}dz$,$\Gamma$ 是一条闭曲线:由线段 $-1\leqslant x\leqslant 1, y=0$ 与上半单位圆周组成.

年　月　日

四、设 $f(z)$ 在闭路 Γ 上及其内部解析，而点 $z=0$ 和 $z=a$ 在 Γ 的内部. 证明

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{z^2(z-a)}dz=\frac{1}{a^2}f(a)-\frac{1}{a^2}f(0)-\frac{1}{a}f'(0)$$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

五、设 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant 1$ 上解析，且 $f(0)=1$，求积分

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\left[2+\left(z+\frac{1}{2}\right)f(z)\right]\frac{dz}{z}$$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

六、计算积分$\oint_{\Gamma}\frac{e^z}{z(1-z)^3}dz$，其中$\Gamma$为不通过点0和1的闭曲线.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

七、计算积分 $\oint_{|z|=3}\frac{dz}{z^3(z+1)(z-2)}$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

八、试证$\left|\int_{|z-1|=2}\frac{z+1}{z-1}\mathrm{d}z\right|\leqslant 8\pi$.

年 月 日

九、若 $f(z)$ 在 $|z-a|<R$ 内解析，试证 $\lim\limits_{r\to 0}\oint\limits_{|z-a|=r}\dfrac{f(z)}{z-a}dz=2\pi i f(a)$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

十、设 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant 1$ 上解析，且 $|f(z)|\leqslant 1$，试证：$|f'(0)|\leqslant 1$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

复变函数与积分变换试题(四)

一、填空题

1. 设 $z_n=a_n+\mathrm{i}b_n, n=1,2,\cdots, z_0=a_0+\mathrm{i}b_0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z_0$ 的充要条件是________.

2. 设 $\dfrac{e^{\frac{z}{z-\mathrm{i}}}\sin z}{(z^2+3z+2)e^z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n z^n$,则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 的收敛半径 R=________,故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 在________绝对收敛,在________一致收敛.

3. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-3)^n$ 在 $z=3+3\mathrm{i}$ 处收敛,但在 $z=6$ 处发散,则该级数的收敛半径 R=________.

4. 已知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ 的收敛半径为R,则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{c_n}{b^n}z^n$ 的收敛半径为________,这里 $b\neq 0$.

5. Laurent 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(z-2)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1-\dfrac{z}{2}\right)^n$ 的收敛圆环域为________,和函数为________.

二、单项选择题

1. 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-1-\mathrm{i})^n$ 在 $z=3+\mathrm{i}$ 处收敛,则它必在( ).

   A. $z=1$ 发散　　B. $z=4+\mathrm{i}$ 发散

   C. $|z-1-\mathrm{i}|\leqslant 2$ 上收敛　　D. $|z-1-\mathrm{i}|<2$ 内收敛

2. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c_{n+1}}{c_n}$ 存在($\neq\infty$ 且 $\neq 1$),则与另外三个幂级数有不同的收敛半径的幂级数是( ).

   A. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$　　B. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n^2 z^n$　　C. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{c_n}{n+1}z^{n+1}$　　D. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}nc_n z^{n-1}$

3. 下列正确的说法是( ).

   A. 每一个幂级数在它的收敛圆周上处处收敛

   B. 每一个幂级数的和函数在收敛圆内可能有奇点

   C. 每一个在 z_0 解析的函数一定可以在 z_0 的某一邻域内展开成幂级数

   D. 每一个在 z_0 连续的函数一定可以在 z_0 的某一邻域内展开成幂级数

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

4. 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$收敛，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|c_n|$发散，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_nz^n$的收敛半径是(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 小于 1　　D. 大于 1

5. 设$f(z)$在$D:R_1<|z-z_0|<R_2$内解析，它在D内的 Laurent 展开式为$f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$，$\Gamma$为$D$内围绕$z_0$的任一条正向简单闭曲线，则积分$\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz=$(　　).

A. a_3　　B. a_{-2}　　C. a_2　　D. $\dfrac{f''(z_0)}{2}$

三、试证：当$0<|z|<1$时，$\dfrac{1}{4}|z|<|e^z-1|<\dfrac{7}{4}|z|$.

年 月 日

四、求下列函数在指定点处的 Taylor 展开式，并指出它们的收敛半径.

