

复变函数与积分变换 综合训练

FUNCTIONS OF COMPLEX VARIABLE AND INTEGRAL
TRANSFORM COMPREHENSIVE TRAINING

包革军 邢宇明 主编

 哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



扫描全能王 创建

复变函数与积分变换 综合训练

FUNCTIONS OF COMPLEX VARIABLE AND INTEGRAL
TRANSFORM COMPREHENSIVE TRAINING

包革军 邢宇明 主编

哈尔滨工业大学出版社
HTTP://HARBININSTITUTEOFTECHNOLOGYPRESS.COM



扫描全能王 创建

目 录

复变函数与积分变换试题	1
复变函数与积分变换试题(一).....	3
复变函数与积分变换试题(二)	13
复变函数与积分变换试题(三)	22
复变函数与积分变换试题(四)	31
复变函数与积分变换试题(五)	40
复变函数与积分变换试题(六)	47
复变函数与积分变换试题(七)	54
复变函数与积分变换试题(综合一)	60
复变函数与积分变换试题(综合二)	70
复变函数与积分变换试题(综合三)	81
复变函数与积分变换试题解答	89
复变函数与积分变换试题(一)解答	91
复变函数与积分变换试题(二)解答	94
复变函数与积分变换试题(三)解答	98
复变函数与积分变换试题(四)解答.....	101
复变函数与积分变换试题(五)解答.....	105
复变函数与积分变换试题(六)解答.....	109
复变函数与积分变换试题(七)解答.....	113
复变函数与积分变换试题(综合一)解答.....	116
复变函数与积分变换试题(综合二)解答.....	121
复变函数与积分变换试题(综合三)解答.....	128



扫描全能王 创建

心得 体会 拓广 疑问

复变函数与积分变换试题(一)

一、填空题

1. 设 $z = \frac{(1-i)^5 - 1}{(1+i)^3 + 1}$, 则其实部为 _____, 虚部为 _____.

2. 一复数对应的向量按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$ 时对应的复数是 $1+i$, 则原复数是 _____.

3. 已知复数 $z = \frac{-2}{1+\sqrt{3}i}$, 则 z 的辐角主值是 _____.

4. $\sin \frac{\pi}{3} - i \cos \frac{\pi}{3}$ 的三角形式为 _____.

5. 满足 $0 < \arg \frac{z-1}{z+1} < \frac{\pi}{6}$ 的 z 所构成的点集是 _____.

二、单项选择题

1. 已知 $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$, 则 $z^{100} + z^{50} + 1$ 的值为()。

- A. $-i$ B. i C. 1 D. -1

2. 集合 $D = \{z : 2 < |z - i| < 10^5\}$, 则 D 是()。

- A. 单连通区域 B. 多连通区域 C. 无界区域 D. 闭区域

3. 下列方程所表示的曲线中,()是椭圆。

A. $|z+i| + |z-i| = 3$ B. $\left| \frac{z-2}{z-1} \right| = 8$

C. $\operatorname{Im} z = |z| + 1$ D. $\operatorname{Re}(z^2) = 3$

4. 函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ 则 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 存在的充分必要条件是()。

A. $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y)$ 存在

B. $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y)$ 存在

C. A 与 B 同时成立

D. $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} [u(x, y) + v(x, y)]$ 存在

5. 下列函数中,都有 $f(0) = 0$, 则()在原点不连续。

A. $f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{1+|z|}$

B. $f(z) = \frac{(\operatorname{Re} z)^2}{|z|}$

C. $f(z) = \frac{[\operatorname{Re}(z^2)]^2}{|z|^2}$

D. $f(z) = \frac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z|^2}$

年 月 日



扫描全能王 创建

三、试确定等式 $(3+6i)x + (5-9i)y = 6-7i$ 中的实数 x, y .

心得 体会 拓广 疑问

复变函数与积分变换综合训练

复数与复变函数
复数与复变函数

年 月 日



扫描全能王 创建

四、试证 $|1 - \bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日



扫描全能王 创建

五、证明 $\frac{z_1}{z_2} \geq 0, z_2 \neq 0 \Leftrightarrow |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日



扫描全能王 创建

六、将复数 $z = 1 + \sin 1 + i \cos 1$ 化为三角形式和指数形式.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日



扫描全能王 创建

七、设 $(1+i)^n = (1-i)^n$, 求整数 n .

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日



扫描全能王 创建

八、解方程 $z^2 - 4iz - 4 + 9i = 0$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日



扫描全能王 创建

九、若 $|z_1| = \lambda |z_2|$, $\lambda > 0$, 则 $|z_1 - \lambda^2 z_2| = \lambda |z_1 - z_2|$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日



扫描全能王 创建

十、证明方程 $\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = k, k > 0, k \neq 1, z_1 \neq z_2$ 表示 z -平面上的一个圆周, 其圆心为 z_0 , 半径为 ρ , 且 $z_0 = \frac{z_1 - k^2 z_2}{1 - k^2}$, $\rho = \frac{k |z_1 - z_2|}{|1 - k^2|}$.

心得 体会 拓广 疑问

该题是复数分析中一个重要的几何性质, 即复数平面上圆周的性质。具体来说, 如果 $|z - z_1| = k|z - z_2|$, 则 z 在复平面上表示一个圆周。

设 $z_0 = \frac{z_1 - k^2 z_2}{1 - k^2}$, $\rho = \frac{k |z_1 - z_2|}{|1 - k^2|}$ 。令 $w = z - z_0$, 则 $|w| = \rho$ 表示一个圆周。

因此, $|z - z_1| = k|z - z_2| \Leftrightarrow |z - z_0 + z_0 - z_1| = k|z - z_0 + z_0 - z_2|$

即 $|w| = \rho$ 。

所以, $|z - z_1| = k|z - z_2|$ 表示一个圆周, 其圆心为 z_0 , 半径为 ρ 。

该题是复数分析中一个重要的几何性质。

如果 $|z - z_1| = k|z - z_2|$, 则 z 在复平面上表示一个圆周。

设 $z_0 = \frac{z_1 - k^2 z_2}{1 - k^2}$, $\rho = \frac{k |z_1 - z_2|}{|1 - k^2|}$ 。令 $w = z - z_0$, 则 $|w| = \rho$ 表示一个圆周。

因此, $|z - z_1| = k|z - z_2| \Leftrightarrow |z - z_0 + z_0 - z_1| = k|z - z_0 + z_0 - z_2|$

即 $|w| = \rho$ 。

所以, $|z - z_1| = k|z - z_2|$ 表示一个圆周, 其圆心为 z_0 , 半径为 ρ 。

该题是复数分析中一个重要的几何性质。

如果 $|z - z_1| = k|z - z_2|$, 则 z 在复平面上表示一个圆周。

设 $z_0 = \frac{z_1 - k^2 z_2}{1 - k^2}$, $\rho = \frac{k |z_1 - z_2|}{|1 - k^2|}$ 。令 $w = z - z_0$, 则 $|w| = \rho$ 表示一个圆周。

