主管领导审核签字

哈尔滨工业大学（深圳）2020/2021 学年秋季学期

复变函数与积分变换期末试题

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								
阅卷人								

注意行为规范　　遵守考场纪律

姓名　学号　班号　学院

密　封　线

一、 填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 复数 $-\sqrt{3}-\mathrm{i}$ 的主辐角是 $\underline{-150^\circ \text{或} -\frac{5\pi}{6}}$。

2. 设 C 是从 $z=1$ 到 $z=-1$ 的上半单位园周，则积分

$$\int_C \mathrm{e}^{z}\,\mathrm{d}z = \underline{\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}}。$$

3. 设幂函数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-2)^n$ 在点 $2-2i$ 处收敛，在点 $z=0$ 处发散，则该幂级数的收敛半径 $R=\underline{\quad 2 \quad}$。

4. $\oint\limits_{|z|=1}\left(\sin^{2021} z+\dfrac{z+1}{z^2+2z+4}\right)\mathrm{d}z=\underline{\quad 0 \quad}$。

5. 设 $f(t)=\cos 2t$，则其傅氏变换

$$F(\omega)=\underline{\pi\left[\delta(\omega+2)+\delta(\omega-2)\right]}。$$

二、　单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设函数 $f(z)=\bar{z}\, z^3$，那么（C）。

A. $f(z)$处处可导；　　B. $f(z)$处处不可导；

C. $f(z)$仅在原点可导；　　D. $f(z)$仅在原点解析。

2. 设 C 为正向圆周 $|z|=1$，则 $\oint\limits_C \left(1+3z+z^2\right)\sin\frac{1}{z}\,dz=$ (D).

A. $-\frac{5\pi i}{6}$；　　B. $\frac{5\pi i}{6}$；　　C. $-\frac{5\pi i}{3}$；　　D. $\frac{5\pi i}{3}$。

3. 下列命题正确的是（B）。

A. 每一个幂级数在其收敛圆周上处处收敛；

B. 每一个幂级数的和函数在收敛圆内处处解析；

C. 若函数 $f(z)$的实、虚部在点 z_0 处满 C-R 条件，则 $f(z)$在点 z_0 处解析；

D. 若函数 $f(z)$的实、虚部均为调和函数，则 $f(z)$解析。

4. $z=0$ 是函数 $f(z)=\left(1+\frac{1}{z^2}\right)e^{-\frac{1}{z}}$ 的（A）。

A. 本性奇点；　　B. 极点；

C. 可去奇点；　　D. 非孤立奇点。

5. 若 $F(\omega)=i\pi\left[\delta(\omega+2)-\delta(\omega-2)\right]$ 为函数 $f(t)$ 傅氏变换，则 $f(t)$是（A）。

A. $\sin 2t$；　　B. $i\sin 2t$；

C. $\cos 2t$；　　D. $i\cos 2t$。

姓名 学号 班号 学院

密 封 线

三、 计算（每小题 5 分，共 20 分）

1. $I=\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{z}{\sin z}\mathrm{d}z$；

$$I=\oint\limits_{|z|=1}\frac{z}{\sin z}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left[\frac{z}{\sin z},0\right]=0\text{。}$$

2. $I=\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{z\sin z}{(z-\frac{\pi}{2})^2}\mathrm{d}z$；

$$I=\oint\limits_{|z|=2}\frac{z\sin z}{(z-\frac{\pi}{2})^2}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left[\frac{z\sin z}{(z-\frac{\pi}{2})^2},\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=2\pi\mathrm{i}\cdot\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\left(z\sin z\right)'=2\pi\mathrm{i}\cdot\left(\sin z+z\cos z\right)\Big|_{z=\frac{\pi}{2}}=2\pi\mathrm{i}\text{。}$$

3. $I=\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{(z^2+1)^{10}}\mathrm{d}z$；

$$I=\oint\limits_{|z|=2}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{(z^2+1)^{10}}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\mathrm{i}\cdot\left(\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{(z^2+1)^{10}},0\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{(z^2+1)^{10}},\mathrm{i}\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{(z^2+1)^{10}},-\mathrm{i}\right]\right)$$

$$=-2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{(z^2+1)^{10}},\infty\right]=2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{z}}{(\frac{1}{z^2}+1)^{10}}\frac{1}{z^2},0\right]$$

$$=2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left[\frac{z^{18}\mathrm{e}^{z}}{(z^2+1)^{10}},0\right]=0\text{。}$$

4. $I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\sin\theta}\mathrm{d}\theta$。

令$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则 $\sin\theta=\frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}},\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$.