1. $\dfrac{e^z}{1-z}, z_0=0$；　　2. $\dfrac{z}{z^2+3z+2}, z_0=2$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

五、设解析函数 $f(z)$ 在圆 $|z|<R$ 内的 Taylor 展开式为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$，且 $S_n(z)=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$，试证

$$S_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=r} f(\xi)\,\frac{\xi^{n+1}-z^{n+1}}{\xi-z}\,\frac{d\xi}{\xi^{n+1}},\quad |z|<r<R$$

年 月 日

六、将如下函数在给定的圆环域内展开成 Laurent 级数.

心得 体会 拓广 疑问

1. $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)^2}$, $0<|z|<1$; $0<|z-1|<1$;

2. $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z-\mathrm{i})}$, $0<|z-\mathrm{i}|<1$;

3. $f(z)=\mathrm{e}^{\frac{1}{1-z}}$, $1<|z|<\infty$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

七、求积分$\oint_{\Gamma}\left(\sum_{n=-2}^{\infty} z^{n}\right) dz$，其中$\Gamma$为单位圆$|z|=1$内的任何一条不经过圆点的闭曲线.

年 月 日

八、如果 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径为 R，证明 $\sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{Re}\, a_n) z^n$ 的收敛半径大于或等于 R.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

九、用长除法求函数$\frac{e^{z^2}}{\cos z}$的 Maclaurin 级数(到 z^5 次为止).

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

十、证明 $f(z)=\cos\left(z+\frac{1}{z}\right)$ 在点 $z=0$ 附近的 Laurent 展开式中的各系数为

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\cos n\theta\mathrm{d}\theta, n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

复变函数与积分变换试题(五)

一、填空题

1. $z=\pi$ 为函数 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z-\pi}$ 的________奇点.

2. $z=0$ 为函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^3(e^{z^3}-1)}$ 的________点.

3. $z=\infty$ 为函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z^3}$ 的________奇点.

4. 函数 $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^5}$ 在奇点 $z=0$ 的留数为________.

5. 函数 $f(z)=\dfrac{z^2+1}{e^z}$ 在 $z=\infty$ 的留数为________.

6. 函数 $f(z)=\cot^2 z$ 在 $z=k\pi$ 的留数为________.

二、单项选择题

1. $z=1$ 是函数 $f(z)=e^{\frac{1}{z-1}}$ 的(　　).

A. 解析点　　B. 本性奇点　　C. 孤立奇点　　D. 极点

2. $z=\infty$ 是函数 $f(z)=\dfrac{z^7}{(z-1)(1-z^2)^2}$ 的(　　).

A. 可去奇点　　B. 二阶极点　　C. 本性奇点　　D. 三级极点

3. $z=1$ 是函数 $f(z)=\sec\dfrac{1}{z-1}$ 的(　　).

A. 可去奇点　　B. 极点　　C. 本性奇点　　D. 非孤立奇点

4. 若 $f(z)=\sin\dfrac{1}{z-1}$,则 $\mathrm{Res}[f(z),1]=$(　　).

A. 1　　B. -1　　C. 0　　D. $\dfrac{3}{2}$

5. 函数 $f(z)=\dfrac{\cot \pi z}{2z-3}$ 在 $|z-i|=2$ 内的奇点个数为(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

6. 函数 $f(z)=\dfrac{z}{z^4-1}$ 在无穷远点 $z=\infty$ 的留数为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

年　月　日

三、问下列函数有哪些孤立奇点？属于哪种类型？如果是极点，指出它的阶.

心得 体会 拓广 疑问

1. $f(z)=e^{\frac{z}{1-z}}$；　2. $f(z)=\dfrac{1}{z(z^2+1)^2}$；　3. $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$；

4. $f(z)=e^{\frac{1}{z-1}}$.

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

四、求下列函数在有限孤立奇点的留数.

1. $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2-2z}$；　2. $f(z)=\sin\dfrac{z}{z+1}$；　3. $f(z)=\dfrac{z}{\cos z}$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

五、计算下列函数在无穷远点的留数.

1. $f(z)=\exp\left(\frac{1}{z^2}\right)$； 2. $f(z)=\frac{2z}{3+z^2}$； 3. $f(z)=\cos z-\sin z$.

年 月 日

六、利用留数计算下列各积分.