因此, $|z - z_1| = k|z - z_2| \Leftrightarrow |z - z_0 + z_0 - z_1| = k|z - z_0 + z_0 - z_2|$

即 $|w| = \rho$ 。

所以, $|z - z_1| = k|z - z_2|$ 表示一个圆周, 其圆心为 z_0 , 半径为 ρ 。

年 月 日



扫描全能王 创建

心得 体会 拓广 疑问

十一、证明 $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{|z|}$ 不存在。

十二、对于复数序列 $\{a_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 求证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a$$

后记

年 月 日



扫描全能王 创建

心得 体会 拓广 疑问

复变函数与积分变换试题(二)

一、填空题

1. 函数 $f(z) = (e^x \cos y - x) + i(e^x \sin y - y^2)$ 在 _____ 可导, 在 _____ 处解析.
2. 函数 $f(z) = u + iv$ 是解析函数, 则 $e^u \cos v$ 的共轭调和函数是 _____.
3. 设函数 $f(z) = my^3 + nx^2y + i(x^3 + lxy^2)$ 为解析函数, 则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$, $n = \underline{\hspace{2cm}}$, $l = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. $1^{\sqrt{3}+i} = \underline{\hspace{2cm}}$.
5. 设 $f(z) = u + iv$ 解析, 则 $f'(z) = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、单项选择题

1. 函数 $f(z) = u + iv$ 在点 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处可导的充要条件是().
 A. u, v 在点 (x_0, y_0) 处偏导数存在
 B. u, v 在点 (x_0, y_0) 处可微
 C. u, v 在点 (x_0, y_0) 处满足 C-R 条件
 D. u, v 同时满足 B 和 C
2. 函数 $f(z) = |z|^2$ 在点 $z=0$ 处使()不成立.
 A. 连续 B. 可导 C. 解析 D. C-R 条件
3. 函数 $f(z) = u + iv$ 在区域 D 内可导的充要条件是().
 A. u, v 在 D 内可微
 B. u, v 在 D 内有一阶连续的偏导数
 C. u, v 在 D 内满足 C-R 条件
 D. $f(z)$ 在 D 内解析
4. 函数 $f(z) = u + iv$ 在区域 D 内解析, 下列等式中正确的是().
 A. $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}$ B. $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial x}$
 C. $f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial u}{\partial x}$ D. $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$
5. 函数 $f(z) = u + iv$ 解析, 则下列命题中错误的是().
 A. u, v 均为调和函数 B. u 是 v 的共轭调和函数
 C. v 是 u 的共轭调和函数 D. $-u$ 是 v 的共轭调和函数

年 月 日



扫描全能王 创建

三、设

$$f(z) = \begin{cases} \frac{x(x^2 + y^2)(y - ix)}{x^2 + y^4}, & z = x + iy \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

证明：当 z 沿任何直线趋向于 0 时， $\frac{f(z) - f(0)}{z} \rightarrow 0$ ，但 $f'(0)$ 不存在。

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日



扫描全能王 创建

四、讨论函数 $f(z) = z \operatorname{Re} z$ 在 z 平面上的可导性和解析性。

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日



扫描全能王 创建

五、求函数 $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ 的实、虚部，证明它们满足 C-R 条件。

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日



扫描全能王 创建

六、设 $f(z) = u + iv$ 的 $z = x + iy$ 的解析函数, 且

$$2xyu + (x^2 - y^2)v + 2xy(x^2 - y^2) = 0$$

求 $f(z)$ 的表达式.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日



扫描全能王 创建

七、设 $f(z) = u + iv$ 在区域 D 内解析，证明： u, v 是 D 内的调和函数。心得 体会 拓广 疑问

年 月 日



扫描全能王 创建

八、设 $f(z) = u + iv$ 是一个解析函数, 且 $u + v = x^3 - y^3 + 3x^2y - 3xy^2 - 2x - 2y$, 求 $f(z) = u + iv$ 的表达式.

年 月 日



扫描全能王 创建

九、求具有如下形式的所有调和函数 u , 其中 f 具有二阶连续导数.

1. $u = f(ax + by)$, a 和 b 不全为零.

2. $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日



扫描全能王 创建

十、将如下函数值写成 $x + iy$ 的形式.

1. $\exp(2 - i)$.
2. $\ln(3 - \sqrt{3}i)$.
3. $\text{Arctan}(2 + 3i)$.
4. $\sec(1 + i)$.
5. $(1 + i)^{1-i}$.

心得 体会 拓广 疑问

在复数平面内，复数的表示方法有三种：

1. 代数形式： $z = x + iy$ ，其中 $x, y \in \mathbb{R}$ ， i 是虚数单位。

2. 极坐标形式： $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ，其中 $r > 0$ ， $\theta \in [0, 2\pi]$ 。

3. 指数形式： $z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ 。

复数的加减乘除运算与实数类似，但要注意复数的乘法满足交换律。

复数的除法可以利用复数的共轭复数进行简化。

复数的幂次和根式可以通过极坐标形式进行计算。

复数的复数幂次可以通过复数的指数形式进行计算。

复数的复数根式可以通过复数的极坐标形式进行计算。

复数的复数幂次和根式在复数分析中有广泛的应用。

年 月 日



扫描全能王 创建

复变函数与积分变换试题(三)

一、填空题

1. 沿 $y=x$ 的积分 $\int_0^{1+i} (8z^2 + 3\bar{z} + 1) dz = \underline{\hspace{2cm}}$; 沿 $y=x^2$ 的积分 $\int_0^{1+i} (8z^2 + 3\bar{z} + 1) dz = \underline{\hspace{2cm}}$.

$$2. \oint_{|z|=2} \frac{|z|^2}{z-1} dz = \underline{\hspace{2cm}}; \oint_{|z|=2} \frac{|z|^2}{z-3} dz = \underline{\hspace{2cm}}.$$

3. 设 $f(z) = \oint_{|\xi|=2} \frac{\xi(e^\xi + \sin \xi)}{\xi - z} d\xi$, 求 $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$; $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$; $f'(3) = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 设 $f(z)$ 在单连域 D 内解析且处处不为零, Γ 为 D 内任一闭曲线, 则积分 $\oint_{\Gamma} \frac{f'(z) + 2f(z) + 3z}{f^2(z)} dz = \underline{\hspace{2cm}}$.

$$5. \oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{(z - \frac{\pi}{2})^3} dz = \underline{\hspace{2cm}}.$$

二、单项选择题

1. 设 $f(z)$ 在单连域 D 内解析, $\Gamma \subset D$ 为任一闭曲线, 则必有()。

- A. $\oint_{\Gamma} \operatorname{Re}(f(z)) dz = 0$
- B. $\oint_{\Gamma} \operatorname{Im}(f(z)) dz = 0$
- C. $\operatorname{Re}(\oint_{\Gamma} f(z) dz) = 0$
- D. $\oint_{\Gamma} \overline{f(z)} dz = 0$

