主管领导审核签字

哈尔滨工业大学（深圳）2018/2019 学年秋季学期

复变函数与积分变换期末试题

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
阅卷人											

注意行为规范　　遵守考场纪律

姓名　密　学号　封　班号　线　学院

一、　填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 复数$(1+i\sqrt{3})^{2018}$的三角表示式是$\underline{2^{2018}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}$。

2. 设 $f(z)$ 在$|z|<1$ 内解析，且$g(z)=f(z^2)$，　则

$g^{(2019)}(0)=\underline{\ 0\ }$。

3. 设函数$\dfrac{e^{\frac{z}{z-i}}\cos z}{(z^2-3z+2)}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$，则幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$的收敛半经

$R=\underline{\ 1\ }$。

4. 设 $f(z)$ 在复平面上解析，且 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$，则

$Res\left[\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}\right)f(z),0\right]=\underline{a_0+a_1}$。

5. 已知$F(\omega)=\pi[\delta(\omega+2)+\delta(\omega-2)]$为函数$f(t)$的傅氏变换，则

$f(t)=\underline{\ \cos 2t\ }$ 。

二、　单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 函数 $w = \mathrm{Ln}\,z$ 各个分支的解析区域为（D）.

A. 复平面；　　B. 扩充复平面；

C. 除去原点的复平面；　　D. 除去原点与负实轴的复平面；

2. 设 $f(z) = a_0 + a_1 z$，其中 a_0, a_1 是复常数，则

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} |f(z)|^2 \mathrm{d}z = \text{（C）}.$$

A. $a_0^{\ 2}$　　B. $a_1^{\ 2}$　　C. $a_0 \overline{a_1}$　　D. $\overline{a_0} a_1$

3. 下列命题，正确的是（B）。

A. 幂级数在它的收敛圆周上处处收敛；

B. 幂级数的收敛半径大于 0，则其在收敛圆内的和函数解析；

C. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n$ 在点 $z=4$ 处收敛，则其在 $z=1$ 处发散；

D. 函数 $f(z) = \overline{z}$ 在复平面上仅在 $z=0$ 处可导。

4. 为使积分 $\frac{1}{\pi i}\oint_C \frac{1}{z(z^2-1)}\mathrm{d}z = 1$，积分路径 C（C 为正向简单闭曲线）应为

（A）。

A. 包含 1 而不包含 0，-1；　　B. 包含 0，1 而不包含-1；

C. 包含 0，-1 而不包含 1；　　D. 包含 0，1，-1；

5. 下列傅氏变换 F 中，不正确的是（D）。

A. $F[u(t)] = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$　　B. $F[\delta(t)] = 1$

C. $F[1] = 2\pi\delta(\omega)$　　D. $F[\cos\omega_0 t] = \delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)$

学院　　　班号　　　学号　　　姓名

密　　　封　　　线

三、　计算（每小题 5 分，共 20 分）

1. $I=\oint\limits_{|z|=4}(z+\bar{z})\mathrm{d}z$；

解：$I=\oint\limits_{|z|=4}(z+\bar{z})\mathrm{d}z=\oint\limits_{|z|=4}(z+\frac{16}{z})\mathrm{d}z=16\cdot 2\pi\mathrm{i}=32\pi\mathrm{i}.$

2. $I=\oint\limits_{|z|=2}\frac{e^z}{z(z-1)^2}\mathrm{d}z$；

解：$I=\oint\limits_{|z|=2}\frac{e^z}{z(z-1)^2}\mathrm{d}z$

$$=2\pi\mathrm{i}\left\{\mathrm{Res}\left[\frac{e^z}{z(z-1)^2},0\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{e^z}{z(z-1)^2},1\right]\right\}$$

$$=2\pi\mathrm{i}\left[\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{(z-1)^2}+\lim_{z\to 1}\left(\frac{e^z}{z}\right)'\right]$$

$$=2\pi\mathrm{i}\ .$$

3. $I=\oint\limits_{|z|=2}\frac{1}{(z+\mathrm{i})^{10}(z-1)(z-3)}\mathrm{d}z$；

解：$I=\oint\limits_{|z|=2}\frac{1}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)}\mathrm{d}z$

$$=2\pi\mathrm{i}\left\{\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z+\mathrm{i})^{10}(z-1)(z-3)},-\mathrm{i}\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z+\mathrm{i})^{10}(z-1)(z-3)},1\right]\right\}$$