1. $\oint_C \frac{2\cos z}{(\mathrm{e}-\mathrm{e})^{-1}(2-\mathrm{i})^3}\mathrm{d}z, C: |z-\mathrm{i}|=1$;

2. $\oint_C \frac{1-\cos z}{z^m}\mathrm{d}z, C: |z|=\frac{3}{2}, m \in \mathbb{Z}$;

3. $\oint_C \frac{1}{(z+\mathrm{i})^{10}(z-1)(z-3)}\mathrm{d}z, C: |z|=2$;

4. $\oint_C \frac{1}{1+z^4}\mathrm{d}z, C: x^2+y^2=2x$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

七、计算下列各积分.

心得 体会 拓广 疑问

1. $\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin\theta} d\theta$;

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+4x+5} dx$;

3. $\int_{0}^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+x^2} dx$.

年 月 日

八、若 $f(z)$ 在分段光滑闭曲线 C 所围区域内除点 $z=a$ 外解析，且 a 是 $f(z)$ 的 n 阶极点，求证：当 $(z-a)^n f(z)=g(z)$ 时

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=\frac{2\pi\mathrm{i}}{(n-1)!}g^{(n-1)}(a)$$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

复变函数与积分变换试题(六)

一、填空题

1. 设 $f(t)=\sin^3 t$,则 $\mathscr{F}[f(t)]=$________.

2. 设 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$,$a\neq 0$,则 $\mathscr{F}[f(at-t_0)]=$________.

3. 设 $u(t)$ 为单位阶跃函数,则 $\mathscr{F}[u(t-\tau)]=$________.

4. 设 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\dfrac{3}{1+\omega^2}$,则 $f(t)=$________.

5. $\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\omega t\,\mathrm{d}t=$________.

6. 积分 $\int_{-4}^{2}\mathrm{e}^t\cdot\delta(t+3)\mathrm{d}t=$________.

二、单项选择题

1. 设 $f(t)=\delta(2-t)+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}$,则 $\mathscr{F}[f(t)]=$(　　).

A. $\mathrm{e}^{-2\omega\mathrm{i}}+2\pi\delta(\omega-\omega_0)$　　B. $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega}+2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

C. $\mathrm{e}^{-2\omega\mathrm{i}}+2\pi\delta(\omega+\omega_0)$　　D. $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega}+2\pi\delta(\omega+\omega_0)$

2. 设 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$,则 $\mathscr{F}[(t-2)f(t)]=$(　　).

A. $F'(\omega)-2F(\omega)$　　B. $-F'(\omega)-2F(\omega)$

C. $\mathrm{i}F'(\omega)-2F(\omega)$　　D. $-\mathrm{i}F'(\omega)-2F(\omega)$

3. 设 $f(t)=\mathrm{e}^{-\beta|t|}$,$\beta>0$,则 $\mathscr{F}[f(t)]=$(　　).

A. $\dfrac{2\omega}{\beta^2+\omega^2}$　　B. $\dfrac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}$

C. $\dfrac{2\omega}{\beta^2-\omega^2}$　　D. $\dfrac{2\beta}{\beta^2-\omega^2}$

4. 设 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$,$\mathscr{F}[f(t)\sin\omega_0 t]=$(　　).

A. $\dfrac{\mathrm{i}}{2}[F(\omega+\omega_0)-F(\omega-\omega_0)]$　B. $\dfrac{\mathrm{i}}{2}[F(\omega+\omega_0)+F(\omega-\omega_0)]$

C. $\dfrac{1}{2}[F(\omega+\omega_0)-F(\omega-\omega_0)]$　D. $\dfrac{1}{2}[F(\omega+\omega_0)+F(\omega-\omega_0)]$

5. 若 $f(t)=u(t)\sin\omega_0 t$,则 $\mathscr{F}[f(t)]=$(　　).

A. $\dfrac{\mathrm{i}\omega}{\omega_0^2-\omega^2}+\dfrac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$

B. $\dfrac{\mathrm{i}\omega}{\omega_0^2-\omega^2}+\dfrac{\pi\mathrm{i}}{2}[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$

C. $\dfrac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}+\dfrac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

D. $\dfrac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}+\dfrac{\pi i}{2}[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$

6. 积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-3)(t^2+1)\mathrm{d}t=$(　　).

A. 1　　B. 10　　C. 7　　D. 5

三、求函数 $f(t)=\mathrm{e}^{-|t|}\cos t$ 的傅氏变换，并求积分$\int_0^{+\infty}\dfrac{\omega^2+2}{\omega^4+4}\cdot\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega$ 的值.