2. 设 $f(z)$ 在 $0 < |z| < 1$ 内解析, 且沿任一圆周 $C: |z|=r, 0 < r < 1$ 的积分均为零, 则 $f(z)$ 在 $z=0$ 处()。

- A. 可导
- B. 解析
- C. 连续
- D. 未必解析

3. 下列等式正确的是()。

- A. $\operatorname{Re}(\oint_{\Gamma} f(z) dz) = \oint_{\Gamma} \operatorname{Re}(f(z)) dz$
- B. $\operatorname{Im}(\oint_{\Gamma} f(z) dz) = \oint_{\Gamma} \operatorname{Im}(f(z)) dz$
- C. $\operatorname{Re}(\oint_{\Gamma} f(z) dz) = \oint_{\Gamma} (\operatorname{Re} f(z)) dx - (\operatorname{Im} f(z)) dy$
- D. $\operatorname{Im}(\oint_{\Gamma} f(z) dz) = \oint_{\Gamma} (\operatorname{Im} f(z)) dy$

年 月 日



扫描全能王 创建

4. 当()时, 有 $\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^2 - 3z + 2} = 0$.

心得 体会 拓广 疑问

- A. Γ 过 $z_1 = 1, z_2 = 2$
- B. Γ 的内部含有 z_1 , 但 z_2 在 Γ 的外部
- C. Γ 的内部含有 z_2 , 但 z_1 在 Γ 的外部
- D. z_1, z_2 在 Γ 的内部或 z_1, z_2 在 Γ 的外部

5. 设 $f(z)$ 在闭曲线 Γ 上及 Γ 的内部 D 处处解析, 对于 $\forall z \in D$, 有().

- A. $\oint_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi = f'(z) \oint_{\Gamma} \frac{d\xi}{(\xi - z)^2}$
- B. $\oint_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi = \oint_{\Gamma} \frac{f'(\xi)}{\xi - z} d\xi$
- C. $\oint_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi = \frac{f(z)}{2!} \oint_{\Gamma} \frac{d\xi}{\xi - z}$
- D. $\oint_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi = \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(\xi - z)^2} d\xi$

三、计算积分 $\oint_{\Gamma} |z| \bar{z} dz$, Γ 是一条闭曲线: 由线段 $-1 \leq x \leq 1, y=0$

与上半单位圆周组成.

年 月 日



扫描全能王 创建

四、设 $f(z)$ 在闭路 Γ 上及其内部解析, 而点 $z=0$ 和 $z=a$ 在 Γ 的内
部, 证明

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z^2(z-a)} dz = \frac{1}{a^2} f(a) - \frac{1}{a^2} f(0) - \frac{1}{a} f'(0)$$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日



扫描全能王 创建

五、设 $f(z)$ 在 $|z| \leq 1$ 上解析, 且 $f(0) = 1$, 求积分

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} [2 + (z + \frac{1}{2})f(z)] \frac{dz}{z}$$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日



扫描全能王 创建

六、计算积分 $\oint_{\Gamma} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$, 其中 Γ 为不通过点 0 和 1 的闭曲线.

心得 体会 拓广 提问

年 月 日



扫描全能王 创建

七、计算积分 $\oint_{|z|=3} \frac{dz}{z^3(z+1)(z-2)}.$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日



扫描全能王 创建

八、试证 $\left| \int_{|z-1|=2} \frac{z+1}{z-1} dz \right| \leqslant 8\pi.$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日



扫描全能王 创建

九、若 $f(z)$ 在 $|z - a| < R$ 内解析, 试证 $\lim_{r \rightarrow 0} \oint_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a)$.

心得 体会 拓广 疑问

设 $f(z)$ 在 $|z - a| < R$ 内解析, 则由柯西积分公式知

$$\oint_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a)$$

令 $r \rightarrow 0$, 则有

$$\lim_{r \rightarrow 0} \oint_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a)$$

故得证.

年 月 日



扫描全能王 创建

十、设 $f(z)$ 在 $|z| \leq 1$ 上解析, 且 $|f(z)| \leq 1$, 试证: $|f'(0)| \leq 1$. 心得 体会 拓广 疑问

年 月 日



扫描全能王 创建

心得 体会 拓广 疑问

复变函数与积分变换试题(四)

一、填空题

1. 设 $z_n = a_n + ib_n, n = 1, 2, \dots, z_0 = a_0 + ib_0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ 的充要条件是 _____.

2. 设 $\frac{e^{\frac{z}{z-1}} \sin z}{(z^2 + 3z + 2)e^z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径 $R =$ _____, 故 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 _____ 绝对收敛, 在 _____ 一致收敛.

3. 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - 3)^n$ 在 $z = 3 + 3i$ 处收敛, 但在 $z = 6$ 处发散, 则该级数的收敛半径 $R =$ _____.

4. 已知 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 R , 则 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{b^n} z^n$ 的收敛半径为 _____, 这里 $b \neq 0$.

5. Laurent 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-2)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1 - \frac{z}{2})^n$ 的收敛圆环域为 _____, 和函数为 _____.

二、单项选择题

1. 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - 1 - i)^n$ 在 $z = 3 + i$ 处收敛, 则它必在().

- A. $z = 1$ 发散
- B. $z = 4 + i$ 发散
- C. $|z - 1 - i| \leq 2$ 上收敛
- D. $|z - 1 - i| < 2$ 内收敛

2. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}$ 存在($\neq \infty$ 且 $\neq 1$), 则与另外三个幂级数有不同的收敛半径的幂级数是().

- A. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$
- B. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 z^n$
- C. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}$
- D. $\sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1}$

3. 下列正确的说法是().

- A. 每一个幂级数在它的收敛圆周上处处收敛
- B. 每一个幂级数的和函数在收敛圆内可能有奇点
- C. 每一个在 z_0 解析的函数一定可以在 z_0 的某一邻域内展开成幂级数
- D. 每一个在 z_0 连续的函数一定可以在 z_0 的某一邻域内展开成幂级数

年 月 日



扫描全能王 创建

4. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径是()。

- A. 0 B. 1 C. 小于 1 D. 大于 1

5. 设 $f(z)$ 在 $D: R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内解析, 它在 D 内的 Laurent 展开式为 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, Γ 为 D 内围绕 z_0 的任一条正向简单闭曲线, 则积分 $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz = ()$.

- A. a_3 B. a_{-2} C. a_2 D. $\frac{f''(z_0)}{2}$

三、试证: 当 $0 < |z| < 1$ 时, $\frac{1}{4} |z| < |e^z - 1| < \frac{7}{4} |z|$.