故

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\sin\theta}\mathrm{d}\theta=\int_{|z|=1}\frac{1}{2+\frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$

$$=2\int_{|z|=1}\frac{1}{z^2+4\mathrm{i}z-1}\mathrm{d}z=2\cdot2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^2+4\mathrm{i}z-1},\mathrm{i}\left(-2+\sqrt{3}\right)\right]$$

$$=4\pi\mathrm{i}\cdot\lim_{z\to\mathrm{i}\left(-2+\sqrt{3}\right)}\frac{1}{z-\mathrm{i}\left(-2-\sqrt{3}\right)}=\frac{4\pi\mathrm{i}}{2\sqrt{3}\mathrm{i}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}。$$

四、 （8 分）求函数 $f(z)=\frac{1}{z^2+z-6}$ 在 $2<|z|<3$ 内的洛朗展开式。

$$f(z)=\frac{1}{z^2+z-6}=\frac{1}{(z-2)(z+3)}$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z+3}\right)=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{z}{3}}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}z^n\right)。$$

五、（5 分）设函数 $g(z)$ 在 $z=a$ 解析，a 为函数 $f(z)$ 的一阶极点且 $\text{Res}\left[f(z),a\right]=2020$，求留数 $\text{Res}\left[f(z)g(z),a\right]$。

解： 因 a 为函数 $f(z)$ 的一阶极点，故 $f(z)=\dfrac{1}{z-a}\varphi(z)$，其中 $\varphi(z)$ 在 $z=a$ 解析且 $\varphi(a)\neq 0$。从而，有

$$f(z)g(z)=\frac{1}{z-a}\varphi(z)g(z)\text{。}$$

若 $g(a)\neq 0$，则 a 为函数 $f(z)g(z)$ 的一阶极点。因此，得

$$\begin{aligned}\text{Res}\left[f(z)g(z),a\right]&=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)g(z)\\&=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)\lim_{z\to a}g(z)\\&=\text{Res}\left[f(z),a\right]g(a)=2020g(a)\text{。}\end{aligned}$$

若 $g(a)=0$，则

$$f(z)g(z)=\frac{1}{z-a}\varphi(z)g(z)=\frac{1}{z-a}\varphi(z)(z-a)^m\psi(z),\quad m\geq 1,$$

其中 $\psi(z)$ 在 $z=a$ 解析且 $\psi(a)\neq 0$。从而，a 为函数 $f(z)g(z)$ 的可去奇点。因此，得

$$\text{Res}\left[f(z)g(z),a\right]=0=2020g(a)\text{。}$$

六、（10 分）利用拉普拉斯变换求解下列初值问题

$$\begin{cases}y''-3y'+2y=0\\y(0)=2,y'(0)=3\end{cases}\text{。}$$

解： 令 $L[y(t)]=Y(S)$。在第一个方程两边求拉普拉斯变换，并代入初值条件得

$$S^2Y(S)-2S-3-3SY(S)+6+2Y(S)=0$$

故
$$Y(S)=\frac{2S-3}{S^2-3S+2}=\frac{1}{S-1}+\frac{1}{S-2}\text{。}$$

$$\therefore y(t)=L^{-1}\left[Y(S)\right]=e^t+e^{2t}\text{。}$$

姓名 学号 班号 学院

密 封 线

七、　（7 分）已知函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是解析函数，且

$$u-v=\mathrm{e}^x\left[(x-y)\cos y-(x+y)\sin y\right],$$

求 $f(z)$。

解： $u_x-v_x=\mathrm{e}^x\left[(x-y+1)\cos y-(x+y+1)\sin y\right]$。　　(1)

$u_y-v_y=-\mathrm{e}^x\left[(x+y+1)\cos y+(x-y+1)\sin y\right]$ 。　　(2)

由于 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是解析函数，　故　$u_x=v_y, u_y=-v_x$。

代入（2），　得

$$u_x+v_x=\mathrm{e}^x\left[(x+y+1)\cos y+(x-y+1)\sin y\right] \qquad (3)$$

（1）+（3），及（3）-（1）得

$$\begin{aligned} u_x&=\mathrm{e}^x\left[(x+1)\cos y-y\sin y\right] \\ v_x&=\mathrm{e}^x\left[y\cos y+(x+1)\sin y\right] \end{aligned}。$$

因此，得

$$\begin{aligned} u&=\int(x+1)\mathrm{e}^x\cos y\,\mathrm{d}x-\int y\sin y\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\varphi(y) \\ &=\cos y\left[(x+1)\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x\right]-y\sin y\mathrm{e}^x+\varphi(y) \\ &=\mathrm{e}^x(x\cos y-y\sin y)+\varphi(y) 。\end{aligned}$$

再由 $u_y=-v_x$，得

$$\mathrm{e}^x\left[-x\sin y-\sin y-y\cos y\right]+\varphi'(y)=-\mathrm{e}^x\left[y\cos y+(x+1)\sin y\right]。$$

$$\therefore \varphi'(y)=0 \text{，或 } \varphi(y)=c 。$$

故

$$u=\mathrm{e}^x(x\cos y-y\sin y)+c 。$$

从而，有

$$v=u-\mathrm{e}^x\left[(x-y)\cos y-(x+y)\sin y\right]=\mathrm{e}^x(y\cos y+x\sin y)+c 。$$

故

$$f(z)=\mathrm{e}^x(x\cos y-y\sin y)+c+\mathrm{i}\mathrm{e}^x(y\cos y+x\sin y)+c\mathrm{i}=z\mathrm{e}^z+c(1+\mathrm{i}) 。$$