年　月　日

四、求下列函数的傅氏变换.

心得 体会 拓广 疑问

1. $f(t)=\begin{cases}1-t^2, & |t|<1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$;

2. $f(t)=tu(t)e^{-\beta t}\sin\omega_0 t$,其中 $\beta>0$;

3. $f(t)=\cos\omega_0 t+\mathrm{i}\dfrac{1}{\pi t}*\cos\omega_0 t$,其中 $\omega_0>0$;

4. $f(t)=e^{\mathrm{i}\omega_0 t}tu(t)$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

五、求下列函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积.

1. $f_1(t)=\begin{cases}0, t<0\\1, t>0\end{cases}, f_2(t)=\begin{cases}0, t<0\\e^{-t}, t\geqslant 0\end{cases}$;

2. $f_1(t)=e^{-\alpha t}u(t), f_2(t)=\sin t u(t)$.

年 月 日

六、利用能量积分公式，求下列积分的值.

1. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t$；　　2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^4 t}{t^2}\mathrm{d}t$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

七、解积分方程$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y(\tau)}{(t-\tau)^2+a^2}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{t^2+b^2}$,$0<a<b$.

年 月

心得 体会 拓广 疑问

八、求微分积分方程 $x'(t)-\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\mathrm{d}\tau=\mathrm{e}^{-|t|}$ 的解，其中 $-\infty<t<+\infty$，且 $\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\mathrm{d}t=0$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

复变函数与积分变换试题(七)

一、填空题

1. 已知 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，$a>0$，$b\geqslant 0$，则 $\mathscr{L}[f(at-b)u(at-b)]=$________.

2. 已知 $f(t)=t^2\cos 2t$，则 $\mathscr{L}[f(t)]=$________.

3. 已知 $f(t)=\dfrac{\sin 3t}{t}$，则 $\mathscr{L}[f(t)]=$________.

4. 设 $F(s)=\arctan\dfrac{1}{s}$，则 $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=$________.

5. 若 $F(s)=\ln\left(1+\dfrac{1}{s^2}\right)$，则 $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=$________.

6. 已知 $F(s)=\dfrac{1+e^{-2s}}{s^2}$，则 $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=$________.

二、单项选择题

1. 设 $f(t)=e^{-t}u(t-1)$，则 $\mathscr{L}[f(t)]=$( ).

A. $\dfrac{e^{-(s-1)}}{s-1}$ B. $\dfrac{e^{-s}}{s+1}$ C. $\dfrac{e^{-(s+1)}}{s+1}$ D. $\dfrac{e^{-s}}{s-1}$

2. 设 $f(t)=(t-a)u(t-a)$，$a\in\mathbb{R}$，则 $\mathscr{L}[f(t)]=$( ).

A. $\dfrac{e^{as}}{s^2}$ B. $\dfrac{e^{-as}}{s^2}$ C. $\dfrac{1}{(s+a)^2}$ D. $\dfrac{1}{(s-a)^2}$

3. 设 $f(t)=\sin\left(t-\dfrac{\pi}{3}\right)$，则 $\mathscr{L}[f(t)]=$( ).

A. $\dfrac{1-\sqrt{3}s}{2(1+s^2)}$ B. $\dfrac{s-\sqrt{3}}{2(1+s^2)}$ C. $\dfrac{e^{-\frac{\pi}{3}s}}{1+s^2}$ D. $\dfrac{se^{-\frac{\pi}{3}s}}{1+s^2}$

4. 设 $f(t)=\int_0^t \tau e^{a\tau}\sin a\tau\,d\tau$，$t>0$，$a\in\mathbb{C}$，则 $\mathscr{L}[f(t)]=$( ).

A. $\dfrac{2a(s+a)}{s[(s+a)^2+a^2]^2}$ B. $\dfrac{2a(s-a)}{s[(s-a)^2+a^2]^2}$

C. $\dfrac{2a(s-a)}{s[(s-a)^2-a^2]^2}$ D. $\dfrac{2a(s+a)}{s[(s+a)^2-a^2]^2}$

5. 已知 $F(s)=\dfrac{2e^{-s}-e^{-2s}}{s}$，则 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=$( ).

A. $u(t-2)-2u(t-1)$ B. $2u(t-2)-u(t-1)$

C. $u(t-1)-2u(t-2)$ D. $2u(t-1)-u(t-2)$

6. 已知 $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$，则 $\mathscr{L}^{-1}[sF'(s)]=$( ).