心得 体会 拓广 疑问

年月日



扫描全能王 创建

四、求下列函数在指定点处的 Taylor 展开式，并指出它们的收敛半径。心得 体会 拓广 疑问

1. $\frac{e^z}{1-z}, z_0 = 0;$ 2. $\frac{z}{z^2 + 3z + 2}, z_0 = 2.$

年 月 日



扫描全能王 创建

五、设解析函数 $f(z)$ 在圆 $|z| < R$ 内的 Taylor 展开式为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$,

且 $S_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, 试证

$$S_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=r} f(\xi) \frac{\xi^{n+1} - z^{n+1}}{\xi - z} \frac{d\xi}{\xi^{n+1}}, \quad |z| < r < R$$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日



扫描全能王 创建

六、将如下函数在给定的圆环域内展开成 Laurent 级数。

1. $f(z) = \frac{1}{z(1-z)^2}, 0 < |z| < 1; 0 < |z-1| < 1;$

2. $f(z) = \frac{1}{z^2(z-i)}, 0 < |z-i| < 1;$

3. $f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}, 1 < |z| < \infty.$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日



扫描全能王 创建

七、求积分 $\oint_{\Gamma} \left(\sum_{n=-2}^{\infty} z^n \right) dz$, 其中 Γ 为单位圆 $|z|=1$ 内的任何一条不经过圆点的闭曲线.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日



扫描全能王 创建

八、如果 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径为 R, 证明 $\sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{Re} a_n) z^n$ 的收敛半径大于或等于 R.

心得 体会 拓广 疑问

成绩: _____

年 月 日



扫描全能王 创建

九、用长除法求函数 $\frac{e^{z^2}}{\cos z}$ 的 Maclaurin 级数(到 z^5 次为止).

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日



扫描全能王 创建

十、证明 $f(z) = \cos(z + \frac{1}{z})$ 在点 $z=0$ 附近的 Laurent 展开式中的各系数为

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2\cos\theta) \cos n\theta d\theta, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

心得 体会 拓广 疑问

答：见上

年 月 日



扫描全能王 创建

复变函数与积分变换试题(五)

一、填空题

1. $z = \pi$ 为函数 $f(z) = \frac{\sin z}{z - \pi}$ 的 _____ 奇点.
2. $z = 0$ 为函数 $f(z) = \frac{1}{z^3(e^{z^3} - 1)}$ 的 _____ 点.
3. $z = \infty$ 为函数 $f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3}$ 的 _____ 奇点.
4. 函数 $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^5}$ 在奇点 $z = 0$ 的留数为 _____.
5. 函数 $f(z) = \frac{z^2 + 1}{e^z}$ 在 $z = \infty$ 的留数为 _____.
6. 函数 $f(z) = \cot^2 z$ 在 $z = k\pi$ 的留数为 _____.

二、单项选择题

1. $z = 1$ 是函数 $f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$ 的():
A. 解析点 B. 本性奇点 C. 孤立奇点 D. 极点
2. $z = \infty$ 是函数 $f(z) = \frac{z^7}{(z-1)(1-z^2)^2}$ 的():
A. 可去奇点 B. 二阶极点 C. 本性奇点 D. 三级极点
3. $z = 1$ 是函数 $f(z) = \sec \frac{1}{z-1}$ 的():
A. 可去奇点 B. 极点 C. 本性奇点 D. 非孤立奇点
4. 若 $f(z) = \sin \frac{1}{z-1}$, 则 $\text{Res}[f(z), 1] =$ ():
A. 1 B. -1 C. 0 D. $\frac{3}{2}$
5. 函数 $f(z) = \frac{\cot \pi z}{2z-3}$ 在 $|z-i|=2$ 内的奇点个数为():
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
6. 函数 $f(z) = \frac{z}{z^4-1}$ 在无穷远点 $z=\infty$ 的留数为():
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

年 月 日



扫描全能王 创建

三、问下列函数有哪些孤立奇点？属于哪种类型？如果是极点，指出阶数。体会拓广疑问出它的阶。

1. $f(z) = e^{\frac{z}{1-z}}$; 2. $f(z) = \frac{1}{z(z^2 + 1)^2}$; 3. $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$;

4. $f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$.

日期:

年月日



扫描全能王 创建

心得 体会 拓广 疑问

四、求下列函数在有限孤立奇点的留数。

$$1. f(z) = \frac{z+1}{z^2 - 2z}; \quad 2. f(z) = \sin \frac{z}{z+1}; \quad 3. f(z) = \frac{z}{\cos z}.$$

年 月 日



扫描全能王 创建

五、计算下列函数在无穷远点的留数.

$$1. f(z) = \exp\left(\frac{1}{z^2}\right); \quad 2. f(z) = \frac{2z}{3+z^2}; \quad 3. f(z) = \cos z - \sin z.$$

心得 体会 拓广 疑问



扫描全能王 创建

年 月 日

六、利用留数计算下列各积分。

$$1. \oint_C \frac{2\cos z}{(e - e)^{-1}(2 - i)^3} dz, C: |z - i| = 1;$$

$$2. \oint_C \frac{1 - \cos z}{z^m} dz, C: |z| = \frac{3}{2}, m \in \mathbb{Z};$$

$$3. \oint_C \frac{1}{(z + i)^{10}(z - 1)(z - 3)} dz, C: |z| = 2;$$

$$4. \oint_C \frac{1}{1 + z^4} dz, C: x^2 + y^2 = 2x.$$

心得 体会 拓广 聚问

年 月 日



扫描全能王 创建

七、计算下列各积分.

$$1. \int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 3\sin \theta} d\theta;$$

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 4x + 5} dx;$$

$$3. \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{1 + x^2} dx.$$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日



扫描全能王 创建

八、若 $f(z)$ 在分段光滑闭曲线 C 所围区域内除点 $z=a$ 外解析, 且 a 是 $f(z)$ 的 n 阶极点, 求证: 当 $(z-a)^n f(z) = g(z)$ 时

$$\oint_C f(z) dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} g^{(n-1)}(a)$$

年月日



扫描全能王 创建

心得 体会 拓广 疑问

复变函数与积分变换试题(六)

一、填空题

1. 设 $f(t) = \sin^3 t$, 则 $\mathcal{F}[f(t)] = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 设 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, $a \neq 0$, 则 $\mathcal{F}[f(at - t_0)] = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 设 $u(t)$ 为单位阶跃函数, 则 $\mathcal{F}[u(t - \tau)] = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. 设 $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \frac{3}{1 + \omega^2}$, 则 $f(t) = \underline{\hspace{2cm}}$.
5. $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos \omega t dt = \underline{\hspace{2cm}}$.
6. 积分 $\int_{-4}^2 e^t \cdot \delta(t + 3) dt = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、单项选择题