$$=-2\pi\mathrm{i}\left\{\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z+\mathrm{i})^{10}(z-1)(z-3)},3\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z+\mathrm{i})^{10}(z-1)(z-3)},\infty\right]\right\}$$

$$=-2\pi\mathrm{i}\left[\frac{1}{(3+\mathrm{i})^{10}\cdot 2}-\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(\frac{1}{z}+\mathrm{i})^{10}(\frac{1}{z}-1)(\frac{1}{z}-3)}\frac{1}{z^2},0\right]\right]$$

$$=-\frac{\pi\mathrm{i}}{(3+\mathrm{i})^{10}}.$$

4. $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

解： $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x^2+1}\mathrm{d}x$

$$=2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2+1},\mathrm{i}\right]$$

$$=2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to\mathrm{i}}(z-\mathrm{i})\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2+1}$$

$$=2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{-1}}{2\mathrm{i}}$$

$$=\pi\mathrm{e}^{-1}.$$

$$\therefore I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}\mathrm{d}x=\pi\mathrm{e}^{-1}.$$

四、 （8 分）求函数 $f(z)=\frac{z-1}{z(z+2)}$ 在 $0<|z|<2$ 内的洛朗展开式.

解：当 $0<|z|<2$ 时，有

$$f(z)=\frac{z-1}{z(z+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{z+2}-\frac{1}{z}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}-\frac{1}{z}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n-\frac{1}{z}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n3}{2^{n+2}}z^n.$$

学院 班号 学号 姓名
密 封 线

五、（7 分）设 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z+2}$，求积分

$$I_n=\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z, n=0,1,2\cdots。$$

解：当 $|z|<1$ 时，有

$$f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n.$$

当 $0<|z|<1$ 时，有 $\dfrac{f(z)}{z^{n+1}}=\cdots+\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)\dfrac{1}{z}+\cdots.$

故

$$I_n=\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left[\frac{f(z)}{z^{n+1}},0\right]=2\pi\mathrm{i}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right),\qquad n=0,1,2\cdots.$$

六、（10 分）利用拉普拉斯变换求解下列初值问题

$$\begin{cases}y''-y'-6y=2\\ y(0)=1,y'(0)=0\end{cases}.$$

解：设 $L[y(t)]+Y(s)$，则有

$$\left[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right]-\left[sY(s)-y(0)\right]-6Y(s)=\frac{2}{s}.$$

$$\left(s^2-s-6\right)Y(s)=\frac{s^2-s+2}{s}.$$

$$\therefore Y(s)=\frac{s^2-s+2}{s(s+2)(s-3)}.$$

$$\therefore y(t)=L^{-1}\left[\frac{s^2-s+2}{s(s+2)(s-3)}\right]$$

$$=\mathrm{Res}\left[Y(s)\mathrm{e}^{st},0\right]+\mathrm{Res}\left[Y(s)\mathrm{e}^{st},-2\right]+\mathrm{Res}\left[Y(s)\mathrm{e}^{st},3\right]$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{4}{5}\mathrm{e}^{-2t}+\frac{8}{15}\mathrm{e}^{3t}.$$

七、　（5 分）设 $f(z)$ 在区域 D 内解析。如果存在两个不全为零的复数 c_1 和 c_2，　使得

$$c_1 f(z)+c_2\overline{f(z)}=0,\forall z\in D,$$

则 $f(z)$ 在区域 D 内是常数。

证： 设 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，则 u 和 v 有连续的偏导，且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}。\qquad (1)$$

又设存在两个不全为零的复数 c_1 和 c_2，　使得

$$c_1 f(z)+c_2\overline{f(z)}=0,\qquad \forall z\in D。$$

如果 $c_2=0$，则 $c_1\neq 0$。这样 $f(z)=0$ 是常数。

如果 $c_2\neq 0$，则 $\overline{f(z)}=-\frac{c_1}{c_2}f(z)$。从而 $\overline{f(z)}$ 解析。

注意到 $\overline{f(z)}=u-iv$。我们有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial(-v)}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial(-v)}{\partial x}。\qquad (2)$$

由 (1) 和 (2)，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=0。$$

因此，$f(z)$ 在区域 D 内是常数。