A. $-tf'(t)-f(t)$ B. $tf(t)-f'(t)$

C. $tf'(t)+f(t)$ D. $-tf(t)+f'(t)$

年 月

三、求下列函数的拉氏变换.

心得 体会 拓广 疑问

1. $f(t)=\frac{2}{t}(1-\cos at)$；

2. $f(t)=u(3t-5)$；

3. $f(t)=t^n e^{at}$；

4. $f(t)=\frac{e^{bt}-e^{at}}{t}$.

年　月　日

四、求下列函数的拉氏逆变换.

1. $F(s)=\dfrac{s^3+5s^2+9s+7}{(s+1)(s+2)}$;　　2. $F(s)=\dfrac{s^2+2s-1}{s(s-1)^2}$;

3. $F(s)=\ln\dfrac{s^2-1}{s^2}$;　　4. $F(s)=\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

五、求下列积分.

心得 体会 拓广 疑问

1. $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-3t}-e^{-6t}}{t}dt$;

2. $\int_0^{+\infty}te^{-3t}\sin t dt$;

3. $\int_0^{+\infty}te^{-2t}dt$;

4. $\int_0^{\infty}\frac{1-\cos t}{t}e^{-t}dt$.

年 月 日

五、求下列积分.

1. $\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-3t}-e^{-6t}}{t}dt$;

2. $\int_{0}^{+\infty} te^{-3t}\sin t dt$;

3. $\int_{0}^{+\infty} te^{-2t}dt$;

4. $\int_{0}^{\infty} \frac{1-\cos t}{t}e^{-t}dt$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

六、求解积分微分方程 $y'(t)+2\int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau=u(t-1),y(0)=1.$

年 月 日

七、求微分方程组$\begin{cases} y''-x''+x'-y=e^t-2 \\ 2y''-x''-2y'+x=-t \end{cases}$满足初始条件$x(0)=x'(0)=0, y(0)=y'(0)=0$的解.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

复变函数与积分变换试题(综合一)

一、填空题

1. 函数 $f(z)=z\mathrm{Im}\,z+\mathrm{Re}\,z$ 在________处连续,在________处可导,在________处解析.

2. 复数 $(1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}}$ 的实部为________,虚部为________.

3. 设 $f(z)=\oint\limits_{|\xi|=2}\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\xi\right)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi$,其中 $|z|\neq 2$,则 $f'(1)=$________.

4. 已知 $f(z)=(z-1)^2\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$,则 $\mathrm{Res}[f(z),0]=$________.

5. 已知 $F(\omega)=\mathscr{L}[f(t)]$,则 $\mathscr{F}[f(3t-2)]=$________.

二、单项选择题

1. 复数 $z=1-\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha\,(0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$ 的辐角主值为(　　).

A. $\dfrac{\alpha}{2}$　　B. $\pi-\dfrac{\alpha}{2}$　　C. $\dfrac{\pi-\alpha}{2}$　　D. $\dfrac{\alpha-\pi}{2}$

2. 设 $f(z)$ 在单连域 D 内处处解析且处处不为零,C 为 D 内任意一条闭路,则积分 $\oint_C\dfrac{f''(z)+2f'(z)+3f^2(z)}{f(z)}\mathrm{d}z$ 为(　　).

A. $2\pi\mathrm{i}$　　B. $-2\pi\mathrm{i}$　　C. 0　　D. 不能确定

3. Laurent 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{(z-3)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1-\dfrac{z}{3}\right)^n$ 的收敛圆环域为(　　).

A. $2<|z|<3$　　B. $2<|z-3|<3$

C. $\dfrac{1}{3}<|z|<\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{3}<|z-3|<\dfrac{1}{2}$

4. $z=1$ 是函数 $f(z)=(z-1)^2\sin\dfrac{1}{z-1}$ 的(　　).

A. 可去奇点　　B. 极点　　C. 非孤立奇点　　D. 本性奇点

5. 已知 $f(t)=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}\delta'(t)$,则 $\mathscr{F}[f(t)]=$(　　).

A. $2+\mathrm{i}\omega$　　B. $\mathrm{i}(\omega+2)$　　C. $\mathrm{i}(\omega-2)$　　D. $2-\mathrm{i}\omega$

年　月　日

三、验证 $u(x,y)=e^{-y}\sin x$ 是调和函数,并求出以 $z=x+iy$ 为自变量的解析函数

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y),其中 f(0)=-i$$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

四、把下列函数在给定的圆环域内展开成 Laurent 级数.