1. 设 $f(t) = \delta(2 - t) + e^{i\omega_0 t}$, 则 $\mathcal{F}[f(t)] = (\quad)$.
 - A. $e^{-2\omega i} + 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
 - B. $e^{2\omega i} + 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
 - C. $e^{-2\omega i} + 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$
 - D. $e^{2\omega i} + 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$
2. 设 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, 则 $\mathcal{F}[(t - 2)f(t)] = (\quad)$.
 - A. $F'(\omega) - 2F(\omega)$
 - B. $-F'(\omega) - 2F(\omega)$
 - C. $iF'(\omega) - 2F(\omega)$
 - D. $-iF'(\omega) - 2F(\omega)$
3. 设 $f(t) = e^{-\beta|t|}$, $\beta > 0$, 则 $\mathcal{F}[f(t)] = (\quad)$.
 - A. $\frac{2\omega}{\beta^2 + \omega^2}$
 - B. $\frac{2\beta}{\beta^2 + \omega^2}$
 - C. $\frac{2\omega}{\beta^2 - \omega^2}$
 - D. $\frac{2\beta}{\beta^2 - \omega^2}$
4. 设 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, $\mathcal{F}[f(t) \sin \omega_0 t] = (\quad)$.
 - A. $\frac{i}{2}[F(\omega + \omega_0) - F(\omega - \omega_0)]$
 - B. $\frac{i}{2}[F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)]$
 - C. $\frac{1}{2}[F(\omega + \omega_0) - F(\omega - \omega_0)]$
 - D. $\frac{1}{2}[F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)]$
5. 若 $f(t) = u(t) \sin \omega_0 t$, 则 $\mathcal{F}[f(t)] = (\quad)$.
 - A. $\frac{i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} + \frac{\pi}{2}[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
 - B. $\frac{i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} + \frac{\pi i}{2}[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
 - C. $\frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} + \frac{\pi}{2}[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$

年 月 日



扫描全能王 创建

D. $\frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} + \frac{\pi i}{2} [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$

6. 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-3)(t^2+1)dt = (\quad)$.

A. 1

B. 10

C. 7

D. 5

三、求函数 $f(t) = e^{-|t|} \cos t$ 的傅氏变换，并求积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\omega^2 + 2}{\omega^4 + 4} \cdot \cos \omega t d\omega$ 的值。

心得 体会 拓广 疑问

年月日

年月日

年月日



扫描全能王 创建

四、求下列函数的傅氏变换.

1. $f(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & |t| < 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases};$
2. $f(t) = tu(t)e^{-\beta t} \sin \omega_0 t$, 其中 $\beta > 0$;
3. $f(t) = \cos \omega_0 t + i \frac{1}{\pi t} * \cos \omega_0 t$, 其中 $\omega_0 > 0$;
4. $f(t) = e^{i\omega_0 t} tu(t).$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日



扫描全能王 创建

心得 体会 拓广 疑问

五、求下列函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积。

$$1. f_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}, f_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-t}, & t \geq 0 \end{cases};$$

$$2. f_1(t) = e^{-at}u(t), f_2(t) = \sin tu(t).$$

年 月 日



扫描全能王 创建

六、利用能量积分公式,求下列积分的值.

$$1. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt; \quad 2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 t}{t^2} dt.$$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日



扫描全能王 创建

七、解积分方程 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(\tau)}{(t-\tau)^2 + a^2} d\tau = \frac{1}{t^2 + b^2}, 0 < a < b.$

心得 体会 拓广

年 月



扫描全能王 创建

八、求微分积分方程 $x'(t) - \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = e^{-it}$ 的解, 其中 $-\infty < t < +\infty$, 且 $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = 0$.

心得体会 拓广 疑问

复变函数与积分变换试题(六)

总第 6 页

复数与复变函数、复变函数的积分、留数定理、级数表示法、复变函数的应用。

年月日



扫描全能王 创建

复变函数与积分变换试题(七)

一、填空题

1. 已知 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, $a > 0, b \geq 0$, 则 $\mathcal{L}[f(at - b)u(at - b)] = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 已知 $f(t) = t^2 \cos 2t$, 则 $\mathcal{L}[f(t)] = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 已知 $f(t) = \frac{\sin 3t}{t}$, 则 $\mathcal{L}[f(t)] = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. 设 $F(s) = \arctan \frac{1}{s}$, 则 $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \underline{\hspace{2cm}}$.
5. 若 $F(s) = \ln(1 + \frac{1}{s^2})$, 则 $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \underline{\hspace{2cm}}$.
6. 已知 $F(s) = \frac{1 + e^{-2s}}{s^2}$, 则 $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、单项选择题

1. 设 $f(t) = e^{-t}u(t - 1)$, 则 $\mathcal{L}[f(t)] = (\quad)$.
 - A. $\frac{e^{-(s-1)}}{s-1}$
 - B. $\frac{e^{-s}}{s+1}$
 - C. $\frac{e^{-(s+1)}}{s+1}$
 - D. $\frac{e^{-s}}{s-1}$
2. 设 $f(t) = (t - a)u(t - a)$, $a \in \mathbb{R}$, 则 $\mathcal{L}[f(t)] = (\quad)$.
 - A. $\frac{e^a}{s^2}$
 - B. $\frac{e^{-a}}{s^2}$
 - C. $\frac{1}{(s+a)^2}$
 - D. $\frac{1}{(s-a)^2}$
3. 设 $f(t) = \sin(t - \frac{\pi}{3})$, 则 $\mathcal{L}[f(t)] = (\quad)$.
 - A. $\frac{1-\sqrt{3}s}{2(1+s^2)}$
 - B. $\frac{s-\sqrt{3}}{2(1+s^2)}$
 - C. $\frac{e^{-\frac{\pi}{3}s}}{1+s^2}$
 - D. $\frac{se^{-\frac{\pi}{3}s}}{1+s^2}$
4. 设 $f(t) = \int_0^t \tau e^{a\tau} \sin a\tau d\tau$, $t > 0, a \in \mathbb{C}$, 则 $\mathcal{L}[f(t)] = (\quad)$.
 - A. $\frac{2a(s+a)}{s[(s+a)^2 + a^2]^2}$
 - B. $\frac{2a(s-a)}{s[(s-a)^2 + a^2]^2}$
 - C. $\frac{2a(s-a)}{s[(s-a)^2 - a^2]^2}$
 - D. $\frac{2a(s+a)}{s[(s+a)^2 - a^2]^2}$
5. 已知 $F(s) = \frac{2e^{-s} - e^{-2s}}{s}$, 则 $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = (\quad)$.
 - A. $u(t-2) - 2u(t-1)$
 - B. $2u(t-2) - u(t-1)$
 - C. $u(t-1) - 2u(t-2)$
 - D. $2u(t-1) - u(t-2)$
6. 已知 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, 则 $\mathcal{L}^{-1}[sF'(s)] = (\quad)$.
 - A. $-tf'(t) - f(t)$
 - B. $tf(t) - f'(t)$
 - C. $tf'(t) + f(t)$
 - D. $-tf(t) + f'(t)$

年 月



扫描全能王 创建

三、求下列函数的拉氏变换.

1. $f(t) = \frac{2}{t}(1 - \cos at);$

2. $f(t) = u(3t - 5);$

3. $f(t) = t^n e^{at};$

4. $f(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{t}.$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日



扫描全能王 创建

四、求下列函数的拉氏逆变换。

$$1. F(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{(s+1)(s+2)}; \quad 2. F(s) = \frac{s^2 + 2s - 1}{s(s-1)^2};$$

$$3. F(s) = \ln \frac{s^2 - 1}{s^2}; \quad 4. F(s) = \frac{s^2}{(s^2 + a^2)^2}.$$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日



扫描全能王 创建

五、求下列积分。

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-3t} - e^{-6t}}{t} dt;$$

$$2. \int_0^{+\infty} t e^{-3t} \sin t dt;$$

$$3. \int_0^{+\infty} t e^{-2t} dt;$$

$$4. \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos t}{t} e^{-t} dt.$$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日



扫描全能王 创建

五、求下列积分。

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-3t} - e^{-6t}}{t} dt;$$

$$2. \int_0^{+\infty} t e^{-3t} \sin t dt;$$

$$3. \int_0^{+\infty} t e^{-2t} dt;$$

$$4. \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos t}{t} e^{-t} dt.$$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日



扫描全能王 创建

六、求解积分微分方程 $y'(t) + 2 \int_0^t y(\tau) d\tau = u(t-1), y(0) = 1.$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日



扫描全能王 创建

七、求微分方程组 $\begin{cases} y'' - x'' + x' - y = e^t - 2 \\ 2y'' - x'' - 2y' + x = -t \end{cases}$ 满足初始条件 $x(0) = x'(0) = 0, y(0) = y'(0) = 0$ 的解。

心得 体会 拓广 疑问

首先对方程组进行整理，得

$$\begin{cases} y'' - x'' + x' - y = e^t - 2 \\ 2y'' - x'' - 2y' + x = -t \end{cases}$$

将方程组中的未知数按字母的先后顺序重新排列，得

$$\begin{cases} x'' - y'' - x' + y = e^t - 2 \\ x'' - 2y'' - 2y' + y = -t \end{cases}$$

令 $u = x'' - y'', v = y'$ ，则原方程组可化为

$$\begin{cases} u - v = e^t - 2 \\ u - 2v = -t \end{cases}$$

解此线性方程组，得 $v = \frac{e^t}{2} - \frac{t}{2} - 1$ ， $u = \frac{e^t}{2} - \frac{t}{2} - 1 + 1 = \frac{e^t}{2} - \frac{t}{2}$ 。
 因此 $x'' = \frac{e^t}{2} - \frac{t}{2}$ ， $y'' = \frac{e^t}{2} - \frac{t}{2} - 1$ 。
 由 $x'' = \frac{e^t}{2} - \frac{t}{2}$ ，得 $x' = \frac{e^t}{4} - \frac{t^2}{4} + C_1$ 。
 由 $y'' = \frac{e^t}{2} - \frac{t}{2} - 1$ ，得 $y' = \frac{e^t}{4} - \frac{t^2}{4} - \frac{t}{2} + C_2$ 。
 由初始条件 $x(0) = x'(0) = 0, y(0) = y'(0) = 0$ ，得 $C_1 = 0, C_2 = 0$ 。
 因此 $x = \frac{e^t}{8} - \frac{t^3}{8} + \frac{t}{4}$ ， $y = \frac{e^t}{8} - \frac{t^3}{8} - \frac{t^2}{4} - \frac{t}{4}$ 。

年 月 日



扫描全能王 创建

复变函数与积分变换试题(综合一)

一、填空题

1. 函数 $f(z) = z \operatorname{Im} z + \operatorname{Re} z$ 在 _____ 处连续, 在 _____ 处可导, 在 _____ 处解析.
2. 复数 $(1+i)^i$ 的实部为 _____, 虚部为 _____.
3. 设 $f(z) = \oint_{|\xi|=2} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\xi\right)}{\xi - z} d\xi$, 其中 $|z| \neq 2$, 则 $f'(1) =$ _____.
4. 已知 $f(z) = (z-1)^2 e^{\frac{1}{z}}$, 则 $\operatorname{Res}[f(z), 0] =$ _____.
5. 已知 $F(\omega) = \mathcal{L}[f(t)]$, 则 $\mathcal{F}[f(3t-2)] =$ _____.

二、单项选择题

1. 复数 $z = 1 - \cos \alpha + i \sin \alpha (0 \leq \alpha \leq \pi)$ 的辐角主值为().
 A. $\frac{\alpha}{2}$ B. $\pi - \frac{\alpha}{2}$ C. $\frac{\pi - \alpha}{2}$ D. $\frac{\alpha - \pi}{2}$
2. 设 $f(z)$ 在单连域 D 内处处解析且处处不为零, C 为 D 内任意一条闭路, 则积分 $\oint_C \frac{f''(z) + 2f'(z) + 3f^2(z)}{f(z)} dz$ 为().
 A. $2\pi i$ B. $-2\pi i$ C. 0 D. 不能确定
3. Laurent 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(z-3)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-\frac{z}{3})^n$ 的收敛圆环域为().
 A. $2 < |z| < 3$ B. $2 < |z-3| < 3$
 C. $\frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{3} < |z-3| < \frac{1}{2}$
4. $z=1$ 是函数 $f(z) = (z-1)^2 \sin \frac{1}{z-1}$ 的().
 A. 可去奇点 B. 极点 C. 非孤立奇点 D. 本性奇点
5. 已知 $f(t) = e^{2t} \delta'(t)$, 则 $\mathcal{F}[f(t)] =$ ().
 A. $2 + i\omega$ B. $i(\omega + 2)$ C. $i(\omega - 2)$ D. $2 - i\omega$

年 月 日



扫描全能王 创建

三、验证 $u(x, y) = e^{-y} \sin x$ 是调和函数，并求出以 $z = x + iy$ 为自变量的解析函数

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \text{ 其中 } f(0) = -i$$

年 月 日



扫描全能王 创建

四、把下列函数在给定的圆环域内展开成 Laurent 级数.

$$1. f(z) = \frac{z^2 - 3z + 2}{z^2 - 7z + 12}, 3 < |z| < 4;$$

$$2. f(z) = \sin\left(\frac{z}{z-1}\right), 0 < |z-1| < +\infty.$$

年 月



扫描全能王 创建

五、设 $f(z) = \frac{z-a}{z+a}$, $a \neq 0$, 求积分 $\oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$, 其中 C 为任一条包含原点且落在圆周 $|z|=|a|$ 内的简单闭曲线.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日



扫描全能王 创建

六、计算下列各积分。

1. $\int_C z(z + \bar{z}) dz$, 其中 C 为 $|z|=1$ 的上半圆周, 且取由 1 到 -1 的方

向;

$$2. \oint_C \frac{\cos \pi z}{z^3(z-1)^2} dz, C: |z|=2;$$

$$3. \oint_C \frac{z^{13}}{(z^2+2)^3(z^2-1)^4} dz, C: |z|=3;$$

$$4. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+9)} dx.$$

年 月



扫描全能王 创建

七、若函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在点 z_0 处解析, 且 $f(z_0) \neq 0, g(z)$ 以 z_0 为二阶零点, 证明

$$\operatorname{Res}\left[\frac{f(z)}{g(z)}, z_0\right] = \frac{a_1 b_2 - a_0 b_3}{b_2^2}$$