1. $f(z)=\dfrac{z^2-3z+2}{z^2-7z+12}$, $3<|z|<4$;

2. $f(z)=\sin\left(\dfrac{z}{z-1}\right)$, $0<|z-1|<+\infty$.

年 月

心得 体会 拓广 疑问

五、设 $f(z)=\dfrac{z-a}{z+a}, a\neq 0$,求积分$\oint_C \dfrac{f(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z$,其中 C 为任一条包含原点且落在圆周 $|z|=|a|$ 内的简单闭曲线.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

六、计算下列各积分.

1. $\int_C z(z+\bar{z})\mathrm{d}z$，其中 C 为 $|z|=1$ 的上半圆周，且取由 1 到 -1 的方向；

2. $\oint_C \frac{\cos \pi z}{z^3(z-1)^2}\mathrm{d}z$，$C$：$|z|=2$；

3. $\oint_C \frac{z^{13}}{(z^2+2)^3(z^2-1)^4}\mathrm{d}z$，$C$：$|z|=3$；

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+9)}\mathrm{d}x$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

七、若函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在点 z_0 处解析，且 $f(z_0)\neq 0$，$g(z)$ 以 z_0 为二阶零点，证明

$$\mathrm{Res}\left[\frac{f(z)}{g(z)},z_0\right]=\frac{a_1b_2-a_0b_3}{b_2^2}$$

其中 $a_k=\dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$，$b_k=\dfrac{g^{(k)}(z_0)}{k!}$，$k=0,1,2,3.$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

八、计算积分 $I=\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 3\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\mathrm{d}\theta$, $|a|<1$.

年 月 日

九、求函数 $f(t)=e^{-\beta|t|}$ $(\beta>0)$ 的傅氏变换,并证明

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos wt}{\beta^2+w^2}dw=\frac{\pi}{2\beta}e^{-\beta|t|}$$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

十、求下列函数的 Laplace 变换或逆变换.

1. $f(t)=e^{-5t}\int_0^t \frac{\sin 2\tau}{\tau}d\tau$，求 $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$；

2. $F(s)=\frac{2s^2+3s+2}{(s+1)(s+3)^3}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

心得 体会 拓广

年

十一、利用拉氏变换求解微分方程的初值问题

$$\begin{cases} y'''(t)+3y''(t)+3y'(t)+y(t)=1 \\ y(0)=y'(0)=y''(0)=0 \end{cases}$$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

复变函数与积分变换试题(综合二)

一、将下列复数写成 $x+iy$ 的形式.

1. $\cos(1+2i)$；　2. $1^{\sqrt{3}}$；　3. $\mathrm{Ln}(3+4i)$；　4. $\mathrm{Arctan}\ 2i$.

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

二、验证 $u(x,y)=[(x+1)\cos y-y\sin y]e^{x}$ 是否在 z 平面上调和，若为调和函数，请求出调和函数 $v(x,y)$，使 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在 z 平面上解析.

年 月 日

三、若 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是解析函数，证明

$$\frac{\partial^2 \ln(1+|f(z)|^2)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \ln(1+|f(z)|^2)}{\partial y^2}=\frac{4|f'(z)|^2}{(1+|f(z)|^2)^2}$$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

四、计算下列积分.

1. $\int_C \frac{\bar{z}}{|z|}dz$，$C$ 是以原点为心，3 为半径的上半圆周，C 起点为 -3，终点为 3；

2. $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz$；

3. $\oint_{|z|=1} \frac{z\sin z}{(1-e^z)^3}dz$；

4. $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$；

5. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x\sin x}$，$a>0$；

6. $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+9}dx$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

五、设函数 $f(z)$ 在 $0<|z|<+\infty$ 上解析，$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$，求对任一自然数 k，函数 $\frac{f(z)}{z^k}$ 在点 $z=0$ 处的留数 $\text{Res}\left[\frac{f(z)}{z^k},0\right]$.

年 月 日

六、把下列函数在给定的圆环域内展开成 Laurent 级数.