其中 $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, b_k = \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!}, k = 0, 1, 2, 3.$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

年 月 日



扫描全能王 创建

八、计算积分 $I = \int_0^\pi \frac{\sin^2 3\theta}{1 - 2a\cos \theta + a^2} d\theta$, $|a| < 1$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日



扫描全能王 创建

九、求函数 $f(t) = e^{-\beta|t|}$ ($\beta > 0$) 的傅氏变换，并证明

$$\int_0^\infty \frac{\cos wt}{\beta^2 + w^2} dw = \frac{\pi}{2\beta} e^{-\beta|t|}$$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日



扫描全能王 创建

十、求下列函数的 Laplace 变换或逆变换.

$$1. f(t) = e^{-5t} \int_0^t \frac{\sin 2\tau}{\tau} d\tau, \text{求 } F(s) = \mathcal{L}[f(t)];$$

$$2. F(s) = \frac{2s^2 + 3s + 2}{(s+1)(s+3)^3}, \text{求 } f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)].$$

心得 体会 拓广

年



扫描全能王 创建

十一、利用拉氏变换求解微分方程的初值问题

$$\begin{cases} y''(t) + 3y'(t) + 3y(t) = 1 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$$

心得 体会 拓广 疑问

第十一章

复数与复变函数

第十一章

年 月 日



扫描全能王 创建

复变函数与积分变换试题(综合二)

一、将下列复数写成 $x + iy$ 的形式.

1. $\cos(1 + 2i)$; 2. $1^{\sqrt{3}}$; 3. $\ln(3 + 4i)$; 4. $\arctan 2i$.

年 月 日



扫描全能王 创建

二、验证 $u(x, y) = [(x+1)\cos y - y\sin y]e^x$ 是否在 z 平面上调和, 心得体会 拓广 疑问
若为调和函数, 请求出调和函数 $v(x, y)$, 使 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在 z 平面上解析.

年 月 日



扫描全能王 创建

三、若 $f(z) = u + iv$ 是解析函数, 证明

$$\frac{\partial^2 \ln(1 + |f(z)|^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ln(1 + |f(z)|^2)}{\partial y^2} = \frac{4 |f'(z)|^2}{(1 + |f(z)|^2)^2}$$

心得 体会 拓广

年 月 日



扫描全能王 创建

四、计算下列积分.

心得 体会 拓广 疑问

1. $\int_C \frac{\bar{z}}{|z|} dz$, C 是以原点为心, 3 为半径的上半圆周, C 起点为 -3, 终点为 3;

$$2. \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz;$$

$$3. \oint_{|z|=1} \frac{z \sin z}{(1-e^z)^3} dz;$$

$$4. \oint_{|z|=2} \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)};$$

$$5. \int_0^\pi \frac{dx}{3+2\cos x \sin x}, a > 0;$$

$$6. \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+9} dx.$$

年 月 日



扫描全能王 创建

五、设函数 $f(z)$ 在 $0 < |z| < +\infty$ 上解析, $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, 求对任一自然数 k , 函数 $\frac{f(z)}{z^k}$ 在点 $z=0$ 处的留数 $\text{Res}\left[\frac{f(z)}{z^k}, 0\right]$.

心得 体会 拓广 质问

年 月 日



扫描全能王 创建

六、把下列函数在给定的圆环域内展开成 Laurent 级数.

心得 体会 拓广 疑问

1. $\frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)}$, $1 < |z| < 2$;

2. $\cos \frac{z}{z-1}$, $0 < |z-1| < +\infty$.

年 月 日



扫描全能王 创建

七、已知 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$, 计算 $\oint_{|z|=2} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$, 其中 $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日



扫描全能王 创建

八、求 $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2 + 4s + 13)^2}\right]$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日



扫描全能王 创建

九、求下列微分积分方程

$$x'(t) - 4 \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = e^{-4t}$$

的解, 其中 $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = 0$.

心得 体会 拓广 问题

年 月 日



扫描全能王 创建

十、求下列函数的 Laplace 变换或逆变换.

$$1. \cos^3 t; \quad 2. t^2 \int_0^t e^{-\tau} \sin 2\tau d\tau; \quad 3. \frac{2s^3 - s^2 - 1}{(s+1)^2(s^2+1)^2}.$$

心得 体会 拓广 疑问

1. $\cos^3 t$

$\mathcal{L}\{\cos^3 t\} = \frac{1}{s} \left[1 + \frac{2}{s} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{s+i} \right) \right]$

$= \frac{1}{s} \left[1 + \frac{2}{s} \cdot \frac{1}{s^2+1} \right] = \frac{s^2+2s+1}{s(s^2+1)}$

$= \frac{(s+1)^2}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} \left(\frac{s+1}{s^2+1} \right)^2$

$\mathcal{L}\{\cos^3 t\} = \frac{1}{s} \left(\frac{s+1}{s^2+1} \right)^2$

2. $t^2 \int_0^t e^{-\tau} \sin 2\tau d\tau$

$\mathcal{L}\{t^2 \int_0^t e^{-\tau} \sin 2\tau d\tau\} = \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}\{e^{-t} \sin 2t\}$

$= \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{2}{s^2+4} \right) = \frac{8s^2}{(s^2+4)^3}$

3. $\frac{2s^3 - s^2 - 1}{(s+1)^2(s^2+1)^2}$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{2s^3 - s^2 - 1}{(s+1)^2(s^2+1)^2} \right\} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}$

$= \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s^2+1}$

年 月 日



扫描全能王 创建

十一、利用 Laplace 变换求解下列初值问题

$$x''(t) + 4x'(t) + 3x(t) = e^{-t}, x(0) = x'(0) = 1$$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日



扫描全能王 创建

心得 体会 拓广 疑问

复变函数与积分变换试题(综合三)

一、填空题

1. 一复数对应的向量按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$ 时, 对应的复数是 $1+i$, 则原复数是 _____.
2. 设 $f(z) = u + iv$ 解析, 则 $f'(z) = _____$.
3. 设 $f(z) = \oint_{|\zeta|=2} \frac{\zeta(e^\zeta + \sin \zeta)}{\zeta - z} d\zeta$, 则 $f'(0) = _____$.
4. Laurent 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-2)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{z}{2}\right)^n$ 的收敛圆环域为 _____.
5. $z=1$ 是函数 $f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$ 的 _____ 奇点.

二、单项选择题

1. 映射 $w = \frac{3z-i}{z+i}$ 在 $z_0 = 2i$ 处的旋转角为().
- A. 0 B. $\frac{\pi}{2}$ C. π D. $-\frac{\pi}{2}$
2. $f(z) = \frac{z}{z^4-1}$ 在 $z=\infty$ 处的留数为().
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
3. 设 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, 则 $\mathcal{F}[(t-2)f(t)] = ()$.
- A. $F'(\omega) - 2F(\omega)$ B. $-F'(\omega) - 2F(\omega)$
 C. $iF'(\omega) - 2F(\omega)$ D. $-iF'(\omega) - 2F(\omega)$
4. 在 z 平面上, 点 $z = 2+i$ 关于圆周 $\Gamma: |z-i|=3$ 的对称点为().
- A. $\frac{9}{2}-i$ B. $\frac{9}{2}+i$ C. $\frac{2}{5}+i$ D. $\frac{2}{5}-i$
5. 下列方程所表示的曲线中, () 是椭圆.
- A. $|z+i| + |z-i| = 3$ B. $\left| \frac{z-2}{z-1} \right| = 8$
 C. $\operatorname{Im} z = |\operatorname{z}| + 1$ D. $\operatorname{Re} z^3 = 3$

年 月 日



扫描全能王 创建

三、已知 $u+v=(x-y)(x^2+4xy+y^2)-2(x+y)$, 确定解析函数 $f(z)=u+iv$. 心得 体会 拓广 疑问

(三) 有关复数的逆元与逆变换的练习题

心得

1. 已知 $z_1=1+i\sqrt{3}$, $z_2=2-i\sqrt{3}$, 求 $z_1 \cdot z_2$.

解: $z_1 \cdot z_2 = (1+i\sqrt{3})(2-i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3} + 2i\sqrt{3} - 3 = -1 + i\sqrt{3}$

2. 已知 $z_1=1+i\sqrt{3}$, $z_2=2-i\sqrt{3}$, 求 $\frac{z_1}{z_2}$.

解: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}} = \frac{(1+i\sqrt{3})(2+i\sqrt{3})}{(2-i\sqrt{3})(2+i\sqrt{3})} = \frac{-1+3i}{7} = -\frac{1}{7} + i\frac{3}{7}$

3. 已知 $z_1=1+i\sqrt{3}$, $z_2=2-i\sqrt{3}$, 求 $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

解: $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (1-i\sqrt{3})(2+i\sqrt{3}) = 2 + i\sqrt{3} - 2i\sqrt{3} - 3 = -1 - i\sqrt{3}$

心得体会

4. 已知 $z_1=1+i\sqrt{3}$, $z_2=2-i\sqrt{3}$, 求 $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$.

解: $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{1+i\sqrt{3}} + \frac{1}{2-i\sqrt{3}} = \frac{(1-i\sqrt{3})(2+i\sqrt{3})}{(2-i\sqrt{3})(2+i\sqrt{3})} + \frac{(1+i\sqrt{3})(2-i\sqrt{3})}{(2+i\sqrt{3})(2-i\sqrt{3})} = \frac{-1+3i}{7} + \frac{-1-i\sqrt{3}}{7} = -\frac{2}{7} + i\frac{2\sqrt{3}}{7}$

5. 已知 $z_1=1+i\sqrt{3}$, $z_2=2-i\sqrt{3}$, 求 $\frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2}$.

解: $\frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2} = \frac{1}{(1+i\sqrt{3})(2-i\sqrt{3})} = \frac{1}{7} = \frac{1}{7}$

6. 已知 $z_1=1+i\sqrt{3}$, $z_2=2-i\sqrt{3}$, 求 $\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{1}{z_1}$.

解: $\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{1}{z_1} = \frac{1}{z_2} = \frac{1}{2-i\sqrt{3}} = \frac{2+i\sqrt{3}}{7} = \frac{2}{7} + i\frac{\sqrt{3}}{7}$

7. 已知 $z_1=1+i\sqrt{3}$, $z_2=2-i\sqrt{3}$, 求 $\frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2} \cdot \frac{1}{z_1}$.

解: $\frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2} \cdot \frac{1}{z_1} = \frac{1}{z_2} = \frac{1}{2-i\sqrt{3}} = \frac{2+i\sqrt{3}}{7} = \frac{2}{7} + i\frac{\sqrt{3}}{7}$

8. 已知 $z_1=1+i\sqrt{3}$, $z_2=2-i\sqrt{3}$, 求 $\frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2} \cdot \frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_1}$.

解: $\frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2} \cdot \frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_1} = \frac{1}{z_2} = \frac{1}{2-i\sqrt{3}} = \frac{2+i\sqrt{3}}{7} = \frac{2}{7} + i\frac{\sqrt{3}}{7}$

9. 已知 $z_1=1+i\sqrt{3}$, $z_2=2-i\sqrt{3}$, 求 $\frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2} \cdot \frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_1}$.

解: $\frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2} \cdot \frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_1} = \frac{1}{z_2} = \frac{1}{2-i\sqrt{3}} = \frac{2+i\sqrt{3}}{7} = \frac{2}{7} + i\frac{\sqrt{3}}{7}$

10. 已知 $z_1=1+i\sqrt{3}$, $z_2=2-i\sqrt{3}$, 求 $\frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2} \cdot \frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_1}$.

解: $\frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2} \cdot \frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_1} = \frac{1}{z_2} = \frac{1}{2-i\sqrt{3}} = \frac{2+i\sqrt{3}}{7} = \frac{2}{7} + i\frac{\sqrt{3}}{7}$

年 月 日

年 月 日



扫描全能王 创建

四、计算

心得 体会 拓广 疑问

1. 计算积分 $\int_{\Gamma} (x - y + ix^2) dz$, Γ 为直线段由 0 到 $1 + i$;

2. 设 $f(z) = \frac{e^z}{z - 1}$, 求积分 $\oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$, C : $|z| = r < 1$;

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 4x + 5} dx$;

年 月 日



扫描全能王 创建

4. 求函数 $f(z) = \frac{z-1}{z(z+2)}$ 在 $2 < |z+2i| < 2\sqrt{2}$ 内的 Laurent 展开式;

心得 体会 拓广 指向

$$5. \oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{e^z}{(z^2+1)(z^2+4)} dz.$$

年 月 日



扫描全能王 创建

五、设 $f(z)$ 在域 D 内解析, $z_0 \in D$, 且 $f(z_0) = 0, f'(z_0) \neq 0$. 若 $D' = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \delta\} \subset D$, 且 $f'(z) \neq 0, z \in D' \setminus \{z_0\}$, 求证

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\delta} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz = z_0$$

年 月 日



扫描全能王 创建

六、求函数 $f(t) = t^2 u(t)$ 和 $g(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$ 的卷积.

心得 体会 拓广 题目

年 月 日



扫描全能王 创建

七、求解下列初值问题

$$\begin{cases} y''(t) - y'(t) - 6y(t) = 2 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日



扫描全能王 创建