1. $\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$, $1<|z|<2$;

2. $\cos\dfrac{z}{z-1}$, $0<|z-1|<+\infty$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

七、已知 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$，计算 $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{f(z)}{z^{n+1}}dz$，其中 $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

年 月 日

八、求 $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+4s+13)^2}\right]$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

九、求下列微分积分方程

$$x'(t)-4\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\mathrm{d}\tau=\mathrm{e}^{-|t|}$$

的解，其中$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{d}t=0$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

十、求下列函数的 Laplace 变换或逆变换.

1. $\cos^3 t$;　　2. $t^2\int_0^t e^{-4\tau}\sin 2\tau d\tau$;　　3. $\dfrac{2s^3-s^2-1}{(s+1)^2(s^2+1)^2}$.

心得 体会 拓广 疑问

年　月　日

十一、利用 Laplace 变换求解下列初值问题

$$x''(t)+4x'(t)+3x(t)=e^{-t},x(0)=x'(0)=1$$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

复变函数与积分变换试题(综合三)

一、填空题

1. 一复数对应的向量按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$ 时，对应的复数是 $1+\mathrm{i}$，则原复数是________.

2. 设 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 解析，则 $f'(z)=$________.

3. 设 $f(z)=\oint\limits_{|\zeta|=2}\frac{\zeta(e^{\zeta}+\sin\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$，则 $f'(0)=$________.

4. Laurent 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-2)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{z}{2}\right)^n$ 的收敛圆环域为________.

5. $z=1$ 是函数 $f(z)=e^{\frac{1}{z-1}}$ 的________奇点.

二、单项选择题

1. 映射 $w=\frac{3z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$ 在 $z_0=2\mathrm{i}$ 处的旋转角为(　　).

A. 0　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. π　　D. $-\frac{\pi}{2}$

2. $f(z)=\frac{z}{z^4-1}$ 在 $z=\infty$ 处的留数为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

3. 设 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$，则 $\mathscr{F}[(t-2)f(t)]=$(　　).

A. $F'(\omega)-2F(\omega)$　　B. $-F'(\omega)-2F(\omega)$

C. $\mathrm{i}F'(\omega)-2F(\omega)$　　D. $-\mathrm{i}F'(\omega)-2F(\omega)$

4. 在 z 平面上，点 $z=2+\mathrm{i}$ 关于圆周 Γ: $|z-\mathrm{i}|=3$ 的对称点为(　　).

A. $\frac{9}{2}-\mathrm{i}$　　B. $\frac{9}{2}+\mathrm{i}$　　C. $\frac{2}{5}+\mathrm{i}$　　D. $\frac{2}{5}-\mathrm{i}$

5. 下列方程所表示的曲线中，(　　)是椭圆.

A. $|z+\mathrm{i}|+|z-\mathrm{i}|=3$　　B. $\left|\frac{z-2}{z-1}\right|=8$

C. $\mathrm{Im}\, z=|z|+1$　　D. $\mathrm{Re}\, z^3=3$

年　月　日

三、已知$u+v=(x-y)(x^2+4xy+y^2)-2(x+y)$，确定解析函数$f(z)=u+\mathrm{i}v$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

四、计算

1. 计算积分$\int_{\Gamma}(x-y+\mathrm{i}x^2)\mathrm{d}z$，$\Gamma$为直线段由0到$1+\mathrm{i}$；

2. 设$f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z}{z-1}$，求积分$\oint_C\dfrac{f(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z$，$C$：$|z|=r<1$；

3. $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x$；

年 月 日

4. 求函数 $f(z)=\dfrac{z-1}{z(z+2)}$ 在 $2<|z+2\mathrm{i}|<2\sqrt{2}$ 内的 Laurent 展开式；

心得 体会 拓广 疑问

5. $\displaystyle\oint_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{e}^z}{(z^2+1)(z^2+4)}\mathrm{d}z.$

年 月 日

五、设 $f(z)$ 在域 D 内解析，$z_0 \in D$，且 $f(z_0)=0$，$f'(z_0)\neq 0$. 若 $D'=\{z\in\mathbb{C}: |z-z_0|\leqslant\delta\}\subset D$，且 $f'(z)\neq 0, z\in D'\setminus\{z_0\}$，求证

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=\delta}\frac{zf'(z)}{f(z)}dz=z_0$$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

六、求函数 $f(t)=t^2u(t)$ 和 $g(t)=\begin{cases}1, & |t|\leqslant 1\\0, & |t|>1\end{cases}$ 的卷积.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

七、求解下列初值问题

$$\begin{cases} y''(t) - y'(t) - 6y(t) = 2 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日